ISSN 2709-6238

ВЕСТНИК

ФИЛИАЛА МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В ГОРОДЕ ДУШАНБЕ

СЕРИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

ПАЁМИ

ФИЛИАЛИ ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ МОСКВА БА НОМИ М.В. ЛОМОНОСОВ ДАР ШАҲРИ ДУШАНБЕ

БАХШИ ИЛМҲОИ ТАБИӢ

BULLETIN

OF LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY IN DUSHANBE

THE SERIES OF NATURAL SCIENCES

3(19) 2021

ISSN 2709-6238

ВЕСТНИК

ФИЛИАЛА МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В ГОРОДЕ ДУШАНБЕ

СЕРИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

ПАЁМИ

ФИЛИАЛИ ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ МОСКВА БА НОМИ М.В. ЛОМОНОСОВ ДАР ШАҲРИ ДУШАНБЕ

БАХШИ ИЛМҲОИ ТАБИӢ

BULLETIN

OF LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY IN DUSHANBE

THE SERIES OF NATURAL SCIENCES

3(19) 2021

ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В Г. ДУШАНБЕ
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ОСНОВАН В 2016 ГОДУ.

ФИЛИАЛИ ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ МОСКВА БА НОМИ
М.В. ЛОМОНОСОВ ДАР Ш. ДУШАНБЕ
МАҶАЛЛАИ ИЛМӢ СОЛИ 2016 ТАЪСИС ЁФТААСТ.

LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY IN DUSHANBE
ACADEMIC JOURNAL FOUNDED IN 2016.

В журнале статьи печатаются на русском, таджикском и английском языках.
Дар маҷалла мақолаҳо бо забонҳои русӣ, тоҷикӣ ва англисӣ нашр мешаванд.

СОДЕРЖАНИЕ – МУНДАРИҶА

УДК 517.958

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССА, ОПИСЫВАЕМОГО ТЕЛЕГРАФНЫМ УРАВНЕНИЕМ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ, ПРОИЗВОДИМОЕ СМЕЩЕНИЯМИ НА ДВУХ КОНЦАХ

Абдукаримов М.Ф.

Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе

Аннотация. *В данной работе в терминах обобщенного решения одномерного телеграфного уравнения с переменным коэффициентом рассматривается задача граничного управления процесса, описываемого этим уравнением, производимого смещениями на двух концах. Доказывается разрешимость рассматриваемой задачи граничного управления при времени, меньшем или равном критическому. Исследована также разрешимость соответствующих смешанных задач.*

Ключевые слова: *смешанная задача, граничное управление, телеграфное уравнение, устойчивость.*

1. Постановка задачи и основные определения

В прямоугольнике $Q_T = [0 \le x \le l] \times [0 \le t \le T]$ рассмотрим следующие задачи:

- смешанную задачу I:

$$Lu \equiv u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t) = f(x,t) \ \ в \ \ Q_T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \ \ u(l,t) = \nu(t) \quad при \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ \ u_t(x,0) = \psi(x) \quad при \quad 0 \le x \le l, \tag{3}$$

в которой $\mu(t), \nu(t) \in W_2^1[0,T]$, $\varphi(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi(x) \in L_2[0,l]$, $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ и выполнены условия согласования

$$\mu(0) = \varphi(0), \ \ \nu(0) = \varphi(l); \tag{4}$$

- смешанную задачу II: уравнение (1) с краевыми условиями (2) при $0 \le t \le T$ и условиями

$$u(x,T) = \varphi_1(x), \ \ u_t(x,T) = \psi_1(x) \quad при \quad 0 \le x \le l, \tag{5}$$

в которой $\mu(t), \ \nu(t) \in W_2^1[0,T]$, $\varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi_1(x) \in L_2[0,l]$, $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ и выполнены условия согласования

$$\mu(T) = \varphi_1(0), \nu(T) = \varphi_1(l); \tag{6}$$

- задачу граничного управления III: уравнение (1) с начальными условиями (3) и финальными условиями (5), в которой $\varphi(x), \varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi(x), \psi_1(x) \in L_2[0,l]$ и $f(x,t) \in L_2(Q_T)$.

В задачах I-III предполагается, что переменный коэффициент $q(x,t)$ принадлежит лишь классу $L_2(Q_T)$.

Решение поставленных задач понимается в обобщённом смысле и ищется в классе $\hat{W}_2^1(Q_T)$, впервые введённом в [1].

Отметим, что из принадлежности решения задачи III классу $\hat{W}_2^1(Q_T)$ следует, что функция $u(x,t)$ имеет следы $u(0,t)=\mu(t)\in W_2^1[0,T]$ и $u(l,t)=\nu(t)\in W_2^1[0,T]$, которые удовлетворяют условиям согласования с функциями $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$, т.е. условиям (4) и (6).

Определение 1. *Решением из класса* $\hat{W}_2^1(Q_T)$ *смешанной задачи* I назовем такую функцию $u(x,t)$ из этого класса, которая удовлетворяет тождеству

$$\int_0^l\int_0^T u(x,t)L\Phi(x,t)dxdt+\int_0^l[\varphi(x)\Phi_t(x,0)-\psi(x)\Phi(x,0)]dx-$$

$$-\int_0^T[\mu(t)\Phi_x(0,t)-\nu(t)\Phi_x(l,t)]dt=\int_0^l\int_0^T f(x,t)\Phi(x,t)\,dxdt \qquad (7)$$

для любой функции $\Phi(x,t)\in\hat{W}_2^2(Q_T)$, подчиненной условиям $\Phi(0,t)=\Phi(l,t)\equiv 0$ при $0\le t\le T$ и условиям $\Phi(x,T)=\Phi_t(x,T)\equiv 0$ при $0\le x\le l$, и которая, кроме того, удовлетворяет граничным условиям (2) и первому начальному условию (3) в классическом смысле, а второму начальному условию (3) – почти всюду на $[0,l]$.

Определение 2. *Решением из класса* $\hat{W}_2^1(Q_T)$ *смешанной задачи* II назовем такую функцию $u(x,t)$ из этого класса, которая удовлетворяет тождеству (7), в котором вместо второго интеграла стоит взятый со знаком «минус» интеграл $\int_0^l[\varphi_1(x)\Phi_t(x,T)-\psi_1(x)\Phi(x,T)]dx$ и которое выполнено для любой функции $\Phi(x,t)\in\hat{W}_2^2(Q_T)$, подчиненной условиям $\Phi(0,t)=\Phi(l,t)\equiv 0$ при $0\le t,\le T$ и условиям $\Phi(x,0)=\Phi_t(x,0)\equiv 0$ при $0\le x\le l$, и которая, кроме того, удовлетворяет граничным условиям (2) и первому финальному условию (5) в классическом смысле, а второму финальному условию (5) – почти всюду на $[0,l]$.

Определение 3. *Решением из класса* $\hat{W}_2^1(Q_T)$ *задачи граничного управления* III назовем решение $u(x,t)$ из этого класса смешанной задачи I с такими функциями $\mu(t)$ и $\nu(t)$, что выполнены первое финальное условие (5) в классическом смысле, второе условие (5) почти всюду на $[0,l]$ и условия согласования (4), (6).

2. Разрешимость смешанных задач

Из тождества (7) и схемы рассуждений, приведенных в работе [2], вытекает следующее

Утверждение 1. *Пусть* $q(x,t)$ *есть нулевой элемент класса* $L_2(Q_T)$. *Тогда для любого* $T>0$ *как смешанная задача I, так и смешанная задача II может иметь только одно решение из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$.

Рассмотрим теперь смешанную задачу I, у которой $\varphi(x)\equiv 0$ на сегменте $[0,l]$, $\psi(x)=0$ почти всюду на $[0,l]$, а граничные функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ являются произвольными функциями из класса $W_2^1[0,T]$. При этом в силу условия согласования (4) должны выполняться равенства $\mu(0)=0,\ \nu(0)=$

0, которые позволяют продолжить $\mu(t)$ и $\nu(t)$ тождественным нулем на значения $t < 0$. Обозначим эти продолженные функции символоми $\underline{\mu}(t)$ и $\underline{\nu}(t)$. Очевидно, что $\underline{\mu}(t), \underline{\nu}(t) \in W_2^1[-\varepsilon, T]\ \ \forall \varepsilon > 0$.

Утверждение 2. *Пусть* $T \le l$ *и* $q(x,t)$ *есть нулевой элемент класса* $L_2(Q_T)$. *Тогда единственное решение* $u(x,t)$ *из класса* $\hat{W}_2^1(Q_T)$ *смешанной задачи I, у которой* $\varphi(x) \equiv 0$ *на сегменте* $[0,l]$, $\psi(x) = 0$ *почти всюду на* $[0,l]$, $f(x,t) \in L_2[Q_T]$, *а* $\mu(t)$ *и* $\nu(t)$ *– произвольные функции из класса* $W_2^1[0,T]$, *удовлетворяющие условиям* $\mu(0) = 0,\ \nu(0) = 0$, *определяется равенством*

$$u(x,t) = \overset{0}{u}(x,t) + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi\, d\tau, \qquad (8)$$

где $\overset{0}{u}(x,t) = \underline{\mu}(t-x) + \underline{\nu}(t+x-l)$ *– решение смешанной задачи I для соответствующего однородного волнового уравнения (*см. [3]*), а подынтегральная функция получена из функции правой части уравнения (1)* $f(x,t)$ *нечетным продолжением относительно границ* $x = 0$ *и* $x = l$ *прямоугольника* Q_T.

Для доказательства этого утверждения достаточно повторить все рассуждения, приведённые в [4].

Рассмотрим теперь смешанную задачу I с нулевыми начальными условиями (3), произвольными граничными функциями $\mu(t),\ \nu(t) \in W_2^1[0,T]$, удовлетворяющими условиям согласования $\mu(0) = 0,\ \ \nu(0) = 0$, и произвольными функциями $f(x,t),\ q(x,t) \in L_2(Q_T)$. Имеет место следующая

Лемма. *Пусть* $T \le l$ *и* $f(x,t),\ q(x,t) \in L_2(Q_T)$. *Тогда обобщенное решение из класса* $\hat{W}_2^1(Q_T)$ *смешанной задачи I, у которой* $\varphi(x) \equiv 0$ *при* $x \in [0,l]$, $\psi(x) = 0$ *для почти всех* $x \in [0,l]$ *и* $\mu(t), \nu(t)$ *– произвольные функции из класса* $W_2^1[0,T]$, *для которых* $\mu(0) = 0,\ \nu(0) = 0$, *удовлетворяет соотношению*

$$u(x,t) = \underline{\mu}(t-x) + \underline{\nu}(t+x-l) + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{|x-t+\tau|}^{l-|x+t-\tau-l|} \left[q(\xi,\tau)u(\xi,\tau) + f(x,t)\right]d\xi d\tau. \qquad (9)$$

Доказательство. Для получения соотношения (9) достаточно в формуле (8) учесть нечетность продолженной подынтегральной функции $f(x,t)$ относительно границ $x = 0$ и $x = l$ прямоугольника Q_T и после чего положить $f(x,t) := q(x,t)u(x,t) + f(x,t)$ в уравнении (1).

Справедливо следующая

Теорема 1. *Пусть* $T \le l$ *и* $q(x,t),\ f(x,t) \in L_2(Q_T)$. *Тогда решение* $u(x,t)$ *из класса* $\hat{W}_2^1(Q_T)$ *смешанной задачи I, рассмотренной в лемме, существует, причем выполнена оценка*

$$\sup_{(x,t)\in Q_T}|u(x,t)|\le M_1\left(\sup_{t\in[0,T]}|\mu(t)|+\sup_{t\in[0,T]}|\nu(t)|+\|f\|_2\right), \qquad (10)$$

равномерная для всех коэффициентов $q(x,t)$: $\|q\|_2\le\gamma$ *(тем самым,* $M_1=M_1(\gamma)>0$*). Если выполнено условие* $f(x,t)\equiv 0$, *то* $u(x,t)\equiv 0$ *в области* $\{(x,t)\,|\,0\le t\le\frac{l}{2},\ t\le x\le l-t\}\bigcap Q_T$.

Доказательство. Поскольку все рассуждения для каждого значения $T\in(0,l]$ проводятся единообразно, ради простоты ограничимся лишь случаем $T=l$. Итак, разделим прямоугольник Q_l на четыре части характеристиками $x=t$ и $x=l-t$. В полученных областях:

– треугольнике $\Delta_1=\left\{(x,t)\,|\,0\le t\le\frac{l}{2},\ t\le x\le l-t\right\}$, примыкающем к нижнему основанию Q_l;

– треугольниках $\Delta_2=\left\{(x,t)\,|\,0\le t\le l,\ 0\le x\le\frac{l}{2}-\left|t-\frac{l}{2}\right|\right\}$ и $\Delta_3=\left\{(x,t)\,|\,0\le t\le l,\ \frac{l}{2}+\left|t-\frac{l}{2}\right|\le x\le l\right\}$, примыкающих к боковым сторонам Q_l;

– треугольнике $\Delta_4=\left\{(x,t)\,|\,\frac{l}{2}\le t\le l,\ l-t\le x\le t\right\}$, примыкающем к верхнему основанию Q_l, положим $u_j(x,t)=u(x,t)$ при $(x,t)\in\Delta_j$, $j=\overline{1,4}$, и рассмотрим соотношение (9) последовательно для точек (x,t), лежащих в областях Δ_1, Δ_2, Δ_3 и Δ_4 как интегральные уравнения для нахождения $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$ и $u_4(x,t)$.

При $j=1$ соотношение (9) примет вид

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}\iint_{D_1}\left[q(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)+f(\xi,\tau)\right]d\xi d\tau, \qquad (11)$$

где $(x,t)\in\Delta_1$ и $D_1\equiv D_1(x,t)=\{(\xi,\tau)\,|\,0\le\tau\le t,\ x-t+\tau\le\xi\le x+t-\tau\}$.

Записывая уравнение (11) в операторном виде $u_1(x,t)=\frac{1}{2}\iint_{D_1}f(\xi,\tau)d\xi d\tau+[N_1u_1](x,t)$, нетрудно убедиться, что оператор N_1 ограниченно действует в пространстве $L_2(\Delta_1)$ и его степени N_1^k удовлетворяют оценкам

$$\left|[N_1^k\chi](x,t)\right|\le\|q\|_{2,\Delta_1}^k\,\frac{t^k}{\sqrt{2^k\cdot(2k)!}}\sup_{(x,t)\in\Delta_1}|\chi(x,t)|,\quad k\in N. \qquad (12)$$

Следовательно, (11) является интегральным уравнением типа Вольтерры второго рода. Если $f(x,t)\equiv 0$, то оно как однородное уравнение

имеет только тривиальное решение, то есть в этом случае $u_1(x,t) \equiv 0$. Если $f(x,t)$ произвольная функция из класса $L_2(Q_T)$, то решение уравнения (11) можно записать в виде ряда Неймана

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_1} f(\xi,\tau)d\xi d\tau + \sum_{k=1}^{\infty}\left[N_1^k f\right](x,t),$$

который абсолютно сходится в силу оценки (12). Нетрудно показать, что

$$\sup_{(x,t)\in\Delta_1}|u_1(x,t)| \le \frac{l}{4}\exp\left(\frac{l\|q\|_{2,\Delta_1}}{\sqrt{2}}\right)\|f\|_2,$$

которое соответствует оценке (10). Очевидно, что если функция $f(x,t)$ есть нулевой элемент класса $L_2(Q_T)$, то получим неравенство $\sup\limits_{(x,t)\in\Delta_1}|u_1(x,t)| \le 0$, из которого вытекает, что $u_1(x,t) \equiv 0$ для всех точек треугольника Δ_1.

Так как $\underline{\nu}(t+x-l) \equiv 0$ при $(x,t) \in \Delta_2$, то при $j=2$ из (9) получим равенство

$$\begin{aligned} u_2(x,t) &= \mu(t-x) + \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{21}} q(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau + \\ &+ \frac{1}{2}\iint\limits_{D_2} q(\xi,\tau)u_2(\xi,\tau)d\xi d\tau + \frac{1}{2}\iint\limits_{D_2\cup D_{21}} f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$D_{21} \equiv D_{21}(x,t) = \left\{(\xi,\tau)\,|\,0 \le \tau \le \frac{t+x}{2},\ \frac{t-x}{2} + \left|\tau - \frac{t-x}{2}\right| \le \xi \le x+t-\tau\right\} \subset \Delta_1,$$

$$D_2 \equiv D_2(x,t) = \left\{(\xi,\tau)\,|\,\frac{t-x}{2} \le \tau \le t,\ |x-t+\tau| \le \xi \le \frac{t+x}{2} - \left|\tau - \frac{t+x}{2}\right|\right\} \subset \Delta_2.$$

Так как область D_{21} целиком лежит в треугольнике Δ_1, то первый интеграл в равенстве (13) известен. Поэтому равенство (13) представляет собой интегральное уравнение для нахождения $u_2(x,t)$. Перепишем его в операторном виде $u_2(x,t) = F_2(x,t) + [N_2 u_2](x,t)$ и заметим, что ограниченный в $L_2(\Delta_2)$ оператор N_2 удовлетворяет оценкам

$$\left|[N_2^k \chi](x,t)\right| \le \left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_2}}{2}\right)^k \frac{\sqrt{t^k(t-x)^k}}{k!}\sup_{(x,t)\in\Delta_2}|\chi(x,t)|, \quad k \in N. \tag{14}$$

Так как известная функция

$$F_2(x,t) = \mu(t-x) + \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{21}} q(\xi,\tau)\,u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau + \frac{1}{2}\iint\limits_{D_2\cup D_{21}} f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau,$$

ограничена, то уравнение (13) имеет ограниченное в Δ_2 решение, представимое абсолютно сходящимся рядом Неймана

$u_2(x,t) = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} N_2^k\right) F_2(x,t)$. Теперь покажем, что полученное решение удовлетворяет оценке (10). Имеем

$$\left|F_2(x,t)\right| \le \sup_{(x,t)\in\Delta_2} \left|\mu(t-x)\right| + \frac{1}{2} \sup_{(x,t)\in\Delta_1} \left|u_1(x,t)\right| \cdot \iint\limits_{D_{21}} q(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \frac{1}{2} \iint\limits_{Q_l} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \le$$

$$\le \sup_{(x,t)\in\Delta_2} \left|\mu(t-x)\right| + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} \exp\left(\frac{l\left\|q\right\|_{2,\Delta_1}}{\sqrt{2}}\right) \left\|f\right\|_2 \cdot \left\|q\right\|_{2,\Delta_1} \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \left\|f\right\|_2 \cdot l =$$

$$= \sup_{t\in[0,T]} \left|\mu(t)\right| + A_1 \left\|f\right\|_2 + A_2 \left\|f\right\|_2 = \sup_{t\in[0,T]} \left|\mu(t)\right| + A_3 \left\|f\right\|_2.$$

Отсюда

$$\left|u_2(x,t)\right| \le \sup_{(x,t)\in\Delta_1\cup\Delta_2} \left|F_2(x,t)\right| \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{l\left\|q\right\|_{2,\Delta_2}}{2}\right)^k\right) \le$$

$$\le \left[\sup_{t\in[0,T]} \left|\mu(t)\right| + \frac{A_3}{2} \left\|f\right\|_2\right] \cdot \exp\left(\frac{l\left\|q\right\|_{2,\Delta_2}}{2}\right) \le A_4 \left(\sup_{t\in[0,T]} \left|\mu(t)\right| + \left\|f\right\|_2\right).$$

Аналогично при $j = 3$ с учетом того, что $\underline{\mu}(t-x) \equiv 0$ при $(x,t) \in \Delta_3$, соотношение (9) примет вид

$$u_3(x,t) = F_3(x,t) + \frac{1}{2} \iint\limits_{D_3} q(\xi,\tau) u_3(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \qquad (15)$$

где

$$F_3(x,t) = \nu(t+x-l) + (1/2) \iint\limits_{D_{31}} q(\xi,\tau) u_1(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \frac{1}{2} \iint\limits_{D_3 \cup D_{31}} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

$$D_{31} \equiv D_{31}(x,t) = \left\{(\xi,\tau) \mid 0 \le \tau \le \frac{l-x+t}{2},\ x-t+\tau \le \xi \le \right.$$

$$\left. \frac{3l-x-t}{2} - \left|\tau - \frac{x+t-l}{2}\right| \right\} \subset \Delta_1,$$

$$D_3 \equiv D_3(x,t) = \left\{(\xi,\tau) \mid \frac{x+t-l}{2} \le \tau \le t,\ \frac{l+x-t}{2} + \left|\tau - \frac{l-x+t}{2}\right| \le \right.$$

$$\left. \xi \le l - \left|\tau - x - t + l\right| \right\} \subset \Delta_3.$$

Так как интегральный оператор N_3 правой части (15) ограниченно действует в $L_2(\Delta_3)$ и удовлетворяет оценкам

$$\left|[N_3^k\chi](x,t)\right| \le \left(\frac{\sqrt{l}\,\|q\|_{2,\Delta_3}}{2}\right)^k \frac{\sqrt{(x+t-l)^k}}{k!} \sup_{(x,t)\in\Delta_3} |\chi(x,t)|, \quad k \in N, \tag{16}$$

то в силу ограниченности функции $F_3(x,t)$ получим, что уравнение (15) имеет ограниченное в Δ_3 решение $u_3(x,t) = (I + \sum_{k=1}^{\infty} N_3^k)F_3(x,t)$. Аналогично случаю $j = 3$ можно показать, что полченное решение соответствует оценке (10).

Пусть теперь $(x,t) \in \Delta_4$. В этом случае из соотношения (9) получим

$$u_4(x,t) = F_4(x,t) + \frac{1}{2}\iint_{D_4} q(\xi,\tau)u_4(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{17}$$

где

$$F_4(x,t) = \mu(t-x) + \nu(t+x-l) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\iint_{D_{4j}} q(\xi,\tau)u_j(\xi,\tau)d\xi d\tau + \frac{1}{2}\iint_{D_{41}\cup D_{42}\cup D_{43}\cup D_4} f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$D_{41} \equiv D_{41}(x,t) = \left\{(\xi,\tau)\,|\,0 \le \tau \le \frac{l}{2},\ \frac{t-x}{2} + \left|\tau - \frac{t-x}{2}\right| \le \xi \le \frac{3l-x-t}{2} - \left|\tau - \frac{t+x-l}{2}\right|\right\} \subset \Delta_1,$$

$$D_{42} \equiv D_{42}(x,t) = \left\{(\xi,\tau)\,|\,\frac{t-x}{2} \le \tau \le \frac{l+t-x}{2},\ |x-t+\tau| \le \xi \le \frac{l}{2} - \left|\tau - \frac{l}{2}\right|\right\} \subset \Delta_2,$$

$$D_{43} \equiv D_{43}(x,t) = \left\{(\xi,\tau)\,|\,\frac{t+x-l}{2} \le \tau \le \frac{t+x}{2}, \frac{l}{2} + \left|\tau - \frac{l}{2}\right| \le \xi \le l - |\tau - x - t + l|\right\} \subset \Delta_3,$$

$$D_4 \equiv D_4(x,t) = \left\{(\xi,\tau)\,|\,\frac{l}{2} \le \tau \le t, \frac{l-t+x}{2} + \left|\frac{l+t-x}{2} - \tau\right| \le \xi \le \frac{t+x}{2} - \left|\frac{t+x}{2} - \tau\right|\right\} \subset \Delta_4.$$

Все слагаемые правой части (17), кроме последнего, являются известными ограниченными в Δ_4 функциями. Тем самым, соотношение (17) представляет собой интегральное уравнение для нахождения $u_4(x,t)$, в котором оператор $[N_4\chi](x,t) \equiv \frac{1}{2}\iint_{D_4} q(\xi,\tau)\chi(\xi,\tau)d\xi d\tau$ ограниченно действует в $L_2(\Delta_4)$ и удовлетворяет оценкам

$$\left|[N_4^k\chi](x,t)\right| \le \left(\frac{\sqrt{l}\,\|q\|_{2,\Delta_4}}{2}\right)^k \frac{\sqrt{(t-x)^k}}{k!} \sup_{(x,t)\in\Delta_4} |\chi(x,t)|, \quad k \in N. \tag{18}$$

Как и для уравнения (15), из (18) следует, что интегральное уравнение (17) имеет ограниченное в Δ_4 решение $u_4(x,t)$ и нетрудно показать, что оно соответствует оценке (10).

Исследуем теперь гладкость полученного таким образом ограниченного в Q_T решения $u(x,t)$.

Прежде всего равенство (9) свидетельствует о непрерывности решения $u(x,t)$. Далее положим $U(x,t) \equiv q(x,t)u(x,t) + f(x,t)$ и продолжим $U(x,t)$ нечетно относительно границ $x = 0$ и $x = l$ прямоугольника Q_T.

Тогда (9) перепишется в виде (8) с $f(\xi,\tau) := U(\xi,\tau)$, откуда непосредственным дифференцированием получим, что почти всюду в Q_T

$$u_t(x,t) = \underline{\mu}'(t-x) + \underline{\nu}'(t+x-l) + \frac{1}{2}\int_0^t [U(x+t-\tau,\tau) + U(x-t+\tau,\tau)]d\tau, \tag{19}$$

$$u_x(x,t) = -\underline{\mu}'(t-x) + \underline{\nu}'(t+x-l) + \frac{1}{2}\int_0^t [U(x+t-\tau,\tau) - U(x-t+\tau,\tau)]d\tau. \tag{20}$$

Из соотношений (19) и (20) следует, что $u_t(x,t)$ и $u_x(x,t)$ принадлежат $L_2(0 \le x \le l)$ для всех $t \in [0,l]$ и принадлежат $L_2(0 \le t \le l)$ для всех $x \in [0,l]$. Теорема 1 полностью доказана.

Замечание 1. С помощью рядов Неймана, дающих решения уравнений (11), (13), (15), (17), и с учетом оценок (12), (14), (16), (18) получим, что $\max\limits_{(x,t)\in Q_T} |u(x,t) - u^*(x,t)| \le M_2 \|q\|_2$, где

$$u^*(x,t) = \underline{\mu}(t-x) + \underline{\nu}(t+x-l) + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

при $T \le l$ является единственным решением из класса $\hat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи I для неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными условиями (см. утв. 2). Принимая во внимание представления (19) и (20), можно сделать вывод, что

$$\|u - u^*\|_{W_2^1(Q_T)} \le M_3 \|q\|_2. \tag{21}$$

Замечание 2. Отметим, что утверждения, аналогичные лемме и теореме 1, могут быть получены и для решений смешанной задачи II с нулевыми финальными условиями (5) и такими граничными условиями (2), в которых $\mu(t), \nu(t) \in W_2^1[0,T]$ и $\mu(T) = \nu(T) = 0$. Подчеркнем, что в аналоге теоремы 1 решение рассматриваемой смешанной задачи для однородного уравнения будет тождественным нулем в области $\{(x,t) \mid T - \frac{l}{2} \le t \le T,\ T - t \le x \le t + l - T\} \bigcap Q_T$.

С помощью тождества (5) и техники, приведённой в [5], доказывается следующая

Теорема 2. *Пусть в уравнении (1) коэффициент q(x,t) принадлежит классу* $L_2(Q_T)$. *Тогда для любого* $T \le l$ *каждая из смешанных задач I и II может иметь не более одного решения из класса* $\hat{W}_2^1(Q_T)$.

Замечание 3. Отметим, что сходные вопросы, которые касаются разрешимости слабо обобщённых решений гиперболических уравнений, рассматриваются также в работе [6, с.163-165]. В монографии [7, с. 232] теорема единственности доказывается при выполнении некоторых дополнительных условий на гладкость коэффициента, а в статьях [8] - [10] – для ограниченного и измеримого коэффициента. Если коэффициент не зависит от переменной *t*, то для доказательства теоремы единственности можно использовать спектральный метод, предложенный в [2].

3. Разрешимость задачи граничного управления при времени, меньшем или равном критическому

В этом пункте изучим вопрос существования при $T = l$ и единственности при $T \le l$ задачи граничного управления III. Начнем с формулировки и доказательства утверждений о единственности и существовании решения для частного случая указанной задачи.

Используя рассуждения, приведенные в работе [1], нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения

Утверждение 3. *Пусть* $0 < T \le l$ *и* $q(x,t)$ *является нулевым элементом класса* $L_2(Q_T)$. *Тогда может существовать только одно решение из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *задачи граничного управления III.*

Имеет место следующее

Утверждение 4. *Пусть* $q(x,t)$ *является нулевым элементом класса* $L_2(Q_T)$. *Тогда для того чтобы при* $T = l$ *для наперед заданных пяти функций* $\varphi(x)$, $\varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi(x)$, $\psi_1(x) \in L_2[0,l]$ *и* $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ *существовало единственное решение задачи граничного управления III из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:*

$$\hat{\psi}_1(0) + \varphi_1(0) - \hat{\psi}(l) - \varphi(l) - \int_0^l \hat{f}(l-\tau,\tau)d\tau = 0, \qquad (22)$$

$$\hat{\psi}_1(l) - \varphi_1(l) - \hat{\psi}(0) + \varphi(0) - \int_0^l \hat{f}(\tau,\tau)d\tau = 0, \qquad (23)$$

где $\hat{\psi}(x)$, $\hat{\psi}_1(x)$ *и* $\hat{f}(x,t)$ *обозначают первообразные функций* $\psi(x)$, $\psi_1(x)$ *и* $f(x,t)$ *по* x *соответственно.*

При выполнении этих условий решение указанной задачи дается формулой

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\Big[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)+\hat{\psi}(x+t)- \\ \quad -\hat{\psi}(x-t)+\int\limits_0^t\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\Big] & \text{в } \Delta_1, \\ \frac{1}{2}\Big[\varphi(x+t)+\hat{\psi}(x+t)+\varphi_1(x-t+l)- \\ \quad -\hat{\psi}_1(x-t+l)+N(x,t)\Big] & \text{в } \Delta_2, \\ \frac{1}{2}\Big[\varphi(x-t)-\hat{\psi}(x-t)+\varphi_1(x+t-l)+ \\ \quad +\hat{\psi}_1(x+t-l)+M(x,t)\Big] & \text{в } \Delta_3, \\ \frac{1}{2}[\varphi_1(x+t-l)+\varphi_1(x-t+l)+ \\ \quad +\int\limits_{x-t+l}^{x+t-l}\psi_1(\xi)d\xi-\int\limits_t^l\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau\Big] & \text{в } \Delta_4, \end{cases} \tag{24}$$

где Δ_1- треугольник, ограниченный отрезками прямых $t-x=0,\ t+x-l=0, t=0$; Δ_2- треугольник, ограниченный отрезками прямых $t-x=0,\ t+x-l=0,\ \ x=0$; Δ_3- треугольник, ограниченный отрезками прямых $t-x=0,\ \ t+x-l=0,\ x=l$, Δ_4- треугольник, ограниченный отрезками прямых $t-x=0, t+x-l=0, t=l$ и

$$N(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int\limits_0^l \hat{f}(x-t+\tau,\tau)d\tau,$$

$$M(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)d\xi d\tau-\int\limits_0^l \hat{f}(x+t-\tau,\tau)d\tau.$$

При этом искомые граничные управления $u(0,t)=\mu(t)$ и $u(l,t)=\nu(t)$, переводящие процесс вынужденных колебаний из начального состояния в финальное, имеют следующий вид:

$$\mu(t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(t)+\hat{\psi}(t)+\varphi_1(l-t)-\hat{\psi}_1(l-t)+\int\limits_0^l \hat{f}(t-\tau,\tau)d\tau\right],$$

$$\nu(t)=\frac{1}{2}\left[\varphi_1(t)+\hat{\psi}_1(t)+\varphi(l-t)-\hat{\psi}(l-t)-\int\limits_0^l \hat{f}(t+l-\tau,\tau)d\tau\right].$$

Доказательство необходимости. Сначала рассмотрим частный случай, когда в задаче III $\varphi(x)\equiv 0$ на сегменте $[0,l]$, а $\psi(x)$ является нулевым элементом $L_2[0,l]$. Решение $u(x,t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ задачи III (если оно существует) является одновременно решением из того же класса смешанной

задачи I, у которой $\varphi(x) \equiv 0$ на $[0, l]$, а $\psi(x)$ есть нулевой элемент $L_2[0, l]$. Но это решение в силу утверждения 2 представляется в виде (8), из которого получим соотношение

$$\psi_1(x) + \varphi_1'(x) = 2\underline{\nu}'(x) + \int_0^l f(x + l - \tau, \tau)d\tau. \qquad (25)$$

Интегрируя (25) по x в пределах от нуля до l и учитывая равенства $\underline{\nu}(0) = 0, \underline{\nu}(l) = \varphi_1(l)$, будем иметь:

$$\hat{\psi}_1(l) - \varphi_1(l) - \int_0^l \hat{f}(\tau, \tau)d\tau = \hat{\psi}_1(0) + \varphi_1(0) - \int_0^l \hat{f}(l - \tau, \tau)d\tau. \qquad (26)$$

Из соотношения (26) вытекает, что если мы обозначим через $\hat{\psi}_1(x)$ и $\hat{f}(x, t)$ те первообразные функций $\psi_1(x)$ и $f(x, t)$ по переменной x, которые удовлетворяют условию

$$\hat{\psi}_1(0) + \varphi_1(0) - \int_0^l \hat{f}(l - \tau, \tau)d\tau = 0, \qquad (27)$$

то справедливо равенство

$$\hat{\psi}_1(l) - \varphi_1(l) - \int_0^l \hat{f}(\tau, \tau)d\tau = 0. \qquad (28)$$

Тем самым, для частного случая, когда $\varphi(x) \equiv 0$ на $[0, l]$, а $\psi(x)$ есть нулевой элемент $L_2[0, l]$, необходимость соотношений (22) и (23) установлена.

Рассмотрим теперь общий случай, когда $\varphi(x)$ является произвольной функцией из класса $W_2^1[0, l]$, а $\psi(x)$ - произвольным элементом класса $L_2[0, l]$. С этой целью продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ четно относительно точек $x = 0$ и $x = l$ на сегменты $[-l, 0]$ и $[l, 2l]$. Продолжим также функцию $f(x, t)$ по первой переменной нечетно относительно границ прямоугольника $Q_T : x = 0$ и $x = l$ на сегменты $[-l, 0]$ и $[l, 2l]$. Продолженные таким образом функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x, t)$ будут принадлежать классам $W_2^1[-l, 2l]$, $L_2[-l, 2l]$ и $L_2[(-l \le x \le 2l) \times (0 \le t \le T)]$ соответственно.

С так продолженными функциями $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x, t)$ рассмотрим функцию

$$v(x, t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x + t) + \varphi(x - t) + \hat{\psi}(x + t) - \hat{\psi}(x - t)\right] + \\ + \frac{1}{2}\int_0^t \left[\hat{f}(x + t - \tau, \tau) - \hat{f}(x - t + \tau, \tau)\right]d\tau, \qquad (29)$$

удовлетворяющую условиям $v(x, 0) = \varphi(x)$ $\forall x \in [0, l]$ и $v_t(x, 0) = \psi(x)$ для почти всех $x \in [0, l]$, в которой $\hat{\psi}(x)$ обозначает произвольную первообразную функции $\psi(x)$ и $\hat{f}(x, t)$ – первообразную функции $f(x, t)$ по первой переменной.

Покажем, что функция (27) является обобщенным решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_l)$ смешанной задачи I, в которой $u(x,t)$ заменено на $v(x,t)$, $\mu(t)$ – на $v(0,t)$, а $\nu(t)$ – на $v(l,t)$. Для этого достаточно показать, что она удовлетворяет тождеству (7), в котором $u(x,t)$, $\mu(t)$ и $\nu(t)$ заменены на $v(x,t), v(0,t)$ и $v(l,t)$ соответственно для любой фигурирующей в определении 1 функции $\Phi(x,t)$.

С помощью интегрирования по частям перепишем (7) в виде

$$\int_0^l \int_0^l [v_x(x,t)\Phi_x(x,t) - v_t(x,t)\Phi_t(x,t) - f(x,t)\Phi(x,t)]dxdt = \\ = \int_0^l v_t(x,0)\Phi(x,0)dx. \qquad (30)$$

В силу (29) левая часть (30) равна

$$\frac{1}{2}\int_0^l \{[\varphi(x+l)-\varphi(x-l)+\hat{\psi}(x+l)+\hat{\psi}(x-l)]\Phi_x(x,l) - 2\hat{\psi}(x)\Phi_x(x,0)\}dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l [\varphi(x+t)-\varphi(x-t)+\hat{\psi}(x+t)+\hat{\psi}(x-t)]\Phi_{xt}(x,t)dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l \{[\varphi(l+t)-\varphi(l-t)+\hat{\psi}(l+t)+\hat{\psi}(l-t)]\Phi_t(l,t)\}dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l \{[\varphi(t)-\varphi(-t)+\hat{\psi}(t)+\hat{\psi}(-t)]\Phi_t(0,t)\}dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l [\varphi(x+t)-\varphi(x-t)+\hat{\psi}(x+t)+\hat{\psi}(x-t)]\Phi_{tx}(x,t)dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l \left\{\int_0^t [\hat{f}(x+t-\tau,\tau)+\hat{f}(x-t+\tau,\tau)]d\tau\right\}\Phi_{xt}(x,t)dxdt +$$

$$+\int_0^l\int_0^l \left[\int_0^t \hat{f}(x,\tau)d\tau\right]\Phi_{xt}(x,t)dxdt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^l \left\{\int_0^t [\hat{f}(x+t-\tau,\tau)+\hat{f}(x-t+\tau,\tau)]d\tau\right\}\Phi_{tx}(x,t)dxdt -$$

$$-\int_0^l\int_0^l f(x,t)\Phi(x,t)dxdt = -\int_0^l \hat{\psi}(x)\Phi_x(x,0)dx =$$

$$= \int_0^l \psi(x)\Phi(x,0)dx = \int_0^l v_t(x,0)\Phi(x,0)dx,$$

что доказывает справедливость (30).

Таким образом, нами показано, что функция (29) является обобщенным решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_l)$ смешанной задачи типа I. Поэтому разность

$[u(x,t)-v(x,t)]$ является решением из того же класса смешанной задачи I с начальными условиями при t=0, первое из которых тождественно равно нулю, а второе есть нулевой элемент класса $L_2[0,l]$. В силу выше рассмотренного частного случая для этой расности будут справедливы соотношения вида (27) и (28), т.е.

$$\hat{\psi}_1(0)+\varphi_1(0)-\hat{v}_t(0,l)-v(0,l)=0, \tag{31}$$

$$\hat{\psi}_1(l)-\varphi_1(l)-\hat{v}_t(l,l)+v(l,l)=0, \tag{32}$$

в которых символ $\hat{v}_t(x,t)$ обозначает первообразную функции $v_t(x,t)$ по x. Из равенства (29) вытекает, что

$$v(0,l)=\varphi(l)+\hat{\psi}(l); \quad v(l,l)=\varphi(0)-\hat{\psi}(0); \tag{33}$$

$$\hat{v}_t(0,l)=\int_0^l f(l-\tau,\tau)\,d\tau; \quad \hat{v}_t(l,l)=\int_0^l f(\tau,\tau)\,d\tau. \tag{34}$$

Легко видеть, что в силу (33) и (34) равенства (31) и (32) переходят в равенства (22) и (23). Необходимость условий (22) и (23) полностью доказана.

Доказательство достаточности. Принадлежность (27) классу $\widehat{W}_2^1(Q_l)$ вытекает из того, что она в каждой из областей $\Delta_i, i=\overline{1,4}$ представляет собой алгебраическую сумму функций от аргумента $x+t$ или $x-t$, имеющих суммируемую с квадратом обобщенную производную и, в силу условий (22) и (23), сохраняет свою непрерывность при переходе через общую границу любых двух из указанных областей.

Без труда проверяется, что для всех $x\in[0,l]$ справедливы равенства $u(x,0)=\varphi(x)$, $u(x,l)=\varphi_1(x)$ и в смысле совпадения элементов $L_2[0,l]$ справедливы равенства $u_t(x,0)=\psi(x)$, $u_t(x,l)=\psi_1(x)$.

Остается доказать справедливость тождества (7) для любой функции $\Phi(x,t)$ из определения 1. В силу соотношения (30) достаточно доказать для $u(x,t)$ равенство

$$\int_0^l\int_0^l [u_x(x,t)\Phi_x(x,t)-u_t(x,t)\Phi_t(x,t)-f(x,t)\Phi(x,t)]dxdt = \int_0^l \psi(x)\Phi(x,0)dx. \tag{35}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$U(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[-\varphi(x-t)+\hat{\psi}(x-t)+I(x,t)+I_1(x,t)\right] & \text{в } \Delta_1,\\ \frac{1}{2}\left[-\varphi_1(x-t+l)+\hat{\psi}_1(x-t+l)-\right. & \\ \left.-\int\limits_0^l \hat{f}(x-t+\tau,\tau)d\tau+I(x,t)+I_1(x,t)\right] & \text{в } \Delta_2,\\ \frac{1}{2}\left[\hat{\psi}(x-t)-\varphi(x-t)-\int\limits_0^l \hat{f}(x+t-\tau,\tau)d\tau+\right. & \\ \left.+I(x,t)+K_1(x,t)\right] & \text{в } \Delta_3,\\ \frac{1}{2}\left[-\varphi_1(x-t+l)+\hat{\psi}_1(x-t+l)-\right. & \\ \left.-K(x,t)+K_1(x,t)+I(x,t)\right] & \text{в } \Delta_4,\end{cases}$$

где

$$I(x,t)=\int\limits_0^t \hat{f}(x+t-\tau,\tau)d\tau+\int\limits_0^t \hat{f}(x-t+\tau,\tau)d\tau,$$

$$I_1(x,t)=\varphi(x+t)+\hat{\psi}(x+t),$$

$$K(x,t)=\int\limits_0^l \hat{f}(x+t-\tau,\tau)d\tau+\int\limits_0^l \hat{f}(x-t+\tau,\tau)d\tau,$$

$$K_1(x,t)=\varphi_1(x+t-l)+\hat{\psi}_1(x+t-l).$$

Так же, как для функции $u(x,t)$, доказывается, что $U(x,t)$ принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_l)$. Легко проверяется, что для почти всех точек прямоугольника Q_l справедливы равенства $U_x(x,t)=u_t(x,t)$, $U_t(x,t)-\hat{f}(x,t)=u_x(x,t)$. Используя эти соотношения и свойства функции $\Phi(x,t)$ из определения 1, получим:

$$\int\limits_0^l\int\limits_0^l [u_x(x,t)\Phi_x(x,t)-u_t(x,t)\Phi_t(x,t)-f(x,t)\Phi(x,t)]dxdt=$$

$$=\int\limits_0^l\left\{\int\limits_0^l U_t(x,t)\Phi_x(x,t)\,dt\right\}dx-\int\limits_0^l\left\{\int\limits_0^l \hat{f}(x,t)\Phi_x(x,t)\,dx\right\}dt-$$

$$-\int\limits_0^l\left\{\int\limits_0^l U_x(x,t)\Phi_t(x,t)\,dx\right\}dt-\int\limits_0^l\int\limits_0^l f(x,t)\Phi(x,t)dxdt=$$

$$=\int\limits_0^l U(x,l)\,\Phi_x(x,l)dx-\int\limits_0^l U(x,0)\,\Phi_x(x,0)dx-$$

$$-\int_0^l\int_0^l U(x,t)\Phi_{xt}(x,t)dxdt-\int_0^l U(l,t)\,\Phi_t(l,t)dt+$$

$$+\int_0^l U(0,t)\,\Phi_t(0,t)dt+\int_0^l\int_0^l U(x,t)\Phi_{tx}(x,t)dxdt-$$

$$-\int_0^l \hat{f}(l,t)\Phi(l,t)dt+\int_0^l \hat{f}(0,t)\Phi(0,t)dt+\int_0^l\int_0^l f(x,t)\Phi(x,t)dxdt-$$

$$-\int_0^l\int_0^l f(x,t)\Phi(x,t)dxdt=-\int_0^l U(x,0)\,\Phi_x(x,0)dx=$$

$$=\int_0^l u_t(x,0)\Phi(x,0)\,dx=\int_0^l \psi(x)\Phi(x,0)dx.$$

Равенство (35) установлено. Таким образом, утверждение 4 полностью доказано.

Теперь рассмотрим общий случай рассматриваемой задачи граничного управления. Без ограничения общности, в дальнейшем ради простаты и упрашения выкладок считаем, что $f(x,t)$ является нулевым элементом класса $L_2(Q_T)$.

Сначала приведем и докажем теорему о единственности.

Теорема 2.3. *Пусть коэффициент* $q(x,t)$ *в уравнении (1) принадлежит классу* $L_2(Q_T)$. *Тогда для любого* $T\in(0,l]$ *задача граничного управления III может иметь лишь одно решение из класса* $\hat{W}_2^1(Q_T)$.

Доказательство проведем лишь в случае $T=l$. Предположим, что задача III имеет два решения $u^{(1)}(x,t)$ и $u^{(2)}(x,t)$ из класса $\hat{W}_2^1(Q_T)$. Тогда их разность $u(x,t)=u^{(2)}(x,t)-u^{(1)}(x,t)$ является решением из того же класса задачи III с нулевыми начальными и финальными условиями. Положим $\mu(t)=u(0,t)$ и $\nu(t)=u(l,t)$. Из определения класса $\hat{W}_2^1(Q_l)$ следует, что $\mu(t),\nu(t)\in W_2^1[0,l]$ и $\mu(0)=\mu(l)=\nu(0)=\nu(l)=0$.

Тем самым, функция $u(x,t)$ является решением из класса $\hat{W}_2^1(Q_l)$ смешанных задач, рассмотренных в теореме 1 и замечании 2. В частности, $u(x,t)$ обращается в тождественный нуль в области

$$\Delta_0=\left\{(x,t)\,|\,0\le t\le l,\ \frac{l}{2}-\left|\frac{l}{2}-t\right|\le x\le\frac{l}{2}+\left|\frac{l}{2}-t\right|\right\}.$$

Пусть теперь t_1 и t_2 – две произвольные точки отрезка $[0,l]$. Характеристики $t-x=t_1$ и $t+x-l=t_2$, проходящие соответственно через точки $(0,t_1)$ и

(l, t_2), пересекают границу Δ_0 в точках $((l-t_1)/2, (l+t_1)/2)$ и $((l+t_2)/2, (l+t_2)/2)$, а в них $u(x,t) = 0$. Поэтому из соотношения (8) получим

$$\mu(t_1) = -\frac{1}{2} \iint\limits_{D_0'(t_1)} q(\xi,\tau) u_2(\xi,\tau) d\xi d\tau,$$

$$\nu(t_2) = -\frac{1}{2} \iint\limits_{D_0''(t_2)} q(\xi,\tau) u_2(\xi,\tau) d\xi d\tau, \tag{36}$$

где

$$D_0'(t_1) = \left\{(\xi,\tau) \,|\, \frac{t_1}{2} \le \tau \le \frac{l+t_1}{2},\ |\tau - t_1| \le \xi \le \frac{l}{2} - \left|\frac{l}{2} - \tau\right|\right\},$$

$$D_0''(t_2) = \left\{(\xi,\tau) \,|\, \frac{t_2}{2} \le \tau \le \frac{l+t_2}{2},\ \frac{l}{2} + \left|\tau - \frac{l}{2}\right| \le \xi \le l - |\tau - t_2|\right\}.$$

Рассмотрим теперь произвольную точку $(x,t) \in \Delta_2$. Из (8) имеем $u(x,t) = \mu(t-x) + \frac{1}{2}\iint_{D_0} q(\xi,\tau) u(\xi,\tau) d\xi d\tau$, откуда, учитывая первое равенство (36) с $t_1 = t - x$, придем к соотношению

$$u(x,t) = -\frac{1}{2} \iint\limits_{D_0'(t-x) \setminus D_0(x,t)} q(\xi,\tau) u(\xi,\tau) d\xi d\tau \equiv [N_0 u](x,t), \tag{37}$$

где $D_0'(t-x) \setminus D_0(x,t) = \left\{(\xi,\tau) \,|\, \frac{x+t}{2} \le \tau \le \frac{t-x+l}{2},\ x + |t-\tau| \le \xi \le \frac{l}{2} - \left|\frac{l}{2} - \tau\right|\right\}$.

Соотношение (37) является однородным интегральным уравнением типа Вольтерры второго рода, так как оператор N_0 его правой части ограниченно действует в $L_2(\Delta_2)$ и удовлетворяет оценкам

$$\left|[N_0^k \chi](x,t)\right| \le \left(\frac{\sqrt{l}\,\|q\|_{2,\Delta_2}}{2}\right)^k \frac{\sqrt{(t-x)^k}}{k!} \sup_{(x,t)\in\Delta_2} |\chi(x,t)|, \quad k \in N,$$

и следовательно, это уравнение имеет только тривиальное решение и в силу (36) $\mu(t_1) = 0$ для любого $t_1 \in [0, l]$.

Аналогично с помощью второго равенства (36) рассматривается произвольная точка $(x,t) \subset \Delta_3$ и доказывается, что $u(x,t) \equiv 0$ в Δ_3 и $\nu(t_2) = 0$ для любого $t_2 \in [0, l]$. Теорема 3 полностью доказана.

Отметим теперь одну особенность задачи граничного управления III при критическом значении $T = l$. Как было установлено в [1], функция

$$\overset{0}{u}(x,t)=\frac{1}{2}\begin{cases}\varphi(x+t)+\varphi(x-t)+\int\limits_{x-t}^{x+t}\psi(\xi)d\xi & в\ \Delta_1,\\ \varphi(0)+\varphi(x+t)+\int\limits_{0}^{x+t}\psi(\xi)d\xi+\varphi_1(x-t+l)-\varphi_1(l)+\int\limits_{x-t+l}^{l}\psi_1(\xi)d\xi & в\ \Delta_2,\\ \varphi(x-t)+\varphi(l)+\int\limits_{x-t}^{l}\psi(\xi)d\xi+\varphi_1(x+t-l)-\varphi_1(0)+\int\limits_{x+t-l}^{0}\psi_1(\xi)d\xi & в\ \Delta_3,\\ \varphi_1(x+t-l)+\varphi_1(x-t+l)-\int\limits_{x+t-l}^{x-t+l}\psi_1(\xi)d\xi & в\ \Delta_4\end{cases} \tag{38}$$

является единственным решением задачи граничного управления III для однородного волнового уравнения тогда и только тогда, когда определяемые через начальные и финальные условия константы A_0 и B_0 равны между собой:

$$A_0 \equiv \varphi(0)+\varphi(l)+\int_0^l\psi(\xi)d\xi = \varphi_1(0)+\varphi_1(l)-\int_0^l\psi_1(\xi)d\xi \equiv B_0. \tag{39}$$

Точно также из утверждения 4 следует, что функция

$$u(x,t)=\overset{0}{u}(x,t)+\frac{1}{2}\begin{cases}\int\limits_0^t\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}f(\xi,\tau)d\xi d\tau & в\quad \Delta_1;\\ \int\limits_0^t\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}f(\xi,\tau)d\xi d\tau-\int\limits_0^l\int\limits_{x-t+\tau}^{\tau}f(\xi,\tau)d\xi d\tau & в\quad \Delta_2;\\ \int\limits_0^t\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}f(\xi,\tau)d\xi d\tau-\int\limits_0^l\int\limits_{l-\tau}^{x+t-\tau}f(\xi,\tau)d\xi d\tau & в\quad \Delta_3;\\ \int\limits_t^l\int\limits_{x+t-\tau}^{x-t+\tau}f(\xi,\tau)d\xi d\tau & в\quad \Delta_4\end{cases} \tag{40}$$

является единственным решением задачи граничного управления III для уравнения вынужденных колебаний струны тогда и только тогда, когда

$$A_0-B_0+\int_0^l\int_\tau^{l-\tau}f(\xi,\tau)d\xi d\tau=0, \tag{41}$$

где A_0, B_0 – константы в левой и правой частях (39).

Получим в рассматриваемой нами задаче граничного управления III для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом условие, необходимое для существования ее решения из класса $\hat{W}_2^1(Q_T)$. Далее ради простаты выкладок положим $f(x,t)\equiv 0$.

Теорема 2.4. *Пусть* $T=l$. *Тогда для существования решения из класса* $\hat{W}_2^1(Q_T)$ *задачи граничного управления III необходимо выполнение следующих условий:*

1) $\varphi(x),\varphi_1(x)\in W_2^1[0,l],\ \ \psi(x),\psi_1(x)\in L_2[0,l]$,

2) начальные и финальные функции удовлетворяют соотношению

$$A_0 + \int_0^{l/2} \int_{l-\tau}^{\tau} q_A^*(\xi,\tau) A(\xi,\tau) d\xi d\tau = B_0 + \int_{l/2}^{l} \int_{l-\tau}^{\tau} q_B^*(\xi,\tau) B(\xi,\tau) d\xi d\tau, \tag{42}$$

где A_0, B_0 *– константы из равенства (39), величины* $A(\xi,\tau)$, $B(\xi,\tau)$ *вычисляются через начальные и финальные условия по формулам*

$$A(\xi,\tau) = \varphi(\xi+\tau) + \varphi(\xi-\tau) + \int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} \psi(\zeta) d\zeta, \tag{43}$$

$$B(\xi,\tau) = \varphi_1(\xi+\tau-l) + \varphi_1(\xi-\tau+l) - \int_{\xi+\tau-l}^{\xi-\tau+l} \psi_1(\zeta) d\zeta, \tag{44}$$

а ядра интегральных операторов $q_A^*(\xi,\tau)$ *и* $q_B^*(\xi,\tau)$ *связаны с коэффициентом* $q(\xi,\tau)$ *в (1) соотношениями*

$$\begin{cases} q_A^*(\xi,\tau) = q(\xi,\tau) \sum\limits_{k=0}^{\infty} q_A^{(k)}(l/2, l/2; \xi, \tau), \qquad q_A^{(0)}(x,t;\xi,\tau) \equiv 1/2; \\ q_A^{(k+1)}(x,t;\xi,\tau) = \dfrac{1}{2} \int\limits_{\tau}^{t} \int\limits_{\max(x-t+\tau_1, \xi+\tau-\tau_1)}^{\min(x+t-\tau_1, \xi-\tau+\tau_1)} q(\xi_1,\tau_1) q_A^{(k)}(\xi_1,\tau_1;\xi,\tau) d\xi_1 d\tau_1, \\ q_B^*(\xi,\tau) = q(\xi,\tau) \sum\limits_{k=0}^{\infty} q_B^{(k)}(l/2, l/2; \xi, \tau), \qquad q_B^{(0)}(x,t;\xi,\tau) \equiv 1/2; \\ q_B^{(k+1)}(x,t;\xi,\tau) = \dfrac{1}{2} \int\limits_{t}^{\tau} \int\limits_{\max(x+t-\tau_1, \xi-\tau+\tau_1)}^{\min(x-t+\tau_1, \xi+\tau-\tau_1)} q(\xi_1,\tau_1) q_B^{(k)}(\xi_1,\tau_1;\xi,\tau) d\xi_1 d\tau_1. \end{cases} \tag{45}$$

Доказательство. Пусть функция $u(x,t)$ – решение из класса $\hat{W}_2^1(Q_l)$ задачи граничного управления III. Тогда она является решением смешанной задачи I в треугольнике Δ_1 и решением смешанной задачи II в треугольнике Δ_4. Как это было уже сделано в доказательстве теоремы 1, составим интегральные соотношения, которым удовлетворяет в областях Δ_1 и Δ_4 функция $u(x,t)$.

Обозначая через $\overset{0}{u}_1(x,t)$ решение (38) смешанной задачи I для однородного волнового уравнения в Δ_1, из (40) получим соотношение

$$u(x,t) = \overset{0}{u}_1(x,t) + \frac{1}{2} \iint_{\Omega_1} q(\xi,\tau) u(\xi,\tau) d\xi d\tau, (x,t) \in \Delta_1, \tag{46}$$

где $\Omega_1 \equiv \Omega_1(x,t) = \{(\xi,\tau) \mid 0 \le \tau \le t, \quad x-t+\tau \le \xi \le x+t-\tau\} \subset \Delta_1.$

Аналогично, обозначая через $\overset{0}{u}_4(x,t)$ решение (38) смешанной задачи II для однородного волнового уравнения в Δ_4, имеем

$$u(x,t) = \overset{0}{u}_4(x,t) + \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_4} q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau, (x,t) \in \Delta_4, \qquad (47)$$

где $\Omega_4 \equiv \Omega_4(x,t) = \{(\xi,\tau) \mid t \le \tau \le l,\ x+t-\tau \le \xi \le x-t+\tau\} \subset \Delta_4.$

В силу того, что функция $u(x,t)$ как решение из класса $\hat{W}_2^1(Q_l)$ непрерывна в Q_l, значение $u(l/2, l/2),$ вычисленное с помощью соотношений (46) и (47), должно быть одним и тем же. Поэтому

$$A_0 + \iint\limits_{\Delta_1} q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau = B_0 + \iint\limits_{\Delta_4} q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau, \qquad (48)$$

поскольку $A_0 = 2\overset{0}{u}_1(l/2, l/2),\ B_0 = 2\overset{0}{u}_4(l/2, l/2)$ и $\Delta_1 = \Omega_1(l/2, l/2),$ $\Delta_4 = \Omega_4(l/2, l/2).$

Для придания равенству (48) окончательного вида (42), выразим $u(x,t)$ через $\overset{0}{u}_1(x,t)$ из (46) и через $\overset{0}{u}_4(x,t)$ из (47) с помощью соответствующих рядов Неймана. Положим:

$$[G_j u](x,t) = (1/2)\iint_{\Omega_j} q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad j = 1,4.$$

Тогда получим для $(x,t) \in \Delta_1$

$$u(x,t) = \overset{0}{u}_1(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty}[G_1^k \overset{0}{u}_1](x,t) \qquad (49)$$

и для $(x,t) \in \Delta_4$

$$u(x,t) = \overset{0}{u}_4(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty}[G_4^k \overset{0}{u}_4](x,t). \qquad (50)$$

Ряды в правых частях (49) и (50) сходятся абсолютно, так как операторы G_1 и G_4 удовлетворяют оценкам

$$\left|[G_1^k \chi](x,t)\right| \le \left(\frac{\|q\|_{2,\Delta_1}}{2}\right)^k \frac{t^k}{k!} \sup_{(x,t)\in\Delta_1} |\chi(x,t)|, \qquad (51)$$

$$\left|[G_4^k \chi](x,t)\right| \le \left(\frac{\sqrt{l}}{2}\|q\|_{2,\Delta_4}\right)^k \sqrt{\frac{(l-t)^k}{k!}} \sup_{(x,t)\in\Delta_4} |\chi(x,t)|. \qquad (52)$$

Подставляя (49) и (50) в (48), меняя соответствующим образом порядок интегрирования и учитывая, что $A(x,t) = 2\overset{0}{u}_1(x,t),\ B(x,t) = 2\overset{0}{u}_4(x,t),$ получим соотношения (42)-(45). Теорема 4 полностью доказана.

Докажем, что полученное в теореме 4 необходимое условие (42) является и достаточным для существования решения задачи граничного управления III.

Теорема 5. *Пусть $T = l$ и выполнено условие 1 теоремы 4. Тогда соотношение (42) является и достаточным для существования*

(единственного!) решения из класса $\hat{W}_2^1(Q_l)$ *задачи граничного управления III.*

Доказательство. Определим функцию $u(x,t)$ в треугольнике Δ_1 как решение интегрального уравнения (46), а в треугольнике Δ_4 – как решение интегрального уравнения (47). Эти уравнения в силу оценок (51) и (52) имеют ограниченные решения, задаваемые рядами (49) и (50). Тот факт, что эти решения непрерывны в Δ_1 и Δ_4, вытекает из непрерывности правых частей уравнений (46) и (47).

Если выполнено условие (42), то как показано в доказательстве теоремы 4, справедливо равенство (48), и следовательно, функция $u(x,t)$ непрерывна в объединении треугольников Δ_1 и Δ_4. Обозначим через $u_1(x,t)$ и $u_4(x,t)$ построенные таким образом решения $u(x,t)$ в Δ_1 и Δ_4 соответственно.

При $(x,t) \in \Delta_2$ рассмотрим соотношение

$$u(x,t) = \overset{0}{u}_2(x,t) + \frac{1}{2}\left[\iint\limits_{\Omega_2'} - \iint\limits_{\Omega_2''} - \iint\limits_{\Omega_2}\right] q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{53}$$

в котором $\overset{0}{u}_2(x,t)$ – решение задачи граничного управления III для однородного волнового уравнения, определяемое равенством (38) в треугольнике Δ_2, а области интегрирования заданы неравенствами

$$\Omega_2' \equiv \Omega_2'(x,t) = \left\{(\xi,\tau) \mid 0 \le \tau \le \frac{x+t}{2},\ \tau \le \xi \le x+t-\tau\right\},$$

$$\Omega_2'' \equiv \Omega_2''(x,t) = \left\{(\xi,\tau) \mid \frac{l}{2} \le \tau \le l,\ \frac{x-t+l}{2} + \left|\tau - \frac{t-x+l}{2}\right| \le \xi \le \tau\right\},$$

$$\Omega_2 \equiv \Omega_2(x,t) = \left\{(\xi,\tau) \mid \frac{x+t}{2} \le \tau \le \frac{l-x+t}{2},\ x+|\tau - t| \le \xi \le \frac{l}{2} - \left|\tau - \frac{l}{2}\right|\right\}.$$

Так как $\Omega_2' \subset \Delta_1$, $\Omega_2'' \subset \Delta_4$, то первое и второе интегральные слагаемые правой части (53) уже известны и потому соотношение (53) является интегральным уравнением для нахождения функции $u(x,t)$ в области Δ_2 вида

$$u(x,t) = F_2(x,t) - [G_2 u](x,t), \tag{54}$$

где $[G_2\chi](x,t) = (1/2)\iint_{\Omega_2} q(\xi,\tau)\chi(\xi,\tau)d\xi d\tau$, а функция $F_2(x,t)$ известна. Оператор G_2 ограниченно действует в $L_2(\Delta_2)$ и удовлетворяет оценкам

$$\left|[G_2^k\chi](x,t)\right| \le \left(\frac{\sqrt{l}\,\|q\|_{2,\Delta_2}}{2}\right)^k \sqrt{\frac{(t-x)^k}{k!}} \sup_{(x,t)\in\Delta_2} |\chi(x,t)|,\ k \in N. \tag{55}$$

Из этих оценок вытекает, что уравнение (54) имеет ограниченное в Δ_2 решение. Обозначим его через $u_2(x,t)$. Из соотношения (53) следует, что функция $u_2(x,t)$ непрерывна в Δ_2.

На границе Δ_1 и Δ_2, т.е. при $x = t,\ 0 \le t \le \frac{l}{2},$ соотношение (53) переходит в равенство

$$u_2(t,t) = \overset{0}{u}_2(t,t) + \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_2'(t,t)} q(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (56)$$

Так как $\overset{0}{u}_2(t,t) = \overset{0}{u}_1(t,t)$ и $\Omega_2'(t,t) = \Omega_1(t,t),$ то из равенств (46) и (56) следует, что $u_2(t,t) = u_1(t,t).$

На границе Δ_2 и Δ_4, т.е. при $x = l - t,\ \frac{l}{2} \le t \le l,$ соотношение (53) переходит в равенство

$$u_2(l-t,t) = \overset{0}{u}_2(l-t,t) + \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta_1} q(\xi,\tau)u_1(\xi,\tau)d\xi d\tau - \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega_2''(l-t,t)} q(\xi,\tau)u_4(\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (57)$$

Так как $\overset{0}{u}_2(l-t,t) = \overset{0}{u}_4(l-t,t) + A_0 - B_0$ и $\Omega_2''(l-t,t) = \Delta_4 \setminus \Omega_4(l-t,t),$ то в силу равенства (48), эквивалентного условию (42), получим: $u_2(l-t,t) = u_4(l-t,t).$ Аналогично при $(x,t) \in \Delta_3$ рассмотрим соотношение

$$u(x,t) = \overset{0}{u}_3(x,t) + \frac{1}{2}\left[\iint\limits_{\Omega_3'} - \iint\limits_{\Omega_3''} - \iint\limits_{\Omega_3}\right] q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau, \qquad (58)$$

в котором $\overset{0}{u}_3(x,t)$ – решение задачи граничного управления III для однородного волнового уравнения в треугольнике Δ_3 (см. (38)), а области интегрирования заданы следующими неравенствами:

$$\Omega_3' \equiv \Omega_3'(x,t) = \left\{(\xi,\tau) \mid 0 \le \tau \le \frac{l-x+t}{2},\ \ x-t+\tau \le \xi \le l-\tau\right\},$$

$$\Omega_3'' \equiv \Omega_3''(x,t) = \left\{(\xi,\tau) \mid \frac{l}{2} \le \tau \le l,\ l-\tau \le \xi \le \frac{x+t}{2} - \left|\tau - \frac{x+t}{2}\right|\right\},$$

$$\Omega_3 \equiv \Omega_3(x,t) = \left\{(\xi,\tau) \mid \frac{l-x+t}{2} \le \tau \le \frac{x+t}{2},\ \frac{l}{2} + \left|\tau - \frac{l}{2}\right| \le \xi \le x - |\,t-\tau\,|\right\}.$$

Так как $\Omega_3' \subset \Delta_1,\ \Omega_3'' \subset \Delta_4,$ то первое и второе интегральные слагаемые правой части (58) уже известны, и следовательно, соотношение (58) является интегральным уравнением вида

$$u(x,t) = F_3(x,t) - [G_3 u](x,t) \qquad (59)$$

для нахождения его решения $u(x,t)$ в области Δ_3. Здесь $[G_3\chi](x,t) = (1/2)\iint_{\Omega_3} q(\xi,\tau)\chi(\xi,\tau)d\xi d\tau.$ Оператор G_3 ограниченно действует в $L_2(\Delta_3)$ и, так как для него справедливы оценки

$$\left|[G_3^k\chi](x,t)\right| \le \left(\frac{\sqrt{l}\,\|q\|_{2,\Delta_3}}{2}\right)^k \sqrt{\frac{(x+t-l)^k}{k!}} \sup_{(x,t)\in\Delta_3} |\,\chi(x,t)\,|, \quad k \in N, \qquad (60)$$

то уравнение (59) имеет ограниченное и непрерывное в Δ_3 решение $u(x,t) = u_3(x,t)$. Аналогично (56) и (57) можно установить, что на границе треугольников Δ_3 и Δ_1 : $u_3(l-t,t) = u_1(l-t,t)$ и в силу (2.44) на границе Δ_3 и Δ_4 : $u_3(t,t) = u_4(t,t)$.

Таким образом, решения интегральных уравнений (46), (47), (53) и (58) определяют непрерывную в Q_l функцию $u(x,t)$, для которой $u(x,t) = u_j(x,t)$ при $(x,t) \in \Delta_j$, $j = \overline{1,4}$.

Дифференцируя обе части этих интегральных уравнений по x и по t, нетрудно показать, что функция $u(x,t)$ принадлежит классу $\hat{W}_2^1(Q_l)$. Кроме того, из утверждения 4 следует, что $u(x,t)$ является решением из этого класса задачи граничного управления III для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом. Теорема 5 полностью доказана.

Замечание 4. Из оценок (51), (52), (55), (60) и формул, задающих решения $u_j(x,t)$ соответствующих интегральных уравнений в виде рядов Неймана (см., например, равенства (49), (50) при $j = 1$ и $j = 4$), вытекает априорная оценка решения задачи граничного управления III

$$\|u(x,t)\|_{W_2^1(Q_l)} \le M'\left(\|\varphi\|_{W_2^1[0,l]} + \|\varphi_1\|_{W_2^1[0,l]} + \|\psi\|_{L_2[0,l]} + \|\psi_1\|_{L_2[0,l]} \right),$$

которая свидетельствует об устойчивости полученного решения относительно начальных и финальных условий.

Замечание 5. Если выполнено условие (42), то функция $\overset{0}{u}(x,t)$, задаваемая равенством (38), уже, вообще говоря, не является решением из класса $\hat{W}_2^1(Q_l)$ задачи граничного управления III для однородного волнового уравнения. Определим константу $M_0 = M_0(q)$ равенством

$$M_0 = -\frac{1}{2}\int_0^{l/2l-\tau}\int_\tau q_A^*(\xi,\tau)A(\xi,\tau)d\xi d\tau + \frac{1}{2}\int_{l/2l-\tau}^{l}\int_\tau^\tau q_B^*(\xi,\tau)B(\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (61)$$

Добавляя в выражение, определяющее функцию $\overset{0}{u}(x,t)$ в области Δ_4, константу M_0, получим новую функцию $\overset{0}{u}_*(x,t)$, которая уже является обобщенным решением рассматриваемой задачи для однородного волнового уравнения, но с модифицированным первым финальным условием $\overset{0}{u}_*(x,l) = \varphi_1(x) + M_0$.

Пользуясь соотношениями (42)-(45), нетрудно показать, что при $\|q\|_2 \to 0$ константа M_0, определяемая (61), стремится к нулю и функция $\overset{0}{u}_*(x,t)$ переходит в $\overset{0}{u}(x,t)$.

Кроме того, из оценок (51), (52), (55) и (60) и интегральных представлений для первых частных производных решения $u(x,t)$ следует, что если

$\|q\|_2 \to 0$, то $\left\|u - \overset{0}{u}\right\|_{W_2^1(Q_l)} \to 0$ и, соответственно, $\left\|\mu - \overset{0}{\mu}\right\|_{W_2^1[0,l]} \to 0$, $\left\|\nu - \overset{0}{\nu}\right\|_{W_2^1[0,l]} \to 0$, где $\overset{0}{\mu}(t) = \overset{0}{u}(0,t)$, $\overset{0}{\nu}(t) = \overset{0}{u}(l,t)$.

Это свидетельствует о регулярности решения задачи граничного управления III по отношению к аддитивному возмущению $q(x,t)u(x,t)$ волнового оператора в (1) с сумируемым коэффициентом $q(x,t)$.

Настоящая работа примыкает к ранее опубликованным нами работам [11-14]. Следует отметить, что теории задач граничного управления посвящено значительное число работ, обзор по данной тематике можно найти в монографии [15].

Литература

1. Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщённого решения волнового уравнения с конечной энергией [Текст] / В.А. Ильин // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36. – №11. – С. 1513-1528.
2. Ильин В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений [Текст] / В.А. Ильин // Успехи матем. наук. – 1960. – Т.15. – №2(92). – С. 97-154.
3. Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний струны на двух концах при условии существования конечной энергией [Текст] / В.А. Ильин // Доклады Академии наук России. – 2001. – Т. 376. – №3. – С. 295-299.
4. Абдукаримов М.Ф. Об устойчивости решения одной смешанной задачи для телеграфного уравнения [Текст] / М.Ф. Абдукаримов // Вестник ТНУ, серия естественных наук. – 2017. – № 1/5. – С. 116-122.
5. Крицков Л.В. О задачах граничного управления для уравнения Клейна-Гордона-Фока с суммируемым коэффициентом [Текст] / Л.В. Крицков // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51. – №5. – С. 688-701.
6. Лионс Ж.Л. Управление сингулярными распределёнными системами [Текст] / Ж.Л. Лионс. – М.: Наука, 1987.
7. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики [Текст] / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973.
8. Абдукаримов М.Ф. Задача граничного управления для одномерного уравнения Клейна-Гордона-Фока с переменным коэффициентом. Случай управления смещениями на двух концах [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, Л.В. Крицков // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49. – № 8. – С. 1036-1046.
9. Крицков Л.В. Граничное управление смещением на одном конце при свободном втором для процесса, описываемого телеграфным уравнением с переменным коэффициентом [Текст] / Л.В. Крицков, М.Ф. Абдукаримов // Доклады Академии наук. – 2013. – Т. 450. – № 6. – С. 640-643.

10. Абдукаримов М.Ф. Задача граничного управления для одномерного уравнения Клейна-Гордона Фока с переменным коэффициентом. Случай управления смещением на одном конце при закрепленном втором [Текст] / М.Ф. Абдукаримов, Л.В. Крицков // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49. – №6. – С. 759–771.
11. Абдукаримов М.Ф. О граничном управлении упругой силой на одном конце при закрепленном втором процесса вынужденных колебаний струны [Текст] / М.Ф. Абдукаримов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2015. – Т.58. – №10. – С. 894-900.
12. Абдукаримов М.Ф. Об устойчивости решения одной смешанной задачи для телеграфного уравнения [Текст] / М.Ф. Абдукаримов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2017. – №1/5. – С. 116-122.
13. Абдукаримов М.Ф. Устойчивость решения одной комбинированной смешанной задачи для уравнения Клейна-Гордона-Фока с переменным коэффициентом [Текст] / М.Ф. Абдукаримов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2021. – №2. – С.3-10.
14. Абдукаримов М.Ф. Задача граничного управления упругой силой на одном конце при закрепленном втором для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом [Текст] / М.Ф. Абдукаримов // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56. – №2. – С. 226-242.
15. Абдукаримов М.Ф. Некоторые задачи граничного управления для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом [Текст] / М.Ф. Абдукаримов. – Душанбе: Эр-Граф, 2018.

ИДОРАКУНИИ САРҲАДИИ РАВАНДИ БО МУОДИЛАИ ТЕЛЕГРАФИИ КОЭФФИТСИЕНТИ ТАҒЙИРЁБАНДАДОР ИФОДАШАВАНДА БО ЁРИИ ФУНКСИЯҲОИ ҶОЙИВАЗКУНАНДАИ ОХИРҲОИ ПОРЧА

Абдукаримов М.Ф.
Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар шаҳри Душанбе

Аннотатсия. *Дар ин мақола бо маънои ҳалли умумишудаи муодилаи якченакаи телеграфӣ бо коэффитсиенти тағйирёбанда масъалаи идоракунии сарҳадии раванде, ки бо ин муодила ифода мешавад, бо ёрии функсияҳои ҷойивазкунандаи охирҳои порча муоина мегардад. Ҳалшавандагии масъалаи идоракунии сарҳадии муоинашаванда дар вақтҳои хурд ва баробари критикӣ исбот карда мешавад. Инчунин, ҳалшавандагии масъалаҳои омехтаи мувофиқ тадқиқ шудааст.*

Калидвожаҳо: *масъалаи омехта, идоракунии сарҳадӣ, муодилаи телеграфӣ, устуворӣ.*

BOUNDARY CONTROL OF THE PROCESS DESCRIBED BY A TELEGRAPHIC EQUATION WITH A VARIABLE COEFFICIENT, PRODUCED BY OFFSETS AT TWO ENDS

M.F. Abdukarimov
Lomonosov Moscow State University in Dushanbe

Annotation. *In this paper, in terms of a generalized solution of a one-dimensional telegraph equation with a variable coefficient, we consider the problem of boundary control of the process described by this equation, produced by displacements at two ends. The solvability of the considered boundary control problem for a time less than or equal to the critical time is proved. The solvability of the corresponding mixed problem is also investigated.*
Keywords: *mixed problem, boundary control, telegraph equation, stability.*

***Сведения об авторе*.** **Абдукаримов Махмадсалим Файзуллоевич –** к.ф.-м. н., доцент, доцент кафедры фундаментальных и естественных наук филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе. Телефон: (+992) 919 96 24 44. E-mail: mahmadsalim_86@mail.ru

УДК 532.517.4

АНАЛИЗ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНОГО ВОДНОГО ПОТОКА

Гольдина В.Д.
Институт математики имени А. Джураева НАН Таджикистана

Аннотация. *Проведен анализ расчётов некоторых энергетических характеристик турбулентных водных потоков с учетом влияния на них параметров течения.*
Ключевые слова: *турбулентность, диссипация энергии, число Рейнольдса, число Фруда, тензор скоростей деформации.*

Структура, скоростные и энергетические характеристики водных потоков влияют на процессы переноса примесей, наносов, при этом гашение энергии в бьефах гидросооружений, уменьшение сопротивлений зависят, прежде всего, от диссипации энергии, создаваемой свойственными турбулентному движению мелкими вихрями с большими градиентами скоростей, Главный критерий турбулентности – число Рейнольдса $Re = \frac{\rho U l}{\mu} = \frac{U l}{\nu}$; $U, l,\ \rho, \mu, \nu = \frac{\mu}{\rho}$ с выбором характерных для потока скорости, размера, плотности, динамического и кинематического коэффициентов вязкости. Критерий Re представляет также отношение диссипации турбулентного потока к фиктивной диссипации при ламинарном (вязком) течении с той же скоростью. Процесс диссипации механической энергии

вязкой жидкостью необратим: энергия распространяется во всей области течения. Критерий - число Фруда $Fr = \frac{U^2}{gl}$; ($g -$ ускорение свободного падения), характеризует отношение кинетической энергии к потенциальной, бурность потока. Действие этих критериев нельзя учесть одновременно, поэтому применяют приближенное моделирование, а также другие безразмерные комплексы [1, с. 11-12, с.222; 2, с.82-83].

Удельная диссипация энергии вязкой жидкости определяется скалярным произведением тензора напряжений P на тензор скоростей деформаций S:

$$N_{dis} = 2\mu\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right),$$

где x, y, z – продольная, вертикальная и поперечная координаты, u, v, w – соответствующие компоненты вектора скорости течения [3, с.411, с.484-485].

Далее рассматривается равномерное движение в продольном направлении ($\frac{\partial}{\partial x} = 0$), для которого выражение N_{dis} и другие упрощаются. В практических приложениях изучаются характеристики течений в поперечных сечениях каналов, рек - отдельных условных вертикальных плоскостях по длине изучаемого объекта, в таких сечениях обычно также выбирается ряд отдельных вертикалей. Тогда двумерная задача представляет совокупность одномерных уравнений, включающих только y - вертикальную координату.

При турбулентном течении скорости представляют суммой осредненных и пульсационных составляющих: $u = \bar{u} + u', v = \bar{v} + v', w = \bar{w} + w'$. Осредненные произведения (корреляции) пульсационных скоростей ($\overline{u'v'}$, $\overline{u'w'}$ ...) входят в турбулентные касательные напряжения, а сумма диагональных членов тензора корреляций - в удельную энергию пульсаций $e = 0.5\left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}\right)$. Полный вид тензора напряжений включает плотность жидкости (газа) и вектор пульсационных скоростей $\rho\overline{\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V}'}$, что означает перенос пульсационного количества движения $\rho\bar{\boldsymbol{V}}'$таким же вектором пульсаций $\bar{\boldsymbol{V}}'$ [3, с.640].

Турбулентные напряжения τ сначала исследовались только для потоков $\bar{u}$(y), (далее u (y)). Теодор Карман в 1930 году из соображений учета размерности получил формулу касательных напряжений в виде

$$\tau = \kappa^2 \rho {u_y}^4 {u_{yy}}^{-2};\ u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y}, u_{yy} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};\ \kappa \approx 0.4\,, \qquad (1)$$

где к - “постоянная Кармана”. Людвиг Прандтль в 1936 году впервые использовал в формуле для турбулентной вязкости $\mu_t = \rho l(y)^2 u_y$ понятие “пути смешения” l (y) как среднего размера при переносе жидких масс, создающих напряжение $\tau = \rho l(y)^2$. По аналогии предполагается, что путь смешения Кармана $l(y) = \kappa u_y{}^2 u_{yy}{}^{-1}$также выбирался как некоторый характерный размер турбулентных течений. Введенный позднее масштаб турбулентности L (y, y_0), (y_0 - высота шероховатости, отнесенная к глубине h), также определялся как величина, пропорциональная l (y) . Для шероховатого и гладкого дна была проверена формула L (y, y_0) Г.Ш. Игнатовой, В.И. Квона

$$L(y, y_0) = 0.37 - 0.24(1 - y - y_0)^2 - 0.13(1 - y - y_0)^4 \ , \qquad (2)$$

из которой следует увеличение L (y, y_0) с ростом шероховатости: $L(y, y_0) \uparrow\uparrow y_0$.

Для гладкого дна (y_0=0) проверялись граничные условия прилипания и скольжения. Масштаб турбулентности входит также в модель турбулентной вязкости А.Н. Колмогорова с эмпирической константой α_v: $v_t(e, L) = \alpha_v \sqrt{e}\, L(y, y_0)$. Перечисленные модели не потеряли своей актуальности при их включении в более сложные системы, например, при дополнении их уравнениями для турбулентной энергии e, диссипации пульсационной энергии ε. Такие уравнения имеют большое число эмпирических констант, для проверки которых необходима экспериментальная база. Метод Кармана нашел теоретическое развитие в модели генерации турбулентности В.А. Шваба: была обнаружена зона между вязким подслоем и развитой турбулентностью, где коэффициент Кармана является переменной величиной, зависящей от баланса вязкого и турбулентного напряжений. Это позволило уточнить расчёты продольной скорости в очень важной для оценок сопротивлений, затрат энергии в пристеночной области не только водного потока, но и в пограничном слое объектов аэромеханики. Система “е-ε“ рассчитывалась конечно-разностной схемой с итерациями по нелинейным членам, удалось получить согласование результатов [3, с.411, с.484-487, 640-644; 4,5,6].

В потоке над шероховатым дном исследовалась модель, включающая уравнения для турбулентных напряжений и уравнение баланса диссипации энергии с генерацией и диффузией. В натурных условиях эффективной оказалась модель придонного слоя с характерными параметрами: динамической скоростью, высотой слоя, турбулентной вязкостью на границе слоя, составляющими “число Рейнольдса придонного слоя“:

$$u_* = (gih)^{0.5},\ \delta,\ \varepsilon_0 = \nu_t(y=\delta) \rightarrow Re_{*\delta} = \frac{u_*\,\delta}{\varepsilon_0} \quad . \qquad (2)$$

Граница придонного слоя определяется экспериментально по достижению на ней максимума пульсационной энергии. Расчеты показали, что при этом условии поток разделяется на две области таким образом, что в зоне под этой границей, как и в зоне над ней, суммарная диссипация уравновешивалась суммарной генерацией энергии; распределения скоростей и энергии оставались непрерывными функциями. Суммарные характеристики не совпадали для двух этих областей, тем не менее, наличие такого локального равновесия позволяет ожидать устойчивости потока и его русла. Важным фактором, усиливающим процессы диссипации вблизи смоченного периметра каналов и русел, является шероховатость. Результаты подробных измерений вязких и турбулентных напряжений, других характеристик вблизи шероховатого дна были представлены в книге Г.В. Васильченко. Диссипация энергии растет также и во время паводков, что подтвердилось полученными аналитическими решениями и натурными данными. Расчет в трехмерной постановке позволяет надеяться на новые подходы к задаче о достижении минимума диссипации энергии [2,7- 9].

Необратимость процесса диссипации механической энергии вязкой жидкостью объясняется распространением ее по всей области течения. Принцип минимума диссипации впервые был сформулирован в 1868 году Гельмгольцем для частного случая течения вязкой жидкости. Распространение энергии водного или воздушного потока (дисперсия) происходит путем переноса такой энергии конвекцией или внутримолекулярным переносом – диффузией. Можно предположить, что равномерность распределения в потоке суммарной диссипации ($N_{dis}(\bar{u}, \bar{v}, \overline{w}) + \varepsilon$), характеризует устойчивость потока не в меньшей мере, чем общий уровень диссипации в его поперечном сечении. Признаки проявления принципа минимума диссипации приведены в работах [2, 3, С.430, 484-487, 8- 9].

Общая схема выделения характерных зон турбулентных течений может быть получена из анализа разности между генерацией и диссипацией турбулентной энергии e: Ф(η)=Gen-Dis. Для обобщения расчетов принимается безразмерный вид характеристик течения: турбулентная вязкости ν_t обычно оценивается через молекулярную вязкость ν, турбулентная энергия – через квадрат динамической скорости $e \sim u_*^2, u_* = (gih)^{0.5}$; i – уклон дна. В вязком подслое ν_t <<1, происходит только диссипация энергии. Выше имеется буферная зона, генерация энергии в

которой обеспечивает вязкий подслой, при этом турбулентная вязкость соизмерима с молекулярной вязкостью: $\nu_t \sim 1$. Выше находится "внешняя зона генерации", в которой $\nu_t >> 1$; над ней - граница турбулентной зоны, где $\nu_t \approx$const, и преобладают процессы диссипации и диффузии энергии**.** Ниже этой границы характерной скоростью обычно считают динамическую скорость. Удельная энергия пульсаций водного потока зависит от соотношения членов, определяющих ее диффузию, генерацию и диссипацию; почти всегда она выражается через квадрат динамической скорости [10].

Для открытого потока система уравнений движения и энергии над гладким и шероховатым дном рассматривалась в безразмерном виде

$$\begin{cases} \frac{d}{dy}((1+\nu_t)\,\frac{du}{dy}) \;\; = \; -\frac{i\,Re}{Fr} \equiv \mathrm{A};\; \nu_t(e,L) = \sqrt{e}\,L(y,y_0) \\ \frac{d}{dy}((1+k_d\nu_t)\frac{de}{dy}) + Re\cdot\,\alpha\,e\frac{du}{dy} - \frac{e}{L^2}(c_1+c_2\,\nu_t) = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

(α , α_v , k_d , c_1, c_2 – эмпирические константы), с условиями для гладкого дна y=0: u=0; e=0, на свободной поверхности y=1: $\frac{du}{dy} = \frac{de}{dy} = 0$ [5,11].

Интегрирование уравнения движения системы (3) дает $\frac{du}{dy} = A\frac{(1-y)}{(1+\nu_t)} \;\rightarrow$ $\tau(y) = (1+\nu_t)\,\frac{du}{dy} \;= A(1-y)$ известный линейный вид полного напряжения $\tau(y=0) = \tau_{max},\;\; u(y) = \; A\int_0^y \frac{(1-y)}{(1+\nu_t)}dy.$ Введение безразмерного комплекса позволяет изучить влияние на решения двух критериев поочередно, а также их разных сочетаний, например, $\frac{i\,Re}{Fr} = \frac{gih\,Re}{U^2} = \frac{{u_*}^2 Re}{U^2}$ включает коэффициент сопротивления. Сложность исследования системы (3) заключается в разных видах дифференциальных уравнений в зависимости от моделей турбулентной вязкости, значительно меняющейся от дна к свободной поверхности.

Вблизи дна $\nu t << 1$, и в (3) преобладает диссипация турбулентной энергии: $Re\cdot\,\alpha\,e\frac{du}{dy} << \frac{c_1}{L^2}e; c_1 = 3.93$; из экспериментов $L = ky$; ($k\epsilon$ 0.4 − 1.0).

Уравнение $\frac{d^2e}{dy^2} - \frac{c_1}{k^2}\;\frac{e}{y^2} = 0$ с регулярной особой точкой y=0 имеет решение

$$e = a_0 y^s\,, \quad \mathrm{s}=0.5\,((4\frac{c_1}{k}+1)^{0.5}+1)\,, \qquad (4)$$

при этом s изменяется от 2.5 до 3.6, что также соответствует экспериментам.

В придонном слое с преобладанием диссипации профиль скорости имеет линейный вид $\frac{u}{u_*} = \frac{yu_*}{\nu}$. Расчеты показали, что энергия e, а также ее

интенсивность ($\frac{e^{0.5}}{\bar{u}}$) в придонном слое убывают с ростом Re и возрастают с увеличением числа Фруда Fr, с ростом y0 эти характеристики убывают, подтверждая увеличение диссипации турбулентной энергии.

С учетом генерации в буферной зоне имеем уравнение энергии

$$e'' + \alpha ReA\, e(1-y) - \frac{c_1}{k^2}\,\frac{e}{y^2} = 0 \qquad (5)$$

отыскивая решения вида $e = \sum_{i=0}^{\infty} a_i y^{s+i}$, получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов a_i(i = 0, 1,2,…):

$$a_1 = 0, \qquad ((s+1)(s+2) - c1/k\,2)\, a_2 + \alpha \,\mathrm{Re}\, A\; a_0 = 0,$$

$$((s+i+3)(s+i+2) - c1/k2)\, a_{i+3} + \alpha \,\mathrm{Re}\, A\,(a_{i+1} - a_i\;) = 0, \qquad (6)$$

e = a_0 y s (1− α Re A /((4c1/k^2 +1)0.5 +2) y 2 +…

Из решений следует убывание энергии с ростом числа Рейнольдса e ↓↑ Re , рост с числом Фруда e ↑↑ Fr, аналогично меняется интенсивность турбулентности $\frac{e^{0.5}}{u}$. При νt >>1 генерация уравновешивается диссипацией, при этом $\frac{du}{dy} \downarrow \uparrow Fr$ и не зависит от числа Рейнольдса.

Аналогичным образом исследовались в открытом потоке влияние шероховатости и стратификации течения через число Ричардсона.

Из формулы масштаба турбулентности для открытого потока

$$L(y, y_0) = 0.37 - 0.24(1 - y - y_0)^2 - 0.13(1 - y - y_0)^4 \qquad (7)$$

следует увеличение масштаба с ростом относительной шероховатости: $L \uparrow \uparrow y_0$.

При νt<<1 решение уравнения $e'' + \alpha ReA\, e(1-y) - \frac{c_1}{L^2} e = 0$, с приближениями L=y0 и L=y + y0 имеет вид e ~ (1 +0.5(c1/ y02 − α Re A) y 2 +…), получаем убывание энергии с ростом шероховатости, т.е. косвенное подтверждение диссипации; e, $\frac{\sqrt{e}}{\boldsymbol{u}}$ также с ростом y0 убывают. Так как турбулентная энергия не может иметь отрицательные значения, из условия e >0 можно определить размер буферной зоны между вязким подслоем и развитой турбулентностью: $y^+ = \frac{y\, u_*}{\nu}$ ϵ (9; 40) с учетом диапазона коэффициентов c1и α. Подробные выкладки приведены в статье. С ростом y_0 распределение интенсивности турбулентной энергии $\frac{\sqrt{e}}{\boldsymbol{u}}$ выравнивается за счет сглаживания в придонной области и роста над ней. Диссипация $\varepsilon \uparrow\uparrow y_0$ в области y (0.1-0.4) , выше этой области не зависит от шероховатости. Расчет суммарной диссипации ε_Σ в придонном слое $\int_0^{\delta/h} \varepsilon_\Sigma\, h / (u_*)^3 \,\mathrm{d}\,(y/h)$ (I_1) и над ним $\int_{\delta/h} \varepsilon_\Sigma$ …(I_2) как по аналитическим формулам, так и по

численным расчетам, показывают убывание этих величин и относительное сближение с ростом y_0. Такие примеры можно дополнить исследованиями зависимостей характеристик открытого потока в областях различных соотношений между генерацией и диссипации. Например, для учета мутности, (концентрации наносов) используется безразмерная величина – число Ричардсона отношение затрат турбулентной энергии на взвешивание частиц к генерации энергии из осредненного движения с учетом $\bar{\rho}$ - плотности смеси воды с наносами, ρ – плотности воды, σ_c- числа Шмидта, (отношение коэффициента вязкости к коэффициенту диффузии). Тогда в системе (3) появится только один дополнительный член в уравнении для баланса энергии $\alpha Re \cdot e\left(\frac{du}{dy}\right)(1 - Ri)$, но данные для практического применения весьма малочисленны.

Остается актуальным и вопрос нахождения минимума функционала, связанного с выбором модели турбулентности. Пусть u (y, z) - продольная скорость потока в поперечном сечении. Обобщая модель Л. Прандтля, имеем

$$\rho v_{ty} = \rho l_y(y,z)^2 u_y;\ \ \rho v_{tz} = \rho l_z(y,z)^2 u_z\ ;\ u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y};\ u_z \equiv \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad (4)$$

получаем экстремум функционала

$\iint_S F(y,z,u,u_y,u_z)ds = \iint_S(-\rho giu + \frac{1}{2}\rho v\left({u_y}^2 + {u_z}^2\right) + \frac{1}{3}\rho({v_{ty}}{u_y}^2 + {v_{tz}}{u_z}^2))ds$, который при подстановках в вариационное уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) - \frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial u_z}\right)=0 \qquad , \qquad (5)$$

совпадает с уравнением турбулентного движения открытого потока:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho(v_{ty} + \nu)\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho(v_{ty} + \nu)\frac{\partial u}{\partial z}) = -\rho gi \qquad (6)$$

Определение диссипации как $N_{dis} = 2\,\mu S^2$ объясняет только часть возможного уменьшения этой величины за счет малых градиентов скоростей, но для выводов о пульсационной составляющей суммы $(N_{dis}(\overline{u},\ \overline{v}, \overline{w}) + \varepsilon)$ пока еще нет подробных результатов.

Литература

1. Фидман Б.А. Турбулентность водных потоков / Б.А. Фидман //Ленинград: Гидрометеоиздат . –1991. 239 с.
2. Васильченко Г. В. Воздействие потоков на мелиоративные и водохозяйственные сооружения / Г.В Васильченко //Мн.: Ураджай. – 1985. 175с.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа/ Л.Г. Лойцянский // М.: Глав. ред. физ.-мат. литературы “Наука”. изд.4. –1973. 848 с.

4. Гольдина В.Д., Шваб В.А. Применение “метода непрерывной модели” для расчета пристенных турбулентных потоков над шероховатым дном/ В.Д. Гольдина, В.А. Шваб // Деп. ВИНИТИ, 2057-83 Деп. – Душанбе, 1983. 30с.
5. Игнатова Г.Ш., Квон В.И. О гидродинамической схеме скольжения при турбулентном течении/ Г.Ш. Игнатова, В.И. Квон // Метеорология и гидрология, 1978. № 7. – С.50-54.
6. Гольдина В.Д. Численное исследование турбулентного течения несжимаемой жидкости в открытых каналах / В.Д. Гольдина // Душанбе: Дониш, (Республиканская научно-теоретическая конференция молодых ученых, часть 1). – 1984, С.163.
7. Гольдина В.Д. Вычисление диссипации энергии в турбулентном потоке над шероховатым дном / В.Д. Гольдина // Душанбе: Материалы конференции молодых ученых АН Таджикской ССР. Серия физико-математических наук. – 1987. – С.71-74.
8. Гольдина В.Д. Некоторые проявления принципа минимума диссипации энергии турбулентных течений в открытых потоках / В.Д. Гольдина // Проблемы гидромеханики и развитие гидроэнергетики, мелиорации и экологии в Центральной Азии. Душанбе. – 2013. – С.104-111.
9. Гринвальд Д.И., Никора В.И. Речная турбулентность / Д.И. Гринвальд, В.И. Никора // Ленинград: Гидрометеоиздат. – 1988. –152 с.
10. Гольдштик М. А, Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность / М.А. Гольдштик, В.Н. Штерн // Новосибирск: Наука . –1977. –260 с.
11. Гольдина В.Д. Расчет характеристик открытого потока / В.Д. Гольдина // Актуальные вопросы дифференциальных уравнений, математического анализа, алгебры, теории чисел и их приложения. Материалы республиканской научно-практической конференции // Душанбе: РТСУ – 2019. – С.68-73.

ТАҲЛИЛИ ХУСУСИЯТҲОИ ЭНЕРГЕТИКИИ ТУРБУЛЕНТНОКИИ ҶАРАЁНИ ОБ

Голдина В.Д.
Институти математикаи ба номи А.Ҷураев АМИТ

Аннотатсия. *Таҳлили ҳисобҳои баъзе хусусиятҳои энергетикии турбулентнокии ҷараёнҳои об бо назардошти таъсири параметрҳои ҷараён ба онҳо нишон дода шудааст.*

Калидвожаҳо*: турбулентнокӣ, паҳншавии энергия, адади Рейнолдс, адади Фруд, тензори суръати дигаргуншавии шкал.*

ANALYSIS OF ENERGY CHARACTERISTICS FOR TURBULENT WATER FLOW

Goldina V.D.
Djuraev Institute of Mathematics named of NAST

Annotation. *The analysis of calculations for some energy characteristics of turbulent water flow and the influence of flow parameters upon them was made.*
Keywords: *turbulence, energy dissipation, Reynolds number, Froude number, strain rate tensor.*

Сведения об авторе: **Гольдина Валентина Даниловна** – к.ф.-м.н., должность - ведущий научный сотрудник отдела прикладной математики и механики Института математики им. Джураева НАН Таджикистана, E-mail: goldinav@mail.ru 918-666-529.

УДК 517.95

О РЕШЕНИИ ОБОБЩЁННОГО МЕТАПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ГЛАВНЫМИ ЧАСТЯМИ

Одинабеков Х.В.[1], Одинабеков Д.М.[2]
Таджикский государственный университет коммерции[1]
Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе[2]

Аннотация. *В работе для одного класса метапараболического уравнения вида найдено двоякопериодическое решение по z с периодами 2π, 2πi и 2π - периодическое по t, с заданными главными частями.*
Ключевые слова: *двоякопериодическое решение, метапараболические уравнения, обобщенное решение.*

Изучение вопроса разрешимости и распространения свойств аналитических функций, а также связанные с ними краевые задачи для систем уравнений

$$w_{\bar{z}} + Q(z)w_z + A(z)w + B(z)\overline{w} = f \qquad (1)$$

изучались в работах А. Дугласа, Б.В. Боярского, А.И. Вольперта, В.С. Виноградова, А.П. Солдатова, Б. Гольдшмидта, Р. Гильберта, И.В. Вендланда, В.Н. Монахова, С.И. Антонцева, А.Д. Джураева и других математиков.

Обобщенные аналитические функции с сингулярными коэффициентами впервые изучал Л.Г. Михайлов, который перенес многие свойства аналитических функций на этот случай. В монографии Н.К. Блиева изучены уравнения обобщенных аналитических функций, когда коэффициенты принадлежат пространству Бесова $B_{p,1}^{\alpha}(G),\ 1 < p < 2,\ \alpha = \frac{2-p}{p}$.

В связи с этим важным становится изучение задач о нахождении ограниченных, в том числе, двоякопериодических решений для эллиптических систем первого порядка на плоскости. На важность изучения таких задач впервые указал В.С. Виноградов.

Уравнения обобщенных аналитических функций на замкнутой римановой поверхности (рода больше двух), изучены в работах Родина Ю.Л. Даны формулы представления решений и получены аналоги теоремы Абеля и Римана-Роха. Задача существования обобщенных аналитических автоморфных функций методами краевой задачи Карлемана исследована Показеевым В.И. Им же получены первые формулы представления решений через автоморфные функции и изучены задачи нахождения двоякопериодических обобщенных аналитических функций. Аналогичные представления решений для конечной области, на поверхностях более общих, чем риманова поверхность, получены Данилюком И.И.

Задача нахождения двоякопериодических решений эквивалентна задаче нахождения решений на комплексном торе. Для системы

$$w_{\bar{z}} - q_1(z)w_z - q_2(z)\overline{w}_z + a(z)w + b(z)\overline{w} = f(z) \qquad (2)$$

задача нахождения двоякопериодических решений является естественным развитием теории эллиптических функций.

В связи с вышесказанным весьма актуальным является разработка методов исследования эллиптических систем первого порядка в классах двоякопериодических функций, что является естественным развитием методов теории обобщенных аналитических функции И.Н. Векуа и теории эллиптических функций Вейерштрасса, когда коэффициенты системы принадлежат пространству L_p p > 2.

Двоякопериодическое решение уравнения (2) при $a, b, f \in L_p$, p > 2, понимается, как в обобщенном, так и в регулярном смысле И.Н. Векуа. Регулярные двоякопериодические решения - решения класса W_p^1, p > 2. Обобщенные двоякопериодические решения допускают конечное число полюсов и основном параллелограмме Ω и принадлежат классу $W_p^1(\Omega_0)$, p > 2, где Ω_0- любая подобласть Ω, не содержащая полюсов решения.

Для уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + a(z)w + f(z,t), \qquad (3)$$

будем находить двоякопериодическое решение по *z* с периодами 2π, $2\pi i$ и 2π - периодическое по *t*, с заданными главными частями

$$w(z,t) \sim \frac{A_k(t)}{z-b_k} + \sum_{j=2}^{\lambda_k} (-1)^{j-1} \frac{(j-1)A_k^{j-1}(t)}{(z-b_k)^{j-1}} \tag{4}$$

$k = 1,2,\cdots,v$, $A_k(t)$ − заданные 2π - периодические функции, $b_1, b_2,\cdots, b_k$ - точки комплексной плоскости C.

Решение задачи (3), (4) достаточно искать в кубе $\Omega \times [0,2\pi]$, где $\Omega = [0,2\pi] \times [0,2\pi i]$, основной прямоугольник периодов решетки $\Gamma = 2\pi\{m_1 + im_2;$ m_1, m_2 - целые$\}$, при условие, что полюсы $b_1, b_2,\cdots, b_k$ лежать внутри Ω. Обозначим через $\tilde{C}_*^1$ − класс 2π - периодических решений уравнения из $C^1(Q_{2\pi})$, где $Q_{2\pi} \subset \Omega\times[0,2\pi]$ не содержащих точки (b_1,t), (b_2,t), $\cdots$,(b_k,t). Предположим, что в условии (2) функция $A_k^j(t)$ согласно [1] представимы в виде

$$A_n^j(t) = a_k^j\, e^{int} \tag{4}$$

где $n = 1,2,\cdots,v$, $j = 1,2,\cdots,\lambda_k$, λ_k - кратность полюса b_k.

Решение задачи будем искать в виде

$$w(z,t) = w_1(z)e^{int}, \tag{5}$$

где $w_1(z)$ - искомая, n – целое.

Для нахождения искомой функции $w_1(z)$ представляя правую часть в виде

$$f(z,t) = f_1(z)e^{int}, \tag{6}$$

после подстановки в уравнении (3) относительно неизвестной $w_1(z)$ и согласно [2] получим уравнение вида

$$\frac{\partial w_1(z)}{\partial \bar{z}} + (a(z) - in)w_1(z) = -f_1(z), \tag{7}$$

с главными частями

$$w_1(z) \sim \frac{a_k^1}{z-b_k} + \sum_{j=2}^{\lambda_k} (-1)^{j-1} \frac{(j-1)!a_k^j}{(z-b_k)^j} \tag{8}$$

Как показано в [3] разрешимость задачи (7), (8) при $a(z), f_1(z) \in C_*^1$, зависит от значения число

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\iint_\Omega a(z)dz, \quad a_0 = 4\pi ni\ (mod\ \Gamma) \text{ или } a_0 = 4\pi ni\ (mod\ \Gamma).$$

Как в [5] решение задачи (3), (7) представим в виде

$$w_1(z) = \square(z)e - T\zeta a(z) + in\,\bar{z} + dz \tag{9}$$

где d−постоянная величина и $\square(z)$ - искомые.

В силу свойство $T\zeta a(z)$ получим

$T\zeta a(z) + (m_1 2\pi + m_2 2\pi i) = T\zeta a(z) + (m_1\eta_1 + m_2\eta_2)a_0$, где

$m_1 = 0, \pm1, \pm2, \ldots\ldots,\ m_1 = 0, \pm1, \pm2, \ldots\ldots,$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} a(z)d\Omega,\ \ \zeta_1 = 2\zeta(\pi),\quad \zeta_1 = 2\pi i$$

циклические постоянные функции $\zeta(z)$, связанны с периодами $2\pi,\ 2\pi i$ соотношение Лежандра

$$\eta_1 2\pi i - \eta_2 2\pi = 2\pi i \text{ или } \quad \eta_1 i - \eta_2 = i. \tag{10}$$

Тогда $w_1(z)$ удовлетворяет условиям

$w_1(z + 2\pi) = \square(z + 2\pi)e - T\zeta a(z) + in\bar{z} - dze\eta a_0 + 2\pi in + d2\pi;$

$w_1(z + 2\pi i) = \square(z + 2\pi i)e - T\zeta a(z) + in\bar{z} - dz\, e\eta a_0 - 2\pi nd2\pi i.$

Отсюда видно, что если

$$\begin{cases} -\eta_1 a_0 + 2\pi in + 2\pi d = 2\pi i m_1 \\ -\eta_2 a_0 + 2\pi n + 2\pi id = 2\pi i m_2 \end{cases} \tag{11}$$

$m_1,\ m_2$ - некоторые целые числа и $\square(z)$ имеет периоды $2\pi,\ 2\pi i$, то $w_1(z)$ будет двоякопериодической с периодами 2π и $2\pi i$. Система уравнений (11) благодаря соотношению Лежандра [3] имеет единственное решение.

$$a_0 = 4\pi ni - 2\pi(im_1 + m_2),\ d = ni - m_1\eta_2 + m_2\eta_1. \tag{12}$$

При таком подборе $a_0,\ d$ двоякопериодическая функция $\square(z)$ должна удовлетворять неоднородному уравнению Коши-Римана,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} = -f_1(z)\exp(T_\zeta a(z) - in\bar{z} - dz) = \chi(z), \tag{13}$$

и при $z \to b_k$ условию

$$\varphi(z) \sim [\frac{\tilde{a}_k^1}{z - b_k} + \sum_{j=2}^{\lambda_k}(-1)^{j-1}\frac{(j-1)!\tilde{a}_k^j}{(z - b_k)^j}], \tag{14}$$

$\psi(z) = T_\zeta a(z) + in\bar{z} + dz,\ \ a^{\sim 1}{}_k = a^1{}_k \exp[\psi(b_k)].$

Как показано в [4, 5] для разрешимости задачи (7), (11) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\nu}\tilde{a}_k^1 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\chi(z)d\Omega = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} f_1(z)\exp(T_\zeta a(z) - in\bar{z} + dz)d\Omega \tag{15}$$

где $a^{\sim 1}{}_k = a^1{}_k \exp[-\psi(b_k)],\ k = 1, 2, \cdots, \nu.$

Теорема 1. *Пусть в условии (4) функции $A_k^j(t)$ имеют вид (5), а правая часть уравнения (3) представимо в виде (4), функции* $a(z),\ f_1(z) \in C_*^1$ *и* $a_0 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} a\,(z)\,dz.$

Тогда при выполнении условий (14) уравнение (3), в классе C_*^1 *имеет решение вида*

$$w(z,t)e^{int-\psi(z)}\left[c+\sum_{k=1}^{\nu}A_k^1(0)\,e^{\psi(b_k)}\,\xi(z-b_k)\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{\nu}A_k^j(0)\,e^{\psi(b_k)}\,\zeta(j-1)(z-b_k)+T\zeta(f(z,0)-e^{\psi(z)})\right] \quad (16)$$

где c - произвольная постоянная, n - целое число, $\psi(z) = T_\zeta a(z) - in\bar{z} + dz$, *постоянное d определяется формулой (12).*

Это теорема получена при условии, что постоянное $a_0 - 4\pi i \in \Gamma$, $\Gamma = 2\pi\{m_1 + im_2\}$, m_1, m_2 - целые числа.

Так как, $4\pi i$ является периодом при целом n, то a_0 должно быть таким периодом.

Также показано, что при $a_0 \in \Gamma$ задача (3), (4), когда $A_k^j(t)$ и $f(z,t)$ представимы в виде (3), (5) всегда допускает решение с главными частями (4).

Литература

1. Gilbert M.S. Generalized meta and pesdo parabolic Equations in the plane. Комплексный анализ и его приложение. // Сб. статей, посвящ. академику Илье Несторовичу Векуа и его семидесятилетию. – М.: Наука, 1978, - с.160-172.
2. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981, - 448 с.
3. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. - М: Наука, Гл. ред. физ. - мат. литературы, 1970, - 304 с.
4. Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщенные аналитические функции и их приложения. - Душанбе. Дониш, 2012, - 190 с.
5. Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщенные аналитические функции. - Дифференциальные уравнения. - Минск, 1991 г. т. 27, №4, - с. 656-664.

ҲАЛЛИ УМУМИИ МУОДИЛАҲОИ МЕТАПАРАБОЛИКИИ ТАРТИБИ ЯК БО ҚИСМҲОИ АССОСИИ ДОДАШУДА

Одинабеков Х.В.[1], Одинабеков Ҷ.М.[2]
Донишгоҳи давлатии тиҷорати Тоҷикистон[1]
Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар ш. Душанбе[2]

Аннотатсия. *Дар ин мақола барои як синфи муодилаҳои метапараболикӣ ҳаллҳои дудаврии аз руи z бо давриҳои* 2π, $2\pi i$ *ва* 2π - *даврӣ аз руи t бо қисмҳои асосии додашуда ёфта шудааст.*

Калидвожаҳо: *ҳалҳои дудаври, муодилаҳои метапараболикӣ, ҳалли регулярӣ*

ON THE SOLUTION OF A GENERALIZED FIRST-ORDER METAPARABOLIC EQUATION WITH PRINCIPAL PARTS

Odinabekov H.V.[1], Odinabekov J.M.[2]
Tajik State University of Commerce[1]
Lomonosov Moscow State University in Dushanbe[2]

Annotation. *In this paper, for a class of a metaparabolic equation of the form a two - period solution in z with periods 2π, $2\pi i$ and 2π - periodic in t, with given principal parts, is found.*
Keywords: *doubly periodic solution, metaparabolic equations, generalized solution.*

Сведения об авторах: **Одинабеков Хусрав Вафобекович**, старший преподаватель кафедры высшей математики и естественнонаучных дисциплин Таджикского государственного университета коммерции;
Одинабеков Джасур Музофирович – к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой фундаментальных и естественных наук Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе, E-mail: jasur_79@inbox.ru

УДК: 510.6(072)

СВЯЗЬ МЕЖДУ ТАВТОЛОГИЧЕСКИМИ ФОРМУЛАМИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ И МНОЖЕСТВ

Собиров А.Ш.
Таджикский национальный университет

Аннотация. *В данной статье изложены одиннадцать тавтологических формул высказываний и соответственно, множеств. Тавтологические формулы высказываний доказаны разными методами, а также комментированы с помощью электрических цепей в знаменитой области физики, в работах* [1] *и* [2]. *Одиннадцать тавтологических формул множеств являются непосредственным применением предыдущих тавтологических формул из области алгебры высказываний и все они алгоритмично доказаны. Кроме того, приведены подходящие практические примеры из разных областей науки и жизни для обоих видов тавтологий. Такая постановка вопроса имеет научно – методический, учебно – воспитательный и вдохновляющий характер для учеников школ, лицеев, гимназий, студентов, исследователей и тех, кто интересуется и применяет математическую логику.*
Ключевые слова: *тождественно истинная формула, тавтология, пересечение и включение множеств, закон обеспечения истинности, предикатная формула, закон контрапозиции, теорема Пифагора, закон расширенной контрапозиции, закон силлогизма.*

Определение. Логической формулой $\Phi(p_1, p_2, ..., p_n)$ называется тождественно истинная формула, если для любого набора значений аргументов $p_1 = \alpha_1, p_2 = \alpha_2, ..., p_n = \alpha_n$ из множества $\{И, Л\} = \{1,0\}$ выражение

$\Phi(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ образует высказывание, где «И» = «истина» = «1», «Л» = «ложь» = «0».

Тождественно истинные формулы в математической логике называются тавтологическими формулами. Если некоторая формула ϕ образует тавтологию, то его обозначают через $\phi \equiv 1$ или $\phi \vdash$.

Теперь приведём ряд известных тавтологических формул, изученных и комментированных автором работ [1] и [2]. Все тавтологические формулы доказываются разными методами, а мы здесь приводим только один метод преобразования равносильных логических формул.

Тавтология 1.

$$(p \wedge q) \Rightarrow p \qquad (1)$$

Если имеются p и q, тогда выполняется p.

Доказательство. $(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv \overline{p \wedge q} \vee p \equiv \bar{p} \vee \bar{q} \vee p \equiv (p \vee \bar{p}) \vee q \equiv 1 \vee q \equiv 1,$

где использована равносильная формула $p \Rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$ и закон исключения третьего $p \vee \bar{p} \equiv 1$.

Пример. Если засеем хороший сорт зерна *(p)* и будем хорошо обрабатывать и ухаживать за растениями *(q)*, тогда получим хороший урожай того же сорта зерна (p).

Формуле (1) соответствуют следующие тавтологические формулы из теории множеств:

$$A \cap B \subseteq A \text{ и } A \cap B \subseteq B \qquad (2)$$

Так как пересечение множеств определяется через конъюнкции:

$A \cap B = \{\forall x, x \in A \wedge x \in B\}$,

а включение множеств определяется через импликации

$(M \subseteq H) = (\forall x, x \in M \Rightarrow x \in H) = (\forall x, \overline{x \in M} \vee x \in H)$,

поэтому доказательство формулы (2) проводится следующим образом:

$(A \cap B \subseteq A) = (\forall x, x \in A \cap B \Rightarrow x \in A) \equiv (\forall x, x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A) \equiv$

$(\forall x, \overline{x \in A \wedge x \in B} \vee x \in A) \equiv (\forall x, \overline{x \in A} \vee \overline{x \in B} \vee x \in A) \equiv (\forall x, (\overline{x \in A} \vee x \in A) \vee \overline{x \in B}) \equiv$ Это

$(\forall x, 1 \vee \overline{x \in B}) \equiv 1(истина)$

есть алгоритмическое и логическое доказательство.

Так как в алгебре высказываний есть закон обеспечения истинности:

$$1 \vee p \equiv 1.$$

Пример. В группе студентов есть отличники (A) и средние (B), тогда все они относятся этой же группе (A).

Тавтология 2.

$$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow qr) \qquad (3)$$

Из p следует q и из p следует r, тогда и только тогда, когда из p следует q и r. Доказательство имеется в работе [1].

Пример. Если студент хорошо готовится (p), тогда он сдаёт экзаменационную сессию, и если студент хорошо готовится (p), тогда он получает стипендию (r). ⇔ Если студент хорошо готовится (p), тогда он сдает сессию (q) и получает стипендию (r).

Для формулы (3) соответствует следующая тавтология из теории множеств:

$$(A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C) \Leftrightarrow (A \subseteq B \cap C) \qquad (4)$$

Пример. Хлопок (A) волокнистое сырьё (B) и хлопок (A) есть масленое сырьё (C). ⇔ Хлопок (A) относится к волокнистому (B) и масленому сырью (C).

Формула (4) есть предикатная формула, подобие формулы (3), поэтому их доказательство проводится аналогично.

Тавтология 3.

$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee r) \Rightarrow q \qquad (5)$$

Из p следует q и из r следует q, тогда и только тогда, когда из p или r следует q. Доказательство имеется в работе [1].

Пример 1. Если кто – то хороший певец (p), тогда он может стать популярным певцом (q), и если (r) хороший певец, тогда он тоже может стать популярным певцом, эквивалентно, если p или r хорошие певцы, тогда могут быть популярными певцами (q).

Пример 2. Если (p) невиновен, тогда он освобождается (q)и если (r) невиновен, тогда тоже освобождается (q). ⇔ Если (p) или (r) невиновные, тогда они освобождаются (q).

Для формулы (5) соответствует следующая тавтология из теории множеств:

$$(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq B) \Leftrightarrow (A \cup C \subseteq B) \qquad (6)$$

Пример. Старшеклассники (A) являются передовой частью населения (B) и студенты (C) являются передовой частью народа (B). ⇔ (Тогда и только тогда), когда старшеклассники (A) вместе со студентами (C) являются передовой частью народа (B).

Тавтология (6) есть предикатная формула, формулы (5), поэтому их доказательство проводится аналогично [2].

Тавтология 4.

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p}) \qquad (7)$$

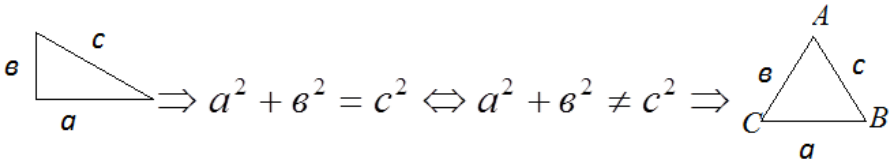
Это есть закон контрапозиции для высказываний.

Замечание. Все теоремы, содержащие $\Leftrightarrow$, можно считать как двухсторонние теоремы.

Доказательство. $p \Rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q \equiv \overline{p} \vee \overline{\overline{q}} \equiv \overline{\overline{q}} \vee \overline{p} \equiv \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$.

Пример 1. Кто – то трудится (p), тогда он получит урожай (q) $\Leftrightarrow$ Кто-то не получил урожая ($\overline{q}$), тогда он не трудился ($\overline{p}$).

Пример 2. Теорема Пифагора



Замечание 1. Выше приведённый образец треугольника Пифагора и произвольный треугольник.

Замечание 2. Если $a^2 + b^2 \neq c^2$, тогда ΔABC непрямоугольный.

Ученики и студенты с теоремой Пифагора знакомы ещё с восьмого класса. Они становятся свидетелями того, что теорема Пифагора и все её приложения для методического разъяснения логических законов играют фундаментальную роль, что вызывает уверенность находить во всех науках логические закономерности и истинности. Кто соблюдает, ссылается, уважает и применяет истину, тот самый счастливый человек.

Закон контрапозиции для множеств выглядит так:

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow \left(\overline{A} \subseteq \overline{B}\right) \qquad (8)$$

С помощью диаграммы Венна это предложение можно утверждать.

Пример. Если студенты филиала МГУ (A) есть часть студентов Республики Таджикистан (B), тогда студенты не являющиеся таджикскими, являются частью студентов, не являющимися студентами филиала МГУ.

Тавтология 5.

$$\left((p \wedge q) \Rightarrow r\right) \Leftrightarrow (p \wedge \overline{r}) \Rightarrow \overline{q} \qquad (9)$$

Закон расширенной контрапозиции доказан в работе [1].

Пример. Если четырёхугольник прямоугольный (p) и с равными сторонами (q), тогда он является квадратом $(r) \equiv$ Если четырёхугольник прямоугольный (p) и не является квадратом $(\overline{r})$, тогда его стороны не - - равны $(\overline{q})$.

Закон расширенной контрапозиции для множеств выглядит так:

$$(A \cap B \subseteq C) \Leftrightarrow \left(A \cap \overline{C} \subseteq \overline{B}\right)$$

Доказательство: Согласно логических законов и переходов преобразуем правую сторону формулы и получим его левую сторону.

$$\left(A \cap \overline{C} \subseteq \overline{B}\right) \equiv \left(\forall a, a \in A \cap \overline{C} \Rightarrow a \in B\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\forall a, a \in A \wedge a \in \overline{C} \Rightarrow a \in \overline{B}\right) \equiv$$
$$\equiv \left(\forall a, \overline{a \in A \wedge a \in \overline{C}} \vee a \in \overline{B}\right) \equiv$$
$$\equiv \left(\forall a, \overline{a \in A} \vee \overline{a \in \overline{C}} \vee a \in \overline{B}\right) \equiv$$
$$\equiv \left(\forall a, \overline{a \in A} \vee \overline{a \in B} \vee a \in C\right) \equiv$$
$$\equiv \left(\forall a, \overline{a \in A \wedge a \in B} \vee a \in C\right) \equiv$$
$$\equiv \left(\forall a, \overline{a \in A \cap B} \vee a \in C\right) \equiv$$
$$\equiv (\forall a, a \in A \cap B \Rightarrow a \in C) \equiv (A \cap B \subseteq C) \qquad (10)$$

Согласно основной теореме о тавтологии формула (10) образует тавтологию.

Пример. N – множество натуральных чисел,

Z – множество целых чисел,

Q – множество рациональных чисел.

$$(N \cap Z \subseteq Q) \Leftrightarrow \left(N \cap \overline{Q} \subseteq \overline{Z}\right)$$
$$(N \subseteq Q) \Leftrightarrow \left(\emptyset \subseteq \overline{Z}\right)$$
$$(\text{И} \Leftrightarrow \text{И}) = \text{И}$$

Товтология 6 [1].

$$\left(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\right) \Leftrightarrow \left((p \wedge q) \Rightarrow r\right) \qquad (11)$$

Пример 1. Если число простое (p), тогда оно натуральное (q), поэтому оно является целым положительным (r). $\Leftrightarrow$ Если число простое и натуральное $(p \wedge q)$, тогда оно является целым и положительным (r).

Пример 2. Если выращивать хлопок (p), тогда можно изготовить волокно (q), а затем можно изготовить материал (r). $\Leftrightarrow$ Если выращивать хлопок и изготовить волокно $(p \wedge q)$, тогда можно изготовить ткань (r).

Тавтология 6, соответствует следующей тавтологической формуле над множествами

$$(A \subseteq B \subseteq C) \Leftrightarrow (A \cap B \subseteq C) \qquad (12)$$

Пример. Множество студентов некоторой учебной группы (A) являются подмножеством всех студентов филиала МГУ (B), а множество студентов филиала МГУ являются подмножеством студентов республики (С). $\Leftrightarrow$ Множеству студентов некоторой учебной группы и всех студентов филиала МГУ $(A \cap B)$, являются подмножеством студентов республики (С).

Товтология 7.

$$(p \vee q) \wedge \bar{p} \Rightarrow q \qquad (13)$$

Пример. Подозреваемый является виновным (p) или невиновным (q) и, если при допросе он оправдает себя $(\bar{p})$, тогда он невиновен (q).

Товтология 7, соответствует следующей товтологии формулы для множеств.

$$(A \cup B) \cap \overline{\mathrm{A}} \subseteq B. \qquad (14)$$

Доказательство: $(A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A}) \subseteq B.$

$$\emptyset \cup (B \cap \overline{\mathrm{A}}) \subseteq B.$$

$$B \cap \overline{\mathrm{A}} \subseteq B$$

$$(B \cap \overline{\mathrm{A}} \subseteq B) \equiv (\forall a, a \in B \wedge a \in \overline{\mathrm{A}} \Rightarrow a \in B) \equiv \left(\forall a, \overline{a \in B \wedge a \in \overline{\mathrm{A}}} \vee a \in B\right) \equiv \left(\forall a, \overline{a \in B} \vee \overline{a \in \overline{\mathrm{A}}} \vee a \in B\right) \equiv (\forall a, (a \in \overline{B} \vee a \in B) \vee a \in \mathrm{A}) \equiv\equiv$$

$$\left(\forall a, (1 \vee a \in \mathrm{A})\right) \equiv 1 \text{ (истина)}.$$

Пример. Студент учится в группе А или в группе B и при проверке выясняется, что его в группе А нет, т.е. $(\overline{\mathrm{A}})$, тогда он учится в группе B.

Товтология 8.

$$(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q. \qquad (15)$$

Закон modus ponens = закон строгого умозаключения.

Пример. Подозреваемый при допросе оказался невиновным (p), тогда он освобождается (q) и в повторном допросе он оказался невиновным (p), тогдо его освобождение (q) становится уверенным и строгим.

Тавтология 8 соответствует следующей тавтологической формуле над множествами:

$$(A \subseteq B) \wedge A \subseteq B \qquad (16)$$

Доказательство. $[(\forall a, (a \in A \Rightarrow a \in B) \wedge (a \in A)] \Rightarrow (a \in B) \equiv$

$$\equiv [\forall a, (\overline{a \in A} \vee a \in B) \wedge (a \in A) \Rightarrow (a \in B)]$$

$$\equiv [\forall a, a \in B \wedge a \in A \Rightarrow a \in B] \equiv$$

$$\equiv [BA \subseteq B] \equiv 1.$$

Пример. Студент учится в группе (А), тогда он относится к какому-то вузу (В) и эта группа (А) тоже относится этому вузу (В).

Тавтология 9.

$$(p \Rightarrow q) \wedge \bar{q} \Rightarrow \bar{p}. \qquad (17)$$

Закон modus tolens ≡ закон утвердительного отрицания.

Пример. Если студент готовится (р), тогда экзаменационную сессию сдаёт (q) а если экзаменационную сессию не сдал $(\bar{q})$, тогда он не подготовился $(\bar{p})$.

Эта тавтология соответствует следующей тавтологии над множествами:

$$(A \subseteq B) \wedge \overline{\mathrm{B}} \subseteq \bar{A} \qquad (18)$$

Доказательство.

$$[(a \in A \Rightarrow a \in B) \wedge (a \in \bar{B})] \Rightarrow (a \in \bar{A}) \equiv (\overline{a \in A} \vee a \in B) \wedge (a \in \bar{B})$$
$$\Rightarrow (a \in \bar{A}) \equiv [\overline{a \in A} \wedge a \in \bar{B} \vee a \in B \wedge a \in \bar{B}] \Rightarrow (a \in \bar{A}) \equiv$$
$$\equiv \overline{a \in A} \wedge a \in \bar{B} \Rightarrow (a \in \bar{A}) \equiv \left(\overline{\overline{a \in A} \wedge a \in \bar{B}}\right) \vee (a \in \bar{A}) \equiv$$
$$\equiv (a \in A) \vee (a \in B) \vee (a \in \bar{A}) \equiv 1 \vee (a \in B) \equiv 1.$$

Пример. Студент учится в группе (А), тогда он относится к какому-то вузу (В) и, если студент не относится к какому - то вузу ($\bar{B}$), тогда он не учится в какой- то группе ($\bar{A}$).

Тавтология 10.

$$p \Rightarrow (q \wedge \bar{q}) \Rightarrow \bar{p}. \qquad (19)$$

Пример. На полях проводили химическую обработку плантации растений (p), в результате чего исчезли некоторые насекомые (q), а некоторые из них не исчезли $(\bar{q})$. $\Leftrightarrow$ На полях плантации растений мало подействовала химобработка $(\overline{p})$.

Для формулы (19) соответствует следующая тавтологическая формула над множествами:

$$A \subseteq \left(B \cap \overline{B}\right) \Leftrightarrow \overline{A}$$
$$(A \subseteq \emptyset) \Leftrightarrow \overline{A},$$

где $(A \subseteq \emptyset) \equiv (a \in A \Rightarrow a \in 0) \equiv \left(\overline{a \in A} \vee a \in \emptyset\right) \equiv \left(a \in \overline{A} \vee a \in \emptyset\right) \equiv$ $\equiv \overline{A} \cup \emptyset = \overline{A}$. Таким образом, формула (20) образует тавтологию.

Тавтология 11.

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \qquad (20)$$

Если студент успевающий (p), тогда он много знает (q) и если много знает (q), тогда он может стать хорошим педагогом (r), отсюда следует что, если студент хороший (p), тогда он может стать хорошим педагогом (r).

Аналогичная тавтологическая формула для множеств:

$$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C) \qquad (22)$$

В филиале МГУ студенты - первокурсники (A) являются подмножеством студентов филиала, а множество студентов филиал, являются подмножеством студентов республики, тогда студенты - первокурсники филиала МГУ являются подмножеством студентов республики.

Это логическое предложение над множествами является законом силлогизма (вывода) для множеств. Доказательство формулы (19) проводится аналогично доказательству формулы (20), которое изложено в работе [2].

Свойство силлогизма широко применяется в науке, в производстве и в жизни.

Таким образом, в работе изучены зависимость и аналогичность между алгеброй высказываний и алгеброй множеств, которые представляют большой научно – методический и практический интерес для старшеклассников, студентов и исследователей.

Заключение

В целом, статья посвящена исследованию и применению тождественно - истинных формул. Изученные тавтологические формулы и составленные примеры изложены простым и понятным языком.

Тождественно - истинные формулы призывают людей быть честными, добросовестными, чистосердечными и во всех действиях быть справедливыми и никогда не говорить ложь и никого необманивать. Они всегда, в любом состоянии, оправдают себя, семью, родителей и общество.

Тождественно ложные - формулы говорят о том, что есть люди обманчивые, лгуны, мошенники, недоверчивые и бесстыдные, поэтому за счёт таких людей страдают семьи, рабочий коллектив и, в целом, общество.

Выполнимые формулы похожи на калеблющихся людей. Таким людям трудно верить, а лучше всего им неверить, потому что они неустойчевые люди и в любой момент они избегают от правды (истины).

Разного рода доказательства математических и логических предложений это большой успех человеческого мозга, потому что встречаются жизненые задачи, которые требуют доказательства разными способоми, или хотябы одним способом. Решить проблему, значит доказать истину, то есть устанавливать правду в изучаемой задаче. Это всё принадлежит области изучения общей логики, а значит в математической логике.

Общая логика стала прекрасной наукой, после того, как к ней стали применять математику, т.е. когда создали и стали развивать математическую логику. Математическую логику нельзя выучить поспешно. Это самое интересное и необходимо нужное направление математики.

Математическая логика воспитывает человека на высоком уровне, успокаивает его, вызывает трудолюбие, взаимоуважение, искренность между людьми, повышает любовь к истине, родине, природе, семье и детям. Соблюдение, выполнение, сохранение названных понятий и указаний есть образ нормальной жизни. Общая и математическая логика применяются во всех науках и отраслях, особенно в логической характеристике электрических цепей, информатике системе милеорации, нефтепровода, газопровода и подобно им, являются величайшими достижениями человека.

Содержание, объяснение и основание любой науки выражается языкознанием, поэтому мы должны соблюдать чистоту используемого языка для изучения, развития и применения в любой науке и жизни.
Многоязычие – повышает логическую культуру специалиста и исследователя в любой области, особенно в изучении и применении книг на разных языках.

Группа учёных и другие передовые личности с логическим мышлением должны постоянно помогать коллективу и обществу. Каждый человек, особенно исследователи, учёные, производители и потребители должны развивать в себе высокую культуру мышления, разума, анализа, познания, чтобы создавать благополучие для развития своей области. В этом заключается содержание развития общества. Всё сказанное мы достигаем с помощью коллективного логического умозаключения. Правильное умозаключение, здоровый рабочий коллектив и хорошая семейная обстановка улучшают работу сердца, мозга и способствует долголетию.

Литература

1. Собиров А. Ш., Собирова Г.А. Методика обучения и применения законов тавтологических формул в естественных, математических и гуманитарных науках. / А.Ш. Собиров, Г. А. Собирова // Вестник Академии образования Таджикистана.– 2020. - №4 (37).– с. 149 – 158.
2. Собиров А. Ш., Собирова Г.А. Методика обучения и применения тождественно истинных формул в электрических цепях и других сферах науки. / А. Ш. Собиров., Г.А. Собирова. // Вестник Академии образования Таджикистана.– 2021. - №2 (39).– с. 109 – 158.
3. Столяр А. А. Педагогика математики. – Минск. – 1986. – с. 414.
4. Шапорев С.Д. Математическая логика. – С – П. – 2014. – с. 410.

ВОБАСТАГИИ БАЙНИ ФОРМУЛАЊОИ ТАВТОЛОГИИ МУЛОҲИЗАЊО БО МАҶМӮЪҲО

Собиров А.Ш.
Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Аннотатсия. *Дар ин мақолаи илмӣ ва методӣ ёздаҳто формулаҳои тавтологӣ оид ба мулоҳизаҳо ва ёздаҳтои дигар оид ба маҷмӯъҳо таҳлил гаштаанд. Дар корҳои илмӣ ва методии* [1] *ва* [2] *ҳои гуногуни исботи тавтологияҳо оид ба мулоҳизаҳо оварда шуда ба воситаи занҷирҳои ноқилҳои баркӣ шарҳи физикӣ дода шудааст. Формулаҳои тавтологӣ оид ба муносибати маҷмӯъҳо бошад, бевосита бо ёрии татбиқи тавтологияи алгебраи мулоҳизаҳо исбот шудаанд. Ғайр аз ин оид ба ҳарду намуди тавтологияҳо аз соҳаҳои гуногун мисолҳои амалӣ оварда шудаанд. Ҳамин тавр дар мақола вобастагии байни алгебраи мулоҳизаҳо ва алгебраи маҷмӯъҳо аз ҷиҳати илмӣ, методӣ ва амалӣ барои хонандагон, донишҷӯён ва тадқиқотчиён дар сатҳи баланд шарҳу баён гаштааст. Гузориши чунин масъала барои омӯзандагон ва ҳавасмандони*

мантиқи математикӣ аҳаммияти илмӣ – методӣ, таълимию – тарбиявӣ ва рӯҳбаландии эҷодӣ дорад.
***Калидвожаҳо**: формулаи айниятан ҳақ, тавтология, буриш ва воридшавии маҷмӯъҳо, қонуни таъмин будани ҳақиқат, формулаи предикатӣ, қонуни муқобилгузорӣ, теоремаи Пифагор, қонуни васеъшудаи муқобилгузорӣ, қонуни силлогизм (хулосабарорӣ).*

LINKS BETWEEN TAVTOLOGICAL STATEMENT FORMULAS AND SETS

Sobirov A.Sh.
Tajik National University

***Annotation**: This scientific - methodical article sets out eleven tautological formulas of statements and, accordingly, sets. The tautological formulas of statements are proved by different methods, and are also commented with the help of electric circuits in the famous field of physics, in works [1] and [2]. Eleven tautological set formulas are a direct application of the previous tautological formulas from the field of propositional algebra, and they are all algorithmically proven. In addition, suitable practical examples from various fields of science and life are given for both types of tautologies. This formulation of the question has a scientific - methodological, educational - educational and inspiring character for pupils of schools, lyceums, gymnasiums, students, researchers and those who are interested in and apply mathematical logic.*
***Keywords:** identically true formula, tautology, intersection and inclusion of sets, law of ensuring truth, predicate formula, law of contraposition, Pythagorean theorem, law of extended contraposition, law of syllogism.*

Свединия об авторе: **Собиров Абдусабур Шукурович** – к.ф.-м.н., доцент кафедры алгебры и теории чисел Таджикского национального университета. Республика Таджикистан, г. Душанбе, Телефон: (+992) 907 38 80 38. E-mail: abdusabur-sobi@mail.ru

УДК 54.056

СПОСОБ ПОЛУЧЕНИЯ МАГНИТНЫХ НАНОЧАСТИЦ ОКСИДА ЖЕЛЕЗА (γ-Fe_2O_3), СТАБИЛИЗИРОВАННЫХ БИОПОЛИМЕРНОЙ МАТРИЦЕЙ

Зоирова З.О., Кнотько А.В., Зезин С.Б., Афанасов М.И., Макарова Л.А., Спиридонов В.В.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Аннотация. *Разработана методика получения магнитных наночастиц оксида железа (маггемита, γ-Fe_2O_3), стабилизированных анионным полиэлектролитом гиалуронатом натрия. Синтез магнитного оксида железа проводится восстановлением соли Мора, содержащей ионы Fe^{2+}, гипофосфитом натрия при комнатной температуре в присутствии Na-гиалуроната в качестве стабилизирующей матрицы в щелочной среде, а также кислорода воздуха. Визуализацию полученных наночастиц проводили методом просвечивающей электронной микроскопии. Методом мёссбауэровской спектроскопии была подтверждена природа магнитной фазы. Методом УФ-спектрофотометрии было определено содержание магнитных наночастиц в зависимости от соотношения компонентов в реакционной смеси. Магнитные свойства полученных нанокомпозитов были исследованы методом магнитометрии.*

Ключевые слова: *натриевая соль гиалуроновой кислоты, маггемит, магнитометрия, просвечивающая электронная микроскопия, сканирующая электронная микроскопия, мёссбауэровская спектроскопия.*

Модификация полимерных носителей магнитными наночастицами оксида железа (III) представляет большой интерес для медицины и биотехнологии. Полимерные композиты, функционализированные таким образом, находят применение в качестве контрастирующих агентов для исследований методом магниторезонансной томографии; препаратов для гипертермической обработки патологических очагов в организме; магнитной составляющей композиций для целенаправленной доставки лекарств. Особое место среди полимерных композитов, модифицированных магнитными наночастицами, занимают системы на основе магнетита и маггемита. Материалы, содержащие подобные магнитные наночастицы, демонстрируют высокую магнитную восприимчивость. Кроме того, существенным преимуществом указанных магнитных наночастиц является низкая токсичность, что делает их привлекательными для использования в биомедицинских приложениях.

Синтез магнитной модификации оксида железа (III) γ-Fe2O3 проводили восстановлением гипофосфитом натрия при комнатной температуре ионов

двухвалентного железа в виде соли Мора в присутствии Na-гиалуроната в качестве стабилизирующей матрицы, а также кислорода воздуха в щелочной среде. Необходимость восстановителя в системе обусловлена химической спецификой данного процесса, который протекает через образование металлического железа в качестве интермедиата. Без восстановителя образуются гидроксоформы железа (III), не обладающие магнитными свойствами [3]. Выбор гипофосфита в качестве восстановителя обусловлен высоким окислительно-восстановительным потенциалом пары H_2PO_2/PO_4^{3-}.

Получение магнитных наночастиц γ-Fe_2O_3, включённых в матрицу гиалуроновой кислоты, проводят в щелочном растворе согласно следующей схеме:

$$(NH_4)_2Fe(SO_4)_2 \cdot 6H_2O + 4NaOH = Fe(OH)_2 + 2NH_3 + 8H_2O + 2Na_2SO_4 \quad (1)$$

Осаждение магнитной γ-Fe_2O_3 проводят в щелочном растворе с pH в интервале 9–10. Нижняя граница интервала pH определяется условием существования гидроксида железа $Fe(OH)_2$. Верхняя граница зависит от устойчивости продукта взаимодействия частиц металла, образующихся при восстановлении гипофосфитом в щелочном растворе.

Механизм образования фазы оксида железа включает стадию восстановления гипофосфитом в щелочной среде согласно реакции:

$$2Fe(OH)_2 + Na_2HPO_4 + 2NaOH = 2Fe + Na_3PO_4 + 4H_2O \quad (2)$$

Следует отметить, что выбор исходных концентраций солей железа (II) и гипофосфита обусловлен индивидуальной растворимостью ингредиентов и в принципе неограничен при соблюдении условия оптимального соотношения $Fe(OH)_2 \div NaH_2PO_2$ в реакционной смеси.

Образование магнитной формы γ-Fe_2O_3 в водном щелочном растворе происходит в присутствии Na-гиалуроната. Роль полисахарида при образовании магнитной γ-Fe_2O_3 в водном растворе состоит в стабилизации зародышей фазы металлического железа, образующейся в результате реакции (1), за счет торможения процессов агломерации и сращивания кристаллитов, с одной стороны, и ингибирования спонтанного окисления металлического железа в водной среде в присутствии растворенного кислорода в соответствии с уравнением реакции:

$$2Fe + 3H_2O = Fe_2O_3 + 3H_2 \quad (3)$$

Синтез был осуществлен в пяти экспериментах, в каждом из которых варьировалась количество взятой соли Мора в зависимости от заданного

соотношения звеньев полимера к ионам Fe^{2+}. Данные о количественных характеристиках полученных соединений приведены в таблице 1.

О направлении прохождения реакции судили по окрашиванию реакционного раствора в красно-коричневый цвет. При использовании таких концентраций были получены только водорастворимые продукты. С помощью проточного диализа из растворов были удалены низкомолекулярные соединения. После лиофильной сушки были получены красно-коричневые порошки железосодержащих композиционных материалов. Представляло интерес выяснить содержание железа в полученных нанокомпозиционных материалах на основе гиалуроновой кислоты.

Содержание железа в полученных образцах определяли спектрофотометрически с использованием сульфосалициловой кислоты, образующей соль с ионами железа (III). В ионизированную форму металлсодержащие частицы переводили путём обработки композитов концентрированной серной кислотой. Полученные при этом растворы имели красно-фиолетовый цвет разных оттенков, зависящих от содержания железа в образце.

Содержание железа в полученных композиционных материалах закономерно возрастает при увеличении содержания соли Мора (таблица 1).

Таблица 1. Содержание исходных компонентов в реакционной смеси и содержание железа в продуктах.

Образец	Количество Na-Гиалур, 10^{-3} моль-экв	Количество $(NH_4)_2Fe(SO_4)_2 \cdot 6H_2O$, 10^{-3} моль	Отношение моль Na-Гиалуронат/ $(NH_4)_2Fe(SO_4)_2 \cdot 6H_2O$	Содержание железа, вес%
I	0.033	0.0083	4:1	3.1
II	0.033	0.0165	2:1	5.7
III	0.033	0.033	1:1	9.8
IV	0.033	0.066	1:2	17.6
V	0.033	0.10	1:3	23.1

Заметим, что полученные количественные характеристики хорошо воспроизводятся при повторном синтезе. Следовательно, варьируя условия синтеза, можно регулировать содержание неорганической фазы в нанокомпозиционных материалах.

Для визуализации полученных композитов был использован метод ПЭМ. Для сравнения были взяты растворы нанокомпозитов с минимальным и максимальным содержанием магнитной фазы (рис. 1).

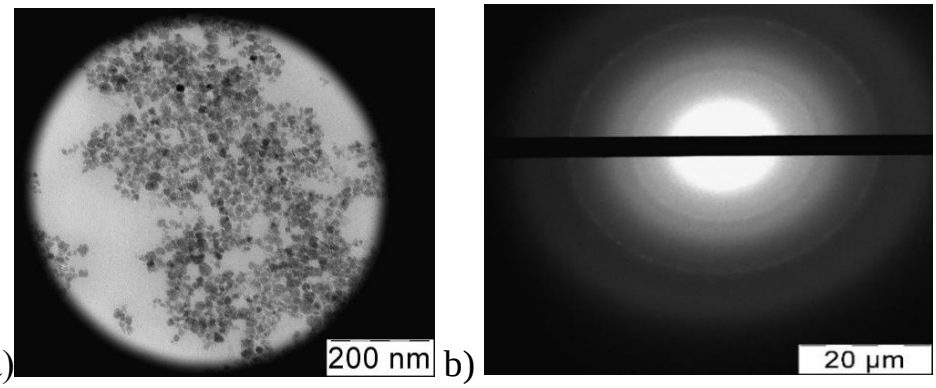


Рисунок 1. ПЭМ-изображение нанокомпозита с содержанием железа 3.1 вес %.

Размер обнаруженных тёмных контрастных наночастиц варьируется в диапазоне от 3 до 20 нм в диаметре. При этом средний размер исследуемых наночастиц составляет 10 нм. Следует отметить, что в зависимости от условий синтеза композиционного материала изображения наночастиц, полученные методом просвечивающего электронного микроскопа принципиально не отличаются друг от друга. Установлено также, что размер наночастиц остаётся постоянным при изменении соотношения компонентов реакционной смеси.

Для определения структурных характеристик наночастиц в составе магнитных микрогелей использовали электронограммы. Полученные дифрактограммы представляют собой совокупность ярких относительно тонких концентрических колец. Подобные дифрактограммы свидетельствуют о наличии кристаллической фазы, которую образуют полученные контрастные наночастицы. Полученные электронограммы позволили рассчитать межплоскостные расстояния кристаллических решеток неорганических наночастиц, представленные в таблице 2.

Сравнение полученных данных с табличными значениями для эталонного образца железосодержащих соединений показало, что экспериментальные значения могут соответствовать кристаллической структуре маггемита (γ-Fe_2O_3).

Для подтверждения формирования маггемита был использован метод мёссбауровской спектроскопии.

Таблица 2. Межплоскостные расстояния для наночастиц в композитах: экспериментальные данные и эталонный образец.

Hkl	d_{exp}, Å	d(γ-Fe_2O_3), Å
111	4.834	4.822
220	2.955	2.953
311	2.519	2.517
400	2.090	2.088
422	1.705	1.704
440	1.474	1.475

Мессбауэровский спектр железосодержащего образца на основе Na-Гиалуроната представляет собой суперпозицию двух секстетов магнитной сверхтонкой структуры и квадрупольного дублета (рис. 2).

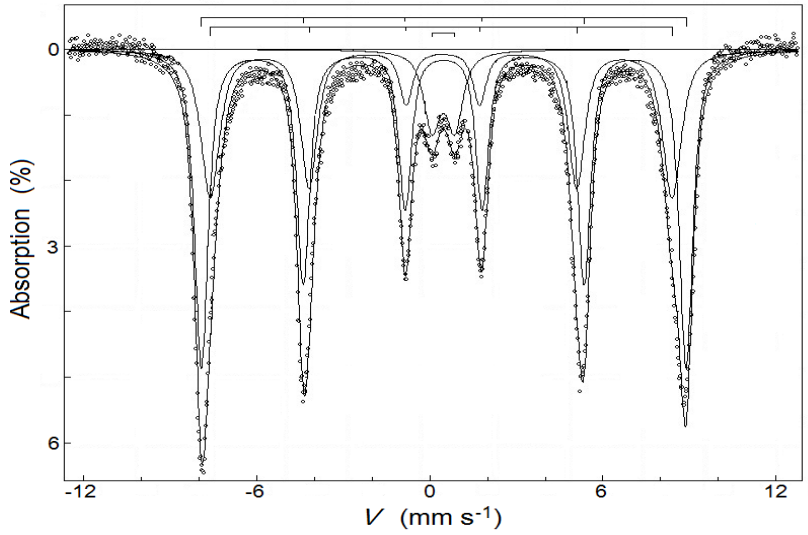


Рисунок 2. Мёссбауэровский спектр магнитного образца на основе Na-Гиалуроната, содержащего 23,1 % вес.

Параметры секстетов характеризуются изомерным сдвигом □A = 0,41□0,01 мм/с. В свою очередь, значение магнитного поля на ядре 57Fe HA = 497□3 кЭ, ширина линии на полувысоте WA = 0.75 □0,03 мм/с, спектральный вклад SA = 38 %; □B = 0,46□0,01 мм/с, HB = 522□3 кЭ, WA = 0.54 □0,03 мм/с, SB = 55 %) и дублета (□ = 0,41□0,01 мм/с, квадрупольное расщепление □E = 0,72□0,02 мм/с , WA = 0.54 □0,02 мм/с, S = 7 %). Следует отметить, что указанные характеристики спектра являются характеристическими для наночастиц γ-Fe_2O_3, проявляющих суперпарамагнитные свойства. Известно, что в высокодисперсных образцах оксидов железа магнитное поле, *H,* на ядрах ^{57}Fe отличается в меньшую

сторону от значения *H*, установленного для крупнокристаллических веществ при данной температуре. При этом отклонение от стандартного значения тем больше, чем меньше размер частиц.

Кроме того, обнаруженное существенное увеличение ширины линий (*W*) секстетов определяется также неоднородностью гранулометрического состава исследуемого образца и отражает распределение значений *H* для катионов Fe^{3+} в тетраэдрической (A) и октаэдрической (B) позициях.

Присутствие в спектре квадрупольного дублета означает, что исследуемый образец содержит фракцию очень мелких частиц (предположительно d~4 нм), для которых частота суперпарамагнитной релаксация магнитных моментов катионов выше частоты ларморовой прецессии ядерного спина.

Следует отметить, что в полученном мессбауэровском спектре исследуемого образца не наблюдается присутствия секстета, который характеризует «промежуточную» степень окисления Fe^{2+}/ Fe^{3+} ($\delta > 0.6$ мм/с) и отчётливо проявляется спектре Fe_3O_4.

Полученный результат свидетельствует о том, что в исследуемом образце не обнаружено примеси фазы Fe_3O_4. На основании совокупности данных РФА и Мессбауэровской спектроскопии установлено, что неорганическая компонента, входящая в состав композитов на основе Na/Гиалуроната представляет собой маггемит.

Для определения магнитных свойств были выбраны образцы 2–5, характеризующиеся содержанием магнитной фазы от 5.7 до 21.7 % вес. Для измерений магнитных свойств из каждого образца вырезался плоский диск с диаметром 3–4 мм и закреплялся на кварцевом держателе таким образом, чтобы плоскость образца была сонаправлена с направлением внешнего магнитного поля. Графики зависимости намагниченности образцов с различным содержанием железа представлены на рис. 3.

Из рисунка видно, что композитные материалы Na-гиалуронат−маггемит проявляют ферромагнитное поведение с различными магнитостатическими характеристиками (коэрцитивная сила, остаточная намагниченность, намагниченность насыщения, коэффициент прямоугольности) при изменении концентрации железа. Петли гистерезиса композитных образцов являются насыщенными.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что по мере увеличения магнитных компонентов в композитах намагниченность насыщения закономерно увеличивается от 0.2 до 1 Эмю/г, соответственно.

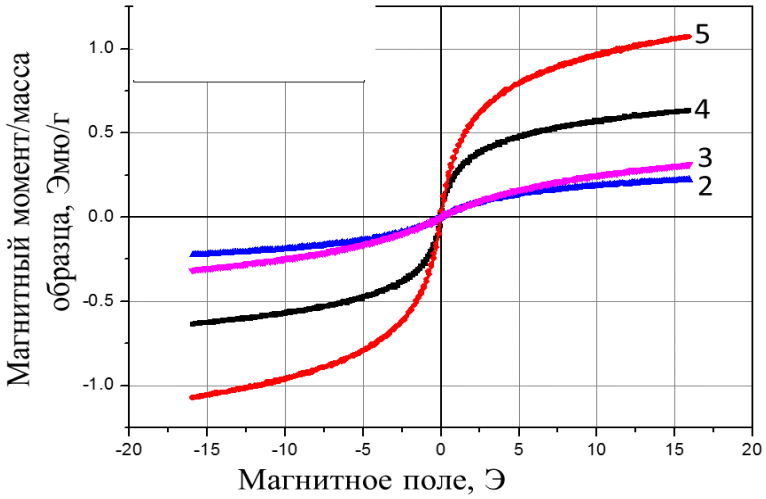


Рисунок 3. Удельная намагниченность композиционных материалов Na-гиалуронат–маггемит с различным содержанием неорганической фазы: 2) 5.7 % вес.; 3) 9.8 % вес.; 4) 17.6 % вес.; 5) 23.1 % вес. T=300K.

При этом значение коэрцитивной силы, а также остаточной намагниченности практически не зависят от содержания магнитной фазы в композитах и составляют ~0.2 кЭ и 0.2 Эмю/г, соответственно. На основе всех данных можно сделать вывод о том, что все полученные магнитные материалы являются магнитомягкими.

Для получения информации о иорфологии нанокомпозитов использовали метод СЭМ [4]. С помощью сканирующего электронного микроскопа были получены сведения о морфологии и надмолекулярной структуре композитов на основе Na-гиалуроната, содержащих 9.8 и 17.6 % вес. магнитной фазы (рис. 4).

Установлено, что в процессе синтеза нанокомпозитов, содержащих наночастицы маггемита, стабилизированных Na-гиалуронатом, происходит формирование надмолекулярной микропористой структуры. В свою очередь, микропористая структура, обусловлена появлением индивидуальных частиц композитов Na-гиалуронат–маггемит, которые препятствуют формированию сплошной плёнки, характеризующей морфологию и надмолекулярную структуру исходного Na-гиалуроната. Формирование плёнки обусловлено реализацией системы внутри- и межмолекулярных водородных связей между макромолекулами Na-гиалуроната.

Индивидуальные частицы полисахарида характеризуются сферической морфологией, их диаметр составляет ~ 150 нм.

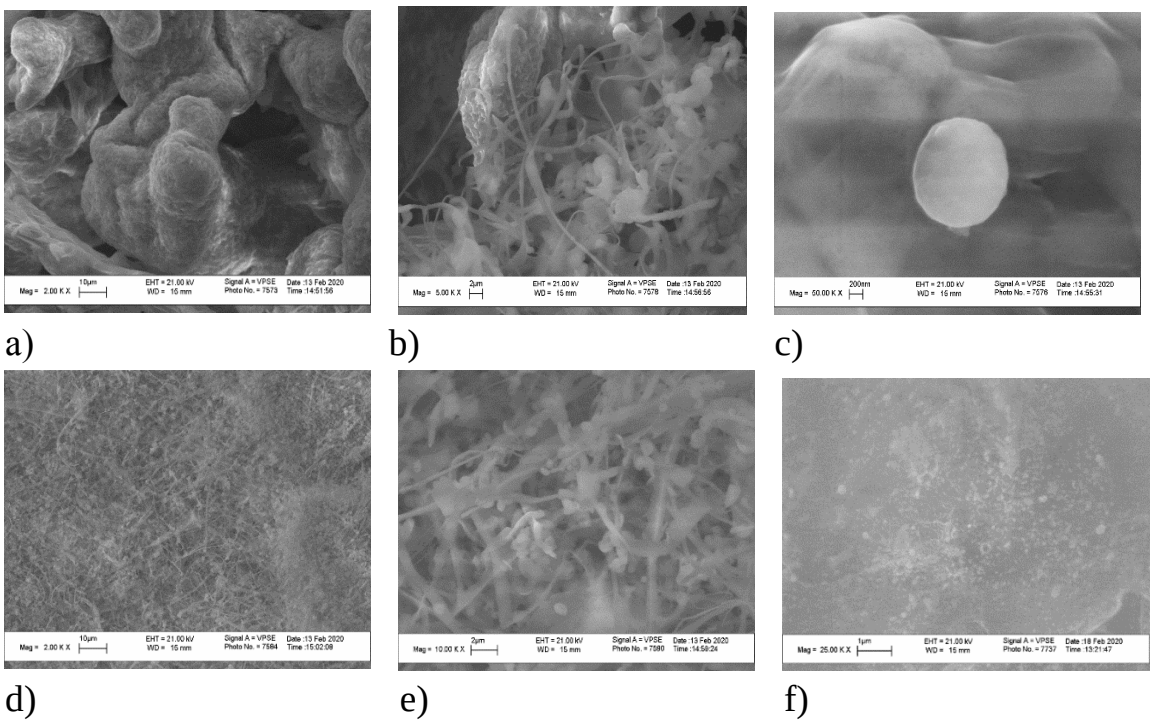


Рисунок 4. СЭМ-изображения в различных масштабах (a, b, c) нанокомпозита с содержанием железа 9.8 % вес.; (d, e), нанокомпозита с содержанием железа 17.6 % вес.; исходного Na-гиалуроната (f).

Обнаружено также, что исследуемые образцы магнитных нанокомпозитов, предположительно, содержат как отдельные частицы композитов в виде сферических частиц диаметром 200 нм, так и их ассоциаты в виде сферических частиц, с диаметром 500 нм.

Формирование нанокомпозитов происходит за счёт образования мостиковых связей между участками макромолекул полисахарида через поверхность наночастиц оксида железа (рис.5).

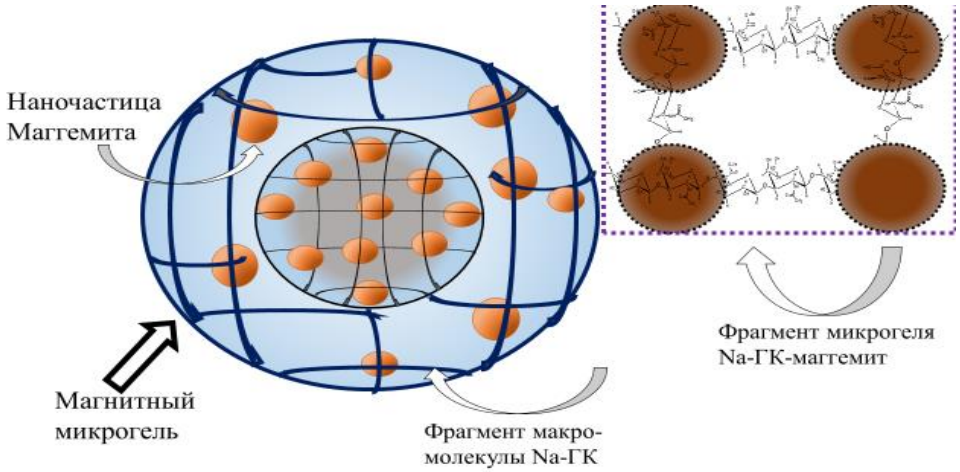


Рисунок 5. Схематическое изображение частицы нанокомпозита Na-гиалуронат–маггемит.

Следует также отметить, что функциональные группы полисахарида, не участвующие в стабилизации наночастиц, экспонированы наружу и обеспечивают высокую растворимость в воде полученных нанокомпозитов.

В работе предложен одностадийный способ получения полимерных магнитомягких нанокомпозитов на основе натриевой соли гиалуроновой кислоты и наночастиц маггемита. Получены водорастворимые нанокомпозиты с различным содержанием магнитной неорганической фазы. Методом просвечивающей электронной микроскопии показано, что во всех полученных композитах размер неорганических наночастиц не зависит от условий получения и составляет около 10 нм. Методом мёссбауровской спектроскопии установлено, что наночастицы неорганической фазы демонстрируют суперпарамагнитные свойства; при этом в мёссбауэровском спектре присутствует квадрупольный дублет, свидетельствующий о том, что исследуемый образец содержит фракцию частиц d~4 нм, для которых частота суперпарамагнитной релаксация магнитных моментов катионов выше частоты ларморовой прецессии ядерного спина. В полученном мёссбауэровском спектре исследуемых образцов не наблюдается присутствия характерных пиков, характеризующих «промежуточную» степень окисления Fe^{2+}/ Fe^{3+} ($\delta > 0{,}6$ мм/с), что свидетельствует о том, что в ходе проведения реакции была получена магнитная модификация оксида железа (III) – маггемит. Методом магнитометрии установлено, что по мере увеличения магнитной компоненты в полученных композитах, намагниченность насыщения закономерно увеличивается, а значения коэрцитивной силы и остаточной намагниченности практически не зависят от содержания магнитной фазы в композитах.

Литература

1. В.Н. Никифоров, Медицинские применения магнитных наночастиц, Известия академии Инженерных Наук им. А.М. Прохорова (1), 23-34, 2013
2. J.K. Vassiliou, V. Mehrotra, M.W. Russell and E.P. Giannelis. Red Shift in Optical Absorption Tall and Superparamagnetism of gamma-Fe_2O_3 Nanoparticles in a Polymer Matrix, page 20-30, 1993
3. Spiridonov V.V., Panova I.G., Makarova L.A., Zezin S.B., Novakova A.A., Baluyan T.G., Sybachin A.V., Kuznetsov V.V., Yaroslavov A.A.: Magneto-sensitive hybrid nanocomposites of water-soluble sodium alginate cross-linked with calcium ions and maghemite, Express polymer Letters, 12, 452-461, 2018

4. Joseph I. Goldstein, Dale E. Newbury, Patrick Echlin, David C. Joy, Charles Fiori, Eric Lifshin, «Scanning Elector Microscopy and X-Ray Microanalysis», New York and London, page 190-296, 1981

УСУЛИ БА ДАСТ ОВАРДАНИ НАНОПОРЧАҲОИ ОКСИДИ МАГНИТИИ ОҲАН (γ-Fe_2O_3), КИ БО МАТРИТСАИ БИОПОЛИМЕРИ УСТУВОР КАРДА ШУДААСТ

Зоирова З.О., Кнотко А.В., Зезин С.Б., Афанасов М.И., Макарова Л.А., Спиридонов В.В.
ДДМ ба номи М.В. Ломоносов

Аннотатсия. *Барои тайёр кардани нанозаррачаҳои магнитии оксиди оҳан (маггемит, γ-Fe_2O_3), ки бо гиалуронати натрийи полиэлектролити анионӣ устувор карда шудаанд, техника таҳия шудааст. Синтези оксиди оҳан (III) - γ-Fe_2O_3 бо роҳи баркароркунии гипофосфити натрий дар ҳарорати хонагии ионҳои дувалентаи оҳан (дар шакли намаки Мор) дар ҳузури Na-гиалуронат ҳамчун матритсаи устуворкунанда, инчунин оксигени хаво дар мухити ишкорӣ ба амал меояд. Ҳузур ва паҳншавии γ-Fe_2O_3 дар тамоми ҳаҷм тавассути сканеркунии микроскопияи электронӣ (SEM) исбот шудааст. Спектроскопияи Мессбауэр мавҷудияти Fe^{3+}-ро нишон дод. Мазмуни нанозаррачаҳои магнитӣ тавассути спектрофотометрияи ултрабунафш вобаста ба таносуби ҷузъҳои омехтаи реаксия муайян карда шуд. Хусусиятҳои магнитии нанокомпозитҳои ба даст овардашуда тавассути магнитометрия тафтиш карда шуданд.*
Калидвожаҳо: *намаки натрийи, кислотаи гиалурон, маггемит, магнитометрия, микроскопияи электронии интиқол, микроскопияи электронии сканерӣ, спектроскопияи Мессбауэр.*

METHOD FOR PRODUCING MAGNETIC NANOPARTICLES OF IRON OXIDE (γ-Fe_2O_3), STABILIZED BY BIOPOLYMER MATRIX

Zoirova Z.O., Knotko A.V., Zezin S.B., Afanasov M.I., Makarova L.A., Spiridonov V.V.
Lomonosov Moscow State University

Annotation. *A technique for the preparation of magnetic nanoparticles of iron oxide (maghemite, γ-Fe2O3) stabilized with anionic polyelectrolyte sodium hyaluronate was developed. The synthesis of magnetic iron oxide was carried out using the reduction of Fe^{2+}-ions containing Mohr's salt with sodium hypophosphite at room temperature in an alkaline medium in the presence of Na-Hyaluronate as a stabilizing matrix as well as atmospheric oxygen. The resulting nanoparticles were visualized by transmission electron microscopy. The nature of the magnetic phase was confirmed by the method of Mössbauer spectroscopy. The content of magnetic nanoparticles was determined by UV-spectrophotometry depending on the ratio of the components in the reaction mixture. The magnetic properties of the obtained nanocomposites were investigated by means of magnetometry.*
Keywords: *sodium salt of hyaluronic acid, maghemite, magnetometry, transmission electron microscopy, scanning electron microscopy, Messbauer spectroscopy, light scattering.*

Сведения об авторах*:* Зоирова Зухро Одиловна - студентка 2 г/о магистратуры Факультета наук о материалах МГУ имени М.В. Ломоносова (г.Москва, РФ). E-mail: zoirovazuhra@mail.ru.

Спиридонов Василий Владимирович - к.х.н., доцент кафедры ВМС Химического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.
Кнотько Александр Валерьевич - д.х.н., профессор Факультета наук о материалах МГУ имени М.В. Ломоносова (г.Москва, РФ).
Зезин Сергей Борисович - к.ф.-м.н., с.н.с. кафедры ВМС Химического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (г.Москва, РФ).
Афанасов Михаил Иванович - д.х.н., профессор кафедры радиохимии МГУ имени М.В. Ломоносова (г.Москва, РФ).
Макарова Людмила Александровна - к.ф.-м.н., ассистент кафедры магнетизма Физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (г.Москва, РФ).

УДК 669.054.669.713

ГЕОЛОГИЧЕСКИЕ И ХИМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КИАНИТ-СИЛЛИМАНИТ ГЛИНОЗЕМСОДЕРЖАЩЕГО СЫРЬЯ ЗАПАДНОГО ПАМИРА

Мирзоев Б.[1], Бахтовари М.[2], Алишери З.[2], Пираков Г.[3]
Филиал МГУ имени М.В. Ломоносов в г. Душанбе[1]
Таджикский государственный педагогический университета имени С. Айни[2]
Главное управление геологии при Правительстве РТ[3]

Аннотация. *В статье рассматривается геология, минералогия, химический состав и способы обогащения алюмосодержащих минералов Шахдаринского и Мургабского месторождений кианит-силлиманита. После дробления, измельчения и механического обогащения сырьё подвергалось ситовому анализу. Процесс обогащения был проведен на концентрационном столе СКЛ-2. Целью дальнейшей технологической переработки сырья является получение технического глинозема, для которого проведено сернокислотное разложение в зависимости от степени извлечения основных компонентов при различных условиях. Минералогический и химический анализы исходного сырья показали, что в основном оксид алюминия содержится в составе минералов кианита и силлиманита.*
Ключевые слова: *минералы, кианит, силлиманит, мусковит, амфибол, биотит, слюдистые минералы, механическое обогащение, метаморфическая порода.*

Для определения наиболее обогащённых мест залегания глиноземсодержащего сырья была организована поисковая группа, которая провела поисковые работы глиноземсодержащих пород на территории Мургабского и Рошткалинского районов Горно-Бадахшанской автономной области Республики Таджикистан. Рельеф района высокогорный, резко расчлененный с узкими долинами и крутыми склонами. Абсолютные отметки высот колеблются от 300 м. до 6510 м. (пик К. Маркса). Относительные превышения водоразделов над днищами долин достигают от 1000 до 2000 м.

В пределах рассматриваемой площади распространены переслаивающиеся биотит-гранатовые, амфибол-биотит-гранатовые, дистеновые, силлиманитовые, гранатовые сланцы и доломитовые мрамора. Также встречаются линзы и пластовые залежи кианит-силлиманит-гранатовых амфиболитов. Гнейсы с силлиманитом и кианитом образуют прослои мощностью от нескольких метров до нескольких десятков метров среди прочих разновидностей гнейсов, причем силлиманит встречается чаще, чем кианит.

Кианит и силлиманит содержащие гнейсы имеют, по-видимому двоякий способ образования. С одной стороны, отмечаются пачки гнейсов с этими минералами мощностью до нескольких десятков метров. Это плотные, слабо катализированные породы, образовавшиеся при региональном метаморфизме гнейсов, где породы превращены в мелиниты, в которых появляется вторичный силлиманит.

Образование описываемого минерала в данном случае обусловлено вероятно, процессами динамометаморфизма, когда в локальных участках возникали высокие давления и температуры, необходимые для образования силлиманита и кианита. В результате поисковых работ найдены основные накопления кианит и силлиманита на Шахдаринском, Мургабском и Вянджском месторождениях, из которых были взяты несколько технологических проб по 10 кг с целью дальнейшего получения технического глинозема и других полезных компонентов.

Известно, что основным сырьём для получения оксида алюминия в настоящее время является высококачественный боксит, промышленные запасы которых ограничены и в связи с высоким темпом роста производства алюминия год за годом истощаются. В связи с этим, во всем мире внимание учёных приковано к исследованиям по разработке эффективных способов переработки высококремнистого, не бокситового сырья, такого как силлиманит, кианит, нефелин, мусковит, ставролит, каолин, глины, зола и др., запасы которых имеются в достаточно больших количествах и их месторождения повсеместно распространены. Эти виды сырья, несмотря на низкое содержание глинозема, имеют в своем составе помимо глинозема ещё и другие полезные компоненты. Для их промышленной переработки необходима разработка комплексной безотходной технологии с получением основных компонентов, входящих в состав руды. С этой точки зрения особый интерес представляют силлиманит, кианит, нефелин и мусковитовые месторождения Таджикистана, которые являются комплексным сырьем, позволяющим получать разнообразные ценные

продукты: глинозем, соду, поташ, цемент, соли алюминия, калия, натрия и др. [1, 2].

В настоящее время производство глинозема в республике осложнено двумя проблемами. Во-первых, Таджикистан не обладает значительными запасами высококачественных глиноземных руд, переработка которых обеспечила бы большой объём потребности Таджикского алюминиевого завода. Во-вторых, переработка имеющихся глиноземсодержащих руд в настоящее время экологически и экономически нецелесообразна, как так на данный момент отсутствуют эффективные технологии их переработки. Процесс комплексной переработки низкокачественных глиноземсодержащих руд и фторсодержащего сырья кислотными и спекательными способами является целесообразным, так как его реализация не вызывает значительного загрязнения окружающей среды и необходимости использования нового оборудования и технологии [3-5].

После дробления и измельчения технологической пробы было проведено обогащение породы, которое производилось на электромагнитном сепараторе и концентрационном столе СКЛ-2. Как показали расчёты для получения обогащённых кианита и силлиманита этот метод является дорогим по сравнению с другими методами. Поэтому нами был выбран более дешевый метод обогащения, учитывающий твёрдость каждого минерала, а также для удешевления технологического процесса проводилось механическое обогащение. После дробления и размола, технологическую пробу пропустили через сито с размером ячеек: от 2,5; 0,56; 0,60; 0,063 мм. Механическое обогащение сырья с размерами от 2,5 до 0,60мм является самым оптимальным условием получения концентрата из алюмосодержащего сырья. После тщательного перемешивания массы отбиралась усредненная проба с целью проведения полного химического и минералогического анализа исходной породы (без обогащения). Результаты анализов приведены в таблице 1. Результаты анализов обогащенного полученного концентрата приведены в таблице 2. По результатам химического анализа установлено, что силлиманит и кианит по химическому составу почти одинаковые и являются высококремнеземистыми минералами с содержанием SiO_2 39,72 – 43,30%, а содержание глинозема исходного сырья колеблется от 31,7 до 39,8% (в отдельных пробах до 42,5%). Таким образом можно считать, что полученные в оптимальных условиях при механическом обогащении кианит и силлиманит являются выгодним сырьем для получения технического глинозема и других полезных компонентов.

Таблица 1. Химический состав исходного кианита и силлиманита

№ пп	Массовое содержание %								
	SiO_2	TiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	MrO	MgO	CaO	K_2O	Na_3O
1.	40,30	1,99	39,80	7,20	0,02	0.35	2.37	3.47	2.83
2.	39,72	1,90	35,50	6,31	0.10	0.18	1.77	3.98	2.64
3.	41,56	1,2	33,60	5,48	0.15	0.50	0.98	4.31	1.92
4.	43,30	0,9	31,7	6,5	0,05	0,52	0,85	4,53	1,46

Таблица 2. Зависимость химического состава кианита и силлиманита от гранулометрического состава пробы

Размер ячейки (мм)	Массовое содержание %								
	SiO_2	TiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	MrO	MgO	CaO	K_2O	Na_3O
2,5	43,88	1,89	47,06	2,80	0,012	0.48	2.37	3.37	2.33
0,56	41,32	1,60	54,5	2,31	<0.01	0.55	1.77	3.98	1.64
0,60	51,68	1,2	20,6	5,4	0.059	1.60	0.98	4.31	0.92
0,063	60,98	0,85	2,4	6,8	0.062	1.64	0.96	4.62	0.94

Для подтверждения полученных данных были проведены рентгенофазовые анализы выделенных кианита и силлиманита, которые в свою очередь подтверждают достоверность полученных результатов. Рентгенофазовые анализы проводились на установке «Дрон-3» Си-анодным излучением, Ni–фильтром в лаборатории Института геологии НАНТ. Результаты анализов приведены на рис. 1.

Разработка эффективных способов утилизации промышленных отходов и применение их в качестве реагентов при комплексной переработки местных нетрадиционных видов минерального сырья является важной и актуальной задачей научно-технического прогресса. Исходя из вышеизложенного, нами сделаны попытки использовать промышленные отходы, отработанную серную кислоту и отработанный фторид алюминия для переработки местного алюмосодержащего сырья, запасы, которого значительны и которые дают возможности извлечения основных полезных компонентов из состава исходной руды.

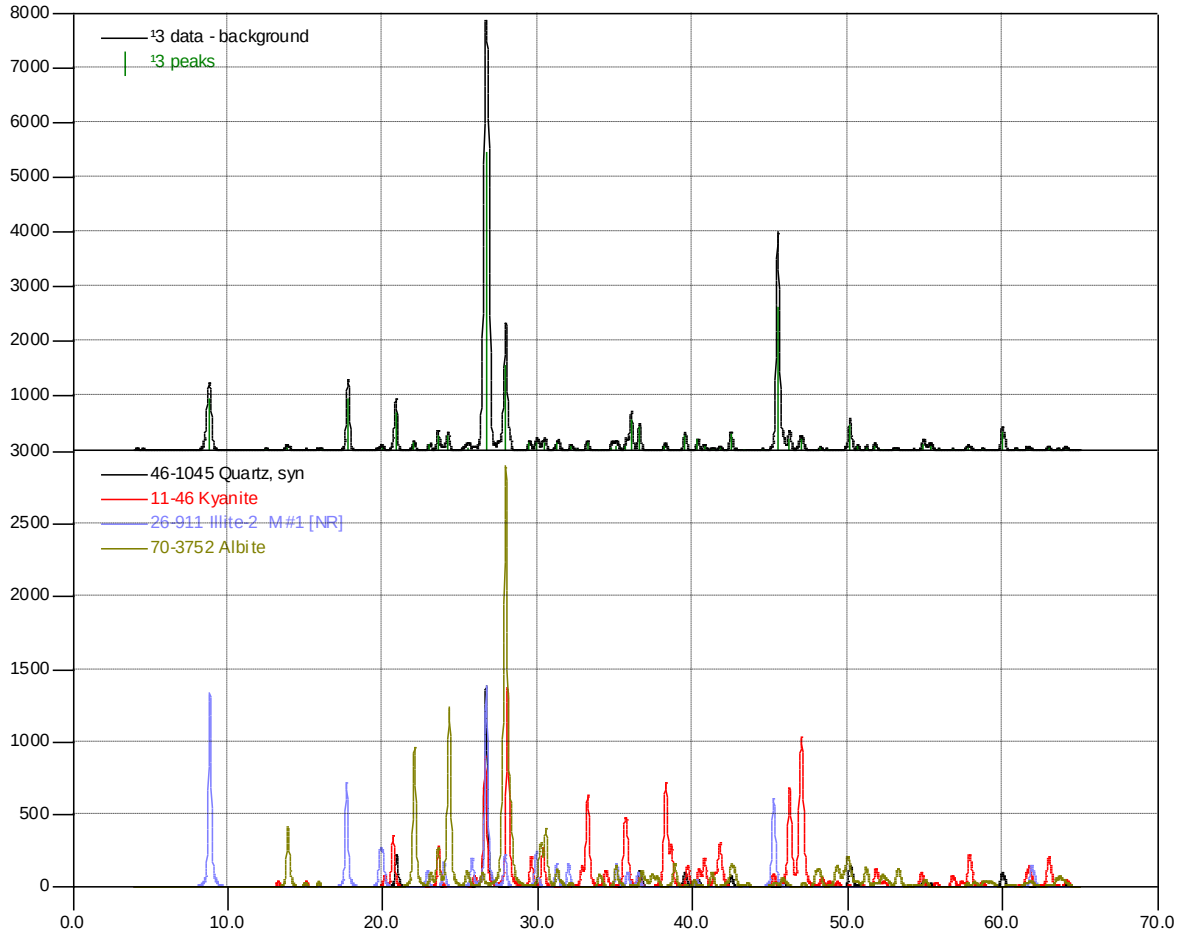


Рисунок 1. Зависимость степени обогащения Al_2O_3 от гранулометрического состава (0,56 мм). 1а – шлих после обогащения, 1б –концентрат кианита и силлиманита.

Целью проводимых исследований являлась разработка основ рациональной технологии переработки кианит-силлиманита, для чего были изучены различные варианты с использованием различных производственных отходов. В качества восстановителей были использованы H_2SO_4 и AlF_3, которые являются отходами хлорорганического производства. Для проведения кислотного способа получения глинозема, пробы были взяты из ранее подготовленного обогащенных кианита и силлиманита с размерами частиц 2,5-0,56мм.

По сернокислотному способу было приведено сернокислотное разложение обогащённых кианита – силлиманита без добавок отходов и других компонентов. Процесс изучался в термостатированном реакторе с мешалкой. Кислота расходовалась в стехиометрических количествах, рассчитанных по проходящим реакциям. Механизм вскрытия процесса извлечения в раствор оксидов алюминия, железа, калия и других компонентов в виде сульфатов определяется рядом внешних факторов, а именно температурным режимом, продолжительностью процесса,

концентрацией и дозировкой серной кислоты. Проведенными опытами изучались зависимость степени извлечения глинозема и других полезных продуктов от влияния температуры, продолжительности процесса, концентрации и дозировки кислоты. Даже при оптимальных условиях степень извлечения основных компонентов не превышала 15-20%. Это показывает, что процесс сернокислотного разложения кианит – силлиманита протекает недостаточно полно без добавок вспомогательных компонентов.

Был изучен спекательный способ переработки кианит-силлиманита с AlF_3 при различных температуре (табл. 3).

Таблица 3. Зависимость извлечения основных компонентов от температуры спекания кианит-силлиманита с отходами производства

№	Темпер. спекания ^0C	Продолж. спекания, мин.	Темпер. выщел., ^0C	Время выщел., мин.	Степень извлечения компонентов в раствор,%			
					Al_2O_3	Fe_2O_3	Na_2O	K_2O
1	50	180	98	60	20,4	34,3	28,5	18,3
2	100	180	98	60	40,94	48,63	30,9	23,2
3	200	180	98	60	63,7	62,8	35,2	29,8
4	300	180	98	60	71,8	72,7	48,3	32,6
5	400	180	98	60	81,9	99,8	60,9	56,1
6	600	180	98	60	89,5	99,8	90,2	75,3

Как видно, зависимость выхода Al_2O_3 объясняется тем, что при повышении температуры взаимодействие между компонентами возрастает и извлечение основных компонентов достигает следующих величин: Al_2O_3-89,5; Fe_2O_3 – 99,8; Na_2O - 90,2; K_2O – 75,3. Дальнейшее повышение температуры спекания не даёт значительных результатов.

Зависимость степени извлечения оксидов алюминия, железа, натрия и калия от дозировки AlF_3 представлена в табл. 4.

Таблица 4. Зависимость степени извлечения оксидов алюминия, железа, натрия и калия от дозировки AlF_3

№	Дозиров. AlF_3, г	Продолж, спекания, мин	Темпер. выщел., ^0C	Время выщел., мин	Степень извлечения компонентов в раствор%			
					Al_2O_3	Fe_2O_3	Na_2O	K_2O
1	0,1	120	98	60	80,5	94,37	42,5	38,1
2	0,3	120	98	60	91,7	96,6	50,6	40,9
3	0,6	120	98	60	93,9	98,4	52,7	42,1
4	0,8	120	98	60	96,2	99,2	57,4	45,3
5	1,0	120	98	60	98,4	99,6	59,2	47,1

Дозировку производили от 0,1 до 1,0 гр. Как видно из таблицы, при повышении дозировки степень извлечения оксидов Al_2O_3, Fe_2O_3, Na_2O, K_2O возрастает, при этом оптимальная температура была установлена равной 600^0C.

С увеличением длительности спекания от 30 мин до 240мин (табл. 5) при 600^0C извлечение Al_2O_3, Fe_2O_3, Na_2O, K_2O соответственно возрастает от 18,4 до 90,1% от 22,6 до 98,6%, при этом степень извлечения K_2O и Na_20 почти мало зависит от длительности процесса спекания до 180,0 мин. При дальнейшем увеличении длительности процесса, извлечение этих компонентов изменяется незначительно. Для максимального извлечения полезных компонентов достаточно 2-3-х часовой обработки исходной обогащённой руды.

Таблица 5. Зависимость степени извлечения оксидов алюминия, железа, натрия и калия от длительности спекания

№	Продолжит. спекания, в мин.	Дозировка, AlF_3 в гр.	Темпер. выщел., ^{0}C	Темпер. спекания, ^{0}C	Степень извлечения компонентов в растворах,%			
					Al_2O_3	Fe_2O_3	Na_2O	K_2O
1	30	0,3	98	600	18,4	22,6	16,7	12,1
2	60	0,3	98	600	32,6	40,1	29,4	26,3
3	90	0,3	98	600	67,8	77,6	36,1	30,2
4	120	0,3	98	600	84,1	89,4	47,2	42,3
5	180	0,3	98	600	88,9	94,5	55,8	48,3
6	240	0,3	98	600	90,8	98,6	56,2	49,1

Таким образом, в результате выполненных исследований кианита и силлиманита с отходами производства можно рекомендовать следующие оптимальные условия процесса: температура спекания 600^0C; дозировка 0,3 гр. на 1 гр. руды, продолжительность 180-240 мин., размер частиц 2,5-0,60 мм.

Полученные результаты исследований показывают, что переработка местного кианит-силлиманит алюмосодержащего минерального сырья с использованием производственных отходов (H_2SO_4, AlF_3) методом сульфатизации являются целесообразными и дают хорошую степень извлечения глинозема и других полезных продуктов, тем самим снижая себестоимость привозимого оксида алюминия и других полезных компонентов из за рубежа. Физико-химические исследования и разработка

способов обогащения кианит-силлиманит содержащих пород для получения глинозема и других полезных компонентов дадут основу для высокой технологической рентабельности получения глинозема и других полезных компонентов из местного алюмосодержащего сырья.

Литература

1. Смирнов М.Н, Галкина З.С. Получение глинозема и щелочных продуктов из щелочных алюмосиликатных пород способом спекания высоко щелочной шихты. Цветная металлургия: Науч.-техн. бюлл. - М.: №3, 1963, с. 27-34.
2. Мирзоев Б., Сафиев Х.С., Мирсаидов У. Способ переработки низкокачественного глиноземсодержащего сырья.А.с. (СССР) №1668300 опуб. В бюл. № 29. 07.08.91г.
3. Мирзоев Б. Физико-химическая характеристика глиноземсодержащего сырья Курговатского месторождения Таджикистана // Вестник Казанского технологического университета. - Казань, 2018, т. 21, - №7, - с. 62-69.
4. Буданова К.Т Минералого-петрохимическая характеристика высокоглиноземных пород восточной части центрального Памира // Изв. АН РТ, Душанбе, 1993г., - №1, - с.29.
5. Ёров З.Ё., Вольнов Б.А. Полезные ископаемые и перспективы развития горнорудной промышленности Памира. Душанбе-Хорог, 2006г, 154с.

ТАФСИФОТИ ХОСИЯТҲОИ ФИЗИКАВӢ ВА ХИМИЯВИИ МАЪДАНҲОИ АЛЮМИНИДОРИ КИАНИТ-СИЛЛИМАНИТДОРИ ПОМИРИ ҒАРБӢ

Мирзоев Б.[1], Бахтовари М.[2], Алишери З.Г.[2], Пираков Г.[3]
Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар ш. Душанбе[1]
Донишкадаи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С. Айнӣ [2]
Саридораи геологияи назди Ҳукумати Ҷумхурии Тоҷикистон [3]

Аннотатсия. *Дар мақолаи мазкур натиҷаҳои таҳқиқоти хосиятҳои физикавӣ ва химиявии таркиби маъданҳои алюминидори кианит -силлиманит ва роҳҳои гуногуни ғанигардонии онҳо дар шароитҳои муайян оварда шудааст. Инчунин равишҳои технологӣ бо роҳҳои кислотагӣ ва пухтан бо истифодаи партовҳои саноатӣ ва аз он ҳосил намудани гилхоку дигар махсулотҳои даркорӣ нишон дода шудааст.*

Калидвожахо: *Минералҳо, кианит, силлиманит, мусковит, амфибол, биотит, қабатҳои сулёдадор, ганигардонии механикӣ, метаморфӣ.*

PHYSICAL CHEMICAL HARACTERISTICS OF KIANITE SILIMANITE ALUMINA CONTAINING RAW MATERIALS FRCM THE WESTERN PAMIRS

MirzoevB.[1], Bakhtovari M.[2], Alisheri Z.[2], Pirakov G.[3]
Lomonosov Moscow State University in Dushanbe[1]
Tajik state pedagogical University named after S. Aini[2]
Main Department of Geology under the Government of Tajikistan[3]

Annotation. *What this article deals with is the study of the geological, mineralogical, chemical composition and methods of enrichment of kainite - siallimanite of aluminum-containing minerals of the Shahdara and Murgab deposits of Tajikistan. After crushing, grinding, and mechanical enrichment, the processed raw material was subjected to digital analysis depending on the granular composition of the raw material on a concentration table in order to study the production of technical alumina. Mineralogical and chemical analyzes of the feedstock showed that the main carrier of alumina in the deposit is the kyanite-sillimanite mineral.*
Keywords: *minerals, kyanite, sillimanite, muscovite, amphibole-biotite-garnet, basal reflexes, impurities, micaceous minerals, mechanical enrichment, light and heavy fractions, metamorphic rocks.*

Сведения об авторах**: Мирзоев Баходур** – к.х.н., старший научный сотрудник отдела науки, иноваций и международных связей Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе.
Бахтовари Мирзовали – аспирант кафедры экспериментальной физики Таджикского педагогического университета им. С. Айни.
Алишери Зукриё – старший преподаватель кафедры эксперементальной физики Таджикского педагогического университета им. С. Айни.
Пираков Гулмахмад – сотрудник Главного управления геологии при Правительстве РТ.

УДК 547.785.51

СИНТЕЗ И ХАРАКТЕРИСТИКА АМИДНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ 2-[2-*n*-АМИНОФЕНИЛ)ЭТИЛ]БЕНЗИМИДАЗОЛА

Мухторов Л.Г.[1], Власова Ю.Н.[1], Никишина М.Б.[1], Каримов М.В.[2], Атрощенко Ю.М. [1], Шахкельдян И.В.[1]
Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого[1]
Филиал национального исследовательского технологического университета «МИСиС» в городе Душанбе[2]

Аннотация. *Практический и теоретический интерес к производным бензимидазола обусловлен их разнообразной физиологической активностью. Целью настоящей статьи явился синтез и изучение спектральных характеристик амидных производных 2-[2-(n-аминофенил)этил]бензимидазола и бензойных и фенилзамещенных алкановых кислот. Целевые соединения были получены взаимодействием малоновой кислоты и n-нитробензальдегида с последующим восстановлением продукта водородом на палладиевом катализаторе, в результате чего была выделена 3-(n-аминофенил)пропановая кислота. Посредством ее конденсации с о-фенилендиамином в среде соляной кислоты получен 2-[2-(n-аминофенил)этил]бензимидазол, который может быть использован в качестве билдинг-блока для дальнейшей функционализации по аминогруппе, а в частности, с помощью реакции ацилирования. Синтезированный гетероциклический амин вводился в реакцию с различными бензойными и фенилзамещенными алкановыми кислотами, карбоксильную группу которых предварительно активировали взаимодействием с 1,1′-карбонилдиимидазолом (КДИ). Контроль за ходом реакции и чистотой получаемых продуктов осуществляли методом ТСХ. Все соединения получены с хорошим выходом. Рассмотрены характеристические*

особенности спектров ^{1}H ЯМР синтезированных амидов. Полученные спектральные данные могут служить источником для надежной идентификации амидов карбоновых кислот и 2-[2-(п-аминофенил)этил]бензимидазола методом ^{1}H ЯМР спектроскопии.
Ключевые слова: *амидные производные, 2-[2-(п-аминофенил)этил]бензимидазол, фенилзамещенные алкановые кислоты, бензойные кислоты, кислотный катализ, ЯМР спектроскопия.*

Введение

Известна антибактериальная активность, в частности, по отношению к бактериям рода *Stafilacoccus* [1], безвредным и болезнетворным кишечным бактериям, таким как *Escherichia coli* [2]. Также в литературных источниках находятся подтверждения и фунгицидной активности, а именно подавление роста грибов рода *Candida* [3, 4]. Соединения, содержащие бензимидазольный фрагмент, способны воздействовать на раковые клетки, проявляя так называемую антипролифе ративную активность (подавление неконтролируемого роста клеток) [5-11], а также на конкретные виды раковых клеток жировой ткани [12] и молочной железы [13]. С другой стороны, амидные производные ароматических кислот образуют достаточно обширный ассортимент лекарственных препаратов: психостимуляторы (фенфлурамин, депранол), антибиотики (левомицетин), антидепрессанты (флуоксетин), противовоспалительные средства (ибупрофен, напроксен), анальгетики (метадон), антигистаминные препараты (цетиризин, аллегра, димедрол) и др. [14].

Следовательно, синтез и изучение свойств структур, содержащих бензимидазольный фрагмент и потенциально обладающих положительными биологическими эффектами, является актуальной задачей медицинской химии.

Экспериментальная часть

Коэффициенты удерживания (R_f) определяли на пластинках Silufol UV-254 при использовании следующих систем элюентов: ацетон-толуол-гексан (1:4:1), толуол-ацетон (1:1), бензол-ацетон (1:1), детектирование УФ светом и парами йода. *Температуры плавления* соединений измеряли на нагревательном столике фирмы Boetius. Скорость нагрева составляла 4 град/мин. *Спектры ЯМР ^{1}H* регистрировали на спектрометре Bruker AC-300 в ДМСО-d_6. Химические сдвиги приведены в миллионных долях (м.д.) в шкале δ относительно гексаметилдисилоксана.

п-Нитрокоричная кислота ***(1)*** была получена по методике [15]. Выход 77%. Т. пл. 283-284°С. ЯМР ^{1}H спектр (δ, м.д.): 13.00 ш.с, 8.24 д (H^3, H^5, J = 8.77 Гц), 7.98 д (H^2, H^6, J = 8.76 Гц), 7.70 д (H^β, J = 16.03 Гц), 6.75 д (H^α, J = 16.03 Гц).

*3-(n-Аминофенил)пропановая кислота (**2**)*. В реактор гидрирования помещали 1,93 г (0,01 моль) *n*-нитрокоричной кислоты, 80 мл метанола и 50 мг катализатора 10%-Pd/C. Восстановление молекулярным водородом проводили при температуре 25-30°С и давлении H_2 276 кПа в течении 1 ч. После отделения катализатора, растворитель отгоняли в вакууме. Выход продукта составил 91%. Т. пл. 128-129°С. ЯМР ^{1}Н спектр (δ, м.д.): 11.96 ш.с, 6.86 д (H^2, H^6, *J* = 8.00 Гц), 6.48 д (H^3, H^5, *J* = 8.01 Гц), 2.64 д (H^β, *J* = 7.93 Гц), 2.42 д (H^α, *J* = 7.93 Гц).

*2-[2-(n-аминофенил)этил]бензимидазол(**3**).* Смесь *о*-фенилендиамина (0.33 моль), 3-(*n*-аминофенил)пропионовой кислоты (0,3 моль) и 5Н HCl кипятят в течение 30-35 часов. По окончании реакции реакционную массу охлаждают, выпавший осадок отфильтровывают. Продукт перекристаллизовывают из 2н HCl, а затем из воды в присутствии активированного угля. Осветленный раствор нейтрализуют водным аммиаком до pH 8-9, осадок отфильтровывают. Выход, %: 75. ЯМР ^{1}Н спектр (δ, м.д.): 3.04-2.89 м (-CH_2CH_2-), 7.44 м (H^7), 7.09 м **(**H^4), 7.44 м (H^6)**,** 7.09 м **(**H^5), 6.47 д ($H^{5'}$, *J* = 8.3 Гц), 6.87 д ($H^{2'}$, $H^{6'}$, *J* = 8.1 Гц), 6.47 д ($H^{3'}$, *J* = 8.2 Гц), 4.40 ш.с.

*Амидные производные 2-[2-n-аминофенил)этил]бензимидазола (**6**).* Навеску 1 ммоль замещенных бензойных кислот растворяют в смеси диоксан : ДМФА (в соотношении 3:1, по объему), при постоянном перемешивании и нагревании до 60°С добавляют 1,1 ммоль КДИ. Реакционную смесь выдерживают в течении 3 часов, после чего добавляют 0,8 ммоль 2-[2-(п-аминофенил)-этил]бензимидазола и перемешивают в течение 2-8 часов (в зависимости от реакционной способности кислоты) при температуре 90 °С. Контроль за ходом реакции осуществляют по ТСХ (элюент $CHCl_3$: MeOH =19:1). По окончании реакции смесь выливают в раствор 3%-ной соды, выпавший осадок целевого амида **6** отфильтровывают, очищают перекристаллизацией из 2-пропанола.

3-метокси-N-(4-(2-(1H-бензо[d]имидазол-2-ил)этил)фенил)бензамид: Выход 71%. Т.пл. 182-184°С. R_f = 0,64. ЯМР ^{1}Н спектр (δ, м.д.): 12.11 ш.с (NH), 10.17 с (NHCO), 7.43 м, 7.09 м**,** 7.67 д (*J* = 8.4 Гц), 7.21 д (*J* = 8.4 Гц), 3.10 с, 7.50 т (*J* = 7.3 Гц), 7.45 м, 7.10 м, 3.85 с.

3-диметиламино-N-(4-(2-(1H-бензо[d]имидазол-2-ил)этил)фенил)бензамид: Т. пл. 215-217^{0}С. R_f = 0,78. Выход, %: 53. ЯМР ^{1}Н спектр (δ, м.д.): 12.00 шс (NH), 9.97 с (NHCO), 7.43 м, 7.10 м, 7.65 д (*J* = 8.4 Гц), 7.21 д (*J* = 8.4 Гц), 3.10 с, 7.28 т (*J* = 7.6 Гц), 7.23 д (*J* = 7.6 Гц), 7.19 с, 6.88 д (*J* = 7.6 Гц), 2.98 с.

3-бром-N-(4-(2-(1H-бензо[d]имидазол-2-ил)этил)фенил)бензамид: Т. пл. 250-252^{0}C. R_f = 0,83. Выход, %: 74. ЯМР ^{1}H спектр (δ, м.д.): 12.16 ш.с (NH), 10.22 с (NHCO), 7.45 м, 7.10 м, 7.65 д (*J* = 8.4 Гц), 7.22 д (*J* = 8.4 Гц), 3.11 с, 8.12 ш.с, 7.93 ш.д (*J* = 7.7 Гц), 7.47 т (*J* = 7.7 Гц).

N-(4-(2-(1H-бензо[d]-имидазол-2-ил)этил)фенил)-4-ацетамидобензамид: Т. пл. 298-300^{0}C. R_f = 0,68. Выход, %: 65. ЯМР ^{1}H спектр (δ, м.д.): 12.13 ш.с (NH), 10.14 с и 9.97 с (NHCO), 7.45 м, 7.10 м, 7.68 д (*J* = 8.4 Гц), 7.20 д (*J* = 8.4 Гц), 3.10 с, 7.89 д (*J* = 8.6 Гц), 7.65 д (*J* = 8.6 Гц), 2.08 с.

4-метил-N-(4-(2-(1H-бензо[d]-имидазол-2-ил)этил)фенил)бензамид: Т. пл. 278-280 ^{0}C. R_f = 0,87. Выход, %: 80. ЯМР ^{1}H спектр (δ, м.д.): 12.13 ш.с (NH), 10.02 с (NHCO), 7.45 м, 7.09 м, 7.67 д (*J* = 8.4 Гц), 7.21 д (*J* = 8.4 Гц), 3.10 с, 7.85 д (*J* = 8.0 Гц), 7.30 д (*J* = 8.0 Гц), 2.40 с.

3,4-диметокси-N-(4-(2-(1H-бензо[d]имидазол-2-ил)этил)фенил)бензамид: Т. пл. 110-112^{0}C. R_f = 0,87. Выход, %: 76. ЯМР ^{1}H спектр (δ, м.д.): 12.13 ш.с (NH), 9.92 с (NHCO), 7.50 м и 7.38 м, 7.10 м, 7.63 д (*J* = 8.4 Гц), 7.20 д (*J* = 8.4 Гц), 3.10 с, 7.60 д (*J* = 8.1 Гц), 7.51 с, 7.02 д (*J* = 8.1 Гц), 3.85 с.

3,4-диэтокси-N-(4-(2-(1H-бензо[d]имидазол-2-ил)этил)фенил)бензамид: Т. пл. 118-120^{0}C. R_f = 0,87. Выход, %: 78. ЯМР ^{1}H спектр (δ, м.д.): 12.13 ш.с (NH), 9.89 с (NHCO), 7.44 м, 7.09 м, 7.63 д (*J* = 8.4 Гц), 7.20 д (*J* = 8.4 Гц), 3.10 с, 7.56 д (*J* = 8.1 Гц), 4.49 с, 7.01 д (*J* = 8.1 Гц), 4.11 кв (*J* = 7.0 Гц), 1.40 т (*J* = 7.0 Гц).

3-фтор-4-метил-N-(4-(2-(1H-бензо[d]имидазол-2-ил)этил)фенил)бензамид: Т. пл. 268-270^{0}C. R_f = 0,83. Выход, %: 72. ЯМР ^{1}H спектр (δ, м.д.): 12.15 ш.с (NH), 10.09 с (NHCO), 7.43 м, 7.09 м, 7.65 д (*J* = 8.4 Гц), 7.21 д (*J* = 8.4 Гц), 3.10 с, 7.71 д.д (*J* = 7.3; 1.5 Гц), 7.67 д.д (*J* = 8.0; 1.5 Гц), 7.41 т (*J* = 7.3 Гц), 2.33 с.

N-[4-(2-(1H-бензо[d]имидазол-2-ил)этил)фенил]-2-фенилацетамид: Т. пл. 244-246^{0}C. R_f = 0,82. Выход, %: 81. ЯМР ^{1}H спектр (δ, м.д.): 12.10 ш.с (NH), 9.97 с (NHCO), 7.42 м, 7.08 м, 7.48 д (*J* = 8.4 Гц), 7.14 д (*J* = 8.4 Гц), 3.06 с, 7.32 д (*J* = 8.0 Гц), 7.29 т (*J* = 8.0 Гц), 7.22 т (*J* = 8.0 Гц), 3.59 с.

N-[4-(2-(1H-бензо[d]имидазол-2-ил)этил)фенил]-3-фенилпропанамид: Т. пл. 233-235^{0}C. R_f = 0,58. Выход, %: 80. ЯМР ^{1}H спектр (δ, м.д.): 12.13 ш.с (NH), 9.77 с (NHCO), 7.48 м, 7.39 м, 7.09 м, 7.46 д (*J* = 8.4 Гц), 7.14 д (*J* = 8.4 Гц), 3.06 с, 7.27 т (*J* = 7.5 Гц), 7.23 д (*J* = 7.5 Гц), 7.16 т (*J* = 7.5 Гц), 2.91 т (*J* = 7.5 Гц), 2.58 т (*J* = 7.5 Гц).

N-[4-(2-(1H-бензо[d]имидазол-2-ил)этил)фенил]-2-феноксипропанамид: Т. пл. 172-174^{0}C. R_f = 0,80. Выход, %: 60. ЯМР ^{1}H

спектр (δ, м.д.): 12.12 ш.с (NH), 9.96 с (NHCO), 7.50 м, 7.39 м, 7.09 м, 7.51 д (*J* = 8.4 Гц), 7.16 д (*J* = 8.4 Гц), 3.07 с, 7.27 т (*J* = 7.9 Гц), 6.93 д (*J* = 7.9 Гц), 6.92 т (*J* = 7.9 Гц).

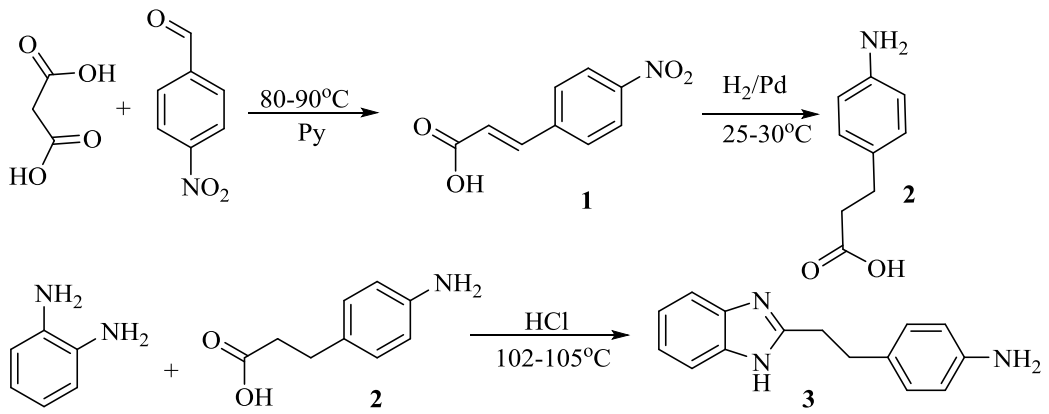
N-[4-(2-(1H-бензо[d]имидазол-2-ил)этил)фенил]-2-феноксиацетамид: Т. пл. 198-200^{0}C. R_f =0,85. Выход, %: 67. ЯМР ^{1}H спектр (δ, м.д.): 12.13 ш.с (NH), 9.93 с (NHCO), 7.50 м, 7.39 м, 7.09 м, 7.53 д (*J* = 8.4 Гц), 7.18 д (*J* = 8.4 Гц), 3.08 с, 7.30 т (*J* = 7.6 Гц), 6.98 д (*J* = 7.6 Гц), 6.96 т (*J* = 7.9 Гц), 4.64 с.

N-[4-(2-(1H-бензо[d]имидазол-2-ил)этил)фенил]-4-хлорфенилкарбамат: Т. пл. 204-206^{0}C. R_f = 0,81. Выход, %: 57. ЯМР ^{1}H спектр (δ, м.д.): 12.12 ш.с (NH), 9.94 с (NHCO), 7.50 м, 7.39 м, 7.09 м, 7.52 д (*J* = 8.4 Гц), 7.18 д (*J* = 8.4 Гц), 3.08 с, 7.32 д (*J* = 8.8 Гц), 7.01 д (*J* = 8.8 Гц), 4.65 с.

Результаты и их обсуждение

В основу получения 2-[2-(*n*-аминофенил)этил]бензимидазола **3** положена трехстадийная схема синтеза, на первой стадии которого осуществлялась конденсация малоновой кислоты и *n*-нитробензальдегида в пиридине при температуре 85-90°C, сопровождающаяся образованием *n*-нитрокоричной кислоты **1** с выходом 85-90% (схема 1). С целью получения 3-(*n*-аминофенил)пропановой кислоты **2** были подобраны условия гидрирования, при которых происходит одновременное восстановление и нитрогруппы, и кратной связи в соединении **1**. А именно, каталитическое восстановление водородом на палладиевом катализаторе в среде метанола при температуре 25-30°C. Выделение кислоты **2** осуществляли концентрированием раствора. Далее продукты восстановления вводили в конденсацию с о-фенилендиамином в среде соляной кислоты при температуре 102-105°C.

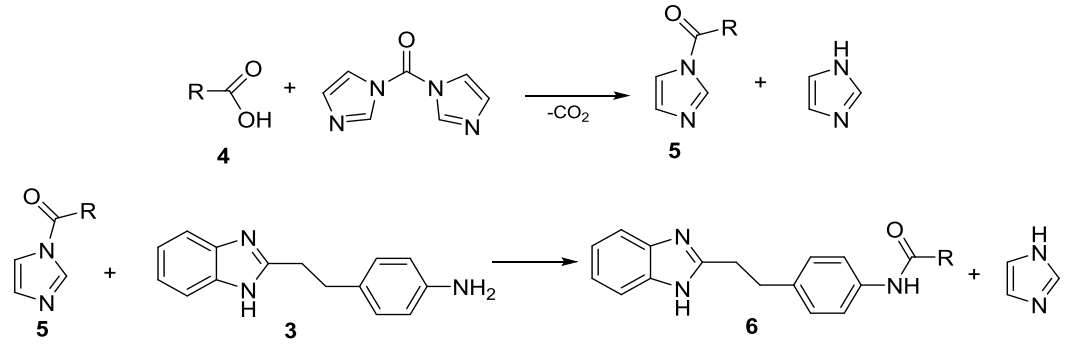
Схема. 1.



Образовавшуюся соль 2-[2-*n*-аминофенил)этил]бензимидазола **3** нейтрализовали водным аммиаком, при этом выход целевого соединения составил 70-80 %.

Синтез замещенных амидов общей формулы **6** осуществляли активированием карбоксильной группы различных кислот **4** взаимодействием с 1,1′-карбонилдиимидазолом (КДИ) и последующим переаминированием образующегося интермедиата **5** при действии 2-[2-*n*-аминофенил)этил]бензимидазола **3** (схема 2).

Схема. 2.



R = alkyl, cycloalkyl, aryl, hetaryl e.a.

Экспериментально было установлено, что лучшей реакционной средой является смесь диоксана с ДМФА в объёмном соотношении 3:1. Взаимодействие кислот **4** с КДИ проводили при температуре 60^0C. Время проведения синтеза варьировали от 2 до 8 часов в зависимости от реакционной способности кислот. Контроль за ходом реакции и чистотой получаемых амидов осуществляли методом ТСХ.

Строение синтезированных амидов доказано методом ЯМР ^{1}H спектроскопии. В наиболее слабом поле при δ 12.00-12.16 м.д. проявляется уширенный сигнал NH-протона имидазольного кольца. В области δ 9.89-10.22 м.д. обнаруживается узкий синглет амидного протона NHCO. Этот сигнал смещен в область δ 9.77-9.97 м.д. в случае амидов фенилалкановых кислот. В области δ 6.0-8.0 м.д. присутствуют две четырехспиновые системы ароматических протонов. Четырехспиновая *АВСД*-система бензольного кольца, аннелированного к имидазольному циклу, представлена широким сигналом протонов H^4 и H^7 при δ 7.43-7.45 м.д. и мультиплетом протонов H^5 и H^6 при δ 7.08-7.10 м.д. Уширение сигналов связано, вероятно, с возможностью таутомерии имидазольного цикла (1,3-миграция NH-протона). Интересно отметить, что в спектре амидов фенилалкановых кислот уширенные сигналы протонов H^4 и H^7 проявляются в виде отдельных пиков при δ 7.50 и 7.39 м.д. Четырехспиновая A_2B_2 система 1,4-дизамещенного бензольного кольца, как и следовало ожидать, наблюдается в виде двух дублетов протонов $H^{2'}$, $H^{6'}$ и $H^{3'}$, $H^{5'}$ при δ 7.63-7.68

и 7.20-7.22 м.д., соответственно, с константой спин-спинового взаимодействия ^{3}J=8.4 Гц. Сигналы аналогичных протонов амидов фенилалкановых кислот смещены в более низкочастотную область и проявляются в области δ 7.46-7.53 и 7.14-7.18 м.д. В области алифатических протонов сигналы мостиковых метиленовых групп сливаются в общий сигнал и проявляются в виде синглета при δ 3.10-3.11 м.д. (соответственно, при δ 3.06-3.08 м.д. для амидов фенилалкановых кислот).

Литература

1. Ozden, S. Synthesis, potent anti-staphylococcal activity and QSARs of some novel 2-anilinobenzazoles / S. Ozden, D. Atabey, S. Yildiz, H. Goker // Eur. J. Med. Chem. - 2008. - Vol. 43. - P. 1390-1402.
2. Puratchikody, A. Experimental and QSAR Studies on Antimicrobial Activity of Benzimidazole Derivatives / A. Puratchikody, G. Nagalakshmi, M. Doble // Chem. Pharm. Bull. - 2008. - Vol. 56. - P. 273-281.
3. Ayhan, K.G. Synthesis and Antifungal Properties of Some Benzimidazole Derivatives / K.G. Ayhan, N. Altanlar // Turk. J. Chem. - 2006. - Vol. 30. - P. 223-228.
4. Goker, H. Synthesis of some new 2-substituted-phenyl-1H-benzimidazole-5-carbonitriles and their potent activity against Candida species / H. Goker, C. Kuş, D.W. Boykin, [et al.] // Bioorg. Med. Chem. - 2002. - Vol. 10. - P 2589-2596.
5. Cachoux, F. Total synthesis and biological assessment of benzimidazole-based analogues of epothilone A: ambivalent effects on cancer cell growth inhibition / F. Cachoux, T. Isarno, M. Wartmann, K.H. Altmann // Chem. BioChem. - 2006. - Vol. 7. - P. 54-57.
6. Demirayak, S. Microwave supported synthesis of some novel 1,3-diarylpyrazino[1,2-*a*]benzimidazole derivatives and investigation of their anticancer activities / S. Demirayak, I. Kayagil, L. Yurtas // Eur. J. Med. Chem. - 2011. - Vol. 46, №1. - P. 411–416.
7. Dettmann, S. 2-Phenyl-1-[4-(2-piperidine-1-yl-ethoxy)benzyl]-1H-benzimidazoles as ligands for the estrogen receptor: synthesis and pharmacological evaluation / S. Dettmann, K. Szymanowitz, A. Wellmer, [et al.] // Bioorg. Med. Chem. - 2010. - Vol. 18, №14. - P. 4905–4916.
8. Galal, S.A. Synthesis and antitumor activity of novel benzimidazole-5-carboxylic acid derivatives and their transition metal complexes as topoisomerase II inhibitors / S.A. Galal, K.H. Hegab, A.M. Hashem, N.S. Youssef // Eur. J. Med. Chem. - 2010. - Vol. 45, №12. - P. 5685–5691.
9. Luo, Y. Synthesis and in vitro cytotoxic evaluation of some thiazolylbenzimidazole derivatives / Y. Luo, F. Xiao, S. Quan [et al.] // Eur. J. Med. Chem. – 2011. - №46. – p. 417–422.

10. Noolvi, M. Synthesis, antimicrobial and cytotoxic activity of novel azetidine-2-one derivatives of 1H-benzimidazole / M. Noolvi, S. Agrawal, H. Patel [et al.] // Arabian J. Chem. - 2014. - Vol. 7, №2. - P. 219–226.
11. Tanged, S.T. Synthesis of new pyrrolo[2,3- d]pyrimidine derivatives and evaluation of their activities against human colon cancer cell lines / S.T. Tanged, A. Garlapati // Eur. J. Med. Chem.- 2010.- Vol. 45.- P. 1453–1458.
12. Ramla, M.M. Synthesis and inhibitory activity of new benzimidazole derivatives against Burkitt's lymphoma promotion / M.M. Ramla, M.A. Omar, H. Tokuda, H. El-Diwani // Bioorg. Med. Chem. - 2007. - Vol. 15. - P. 6489-6496.
13. Thimmegowda, N.R. Synthesis, characterization and evaluation of benzimidazole derivative and its precursors as inhibitors of MDA-MB-231 human breast cancer cell proliferation / N.R. Thimmegowda, S.S. Nanjunda, K.C.S. Ananda, [et al.] // Bioorg. Med. Chem. Lett. - 2008. - Vol. 18. - P. 432-435.
14. А.Т. Солдатенков, Ле Туан Ань, Н. М. Колядина, А. П. Ильин, Чыонг Хонг Хиеу /Под редакцией А. Т. Солдатенкова. - Ханой: издательство Знание, 2014. - 395 с.
15. Синтезы органических препаратов. Сб. 5. - М.: Изд-во ИЛ, 1954. – С. 51.

СИНТЕЗ ВА ТАВСИФИ ҲОСИЛАҲОИ АМИД АЗ 2-[2-Р-АМИНОФЕНИЛ)-ЕТИЛ]БЕНЗИМИДАЗОЛ

Мухторов Л.Г.[1], Власова Ю.Н.[1], Никишина М.Б.[1], Каримов М.В.[2], Атощенко Ю.М.[1], Шахкелдян И.В.[1]

Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тула (Лев Толстой)[1]
Филиали Донишгоҳи Технологии миллии Технологияи "МИСИС" дар ш. Душанбе[2]

Аннотатсия*. Таваҷҷӯҳи амалӣ ва назариявӣ ба ҳосилаҳои бензимидазол аз фаъолияти гуногуни физиологии онҳо вобаста аст. Мақсади ин мақола аз синтез ва омӯзиши хусусиятҳои спектралии ҳосилаҳои амиди 2-[2-(р-аминофенил)этил]бензимидазол ва кислотаҳои алканойи бензой ва фенил-ивазкардашуда иборат мебошанд.*

Пайвастагиҳои мақсаднок тавассути ҳамкории кислотаи малоник ва р-нитробензалдегид ба даст оварда шуданд ва пас аз кам кардани маҳсулот бо гидроген дар катализатори палладий ба даст оварда шуд, аз ин сабаб кислотаи пропионики 3-(р-аминофенил) ҷудо карда шуд. Ҳангоми бо о-фенилендиамин дар кислотаи хлор конденсатсия кардани он, 2-[2-(р-аминофенил)этил]бензимидазол ба даст оварда шуд, ки онро ҳамчун хишти сохтмон барои функсионализатсияи минбаъда дар гурӯҳи аминокислотаҳо истифода кардан мумкин аст, алахусус бо истифода аз реаксияи ацилатсия. Амини гетероциклии синтезшуда бо кислотаҳои алколоиди бензойӣ ва фенилӣ ивазкардашуда, ки гурӯҳи карбоксилаш пешакӣ бо ҳамкорӣ бо 1,1'-карбонилдимидазол (CDI) фаъол шуда буданд, вокуниш нишон доданд. TLC пешрафти реаксия ва тозагии маҳсулоти ба даст овардаро назорат мекард. Ҳама пайвастагиҳо бо ҳосили хуб ба даст оварда шуданд. Хусусиятҳои хоси ^{1}H NMR спектрҳои амидҳои синтезшуда баррасӣ карда мешаванд. Маълумотҳои спектралии бадастомада метавонанд ҳамчун як манбаъ барои муайян кардани боэътимоди амидҳои кислотаҳои

карбон ва 2-[2-(р-аминофенил)этил]бензимидазол тавассути ^1H NMR спектроскопия хизмат кунанд.

Калидвожахо: *ҳосилаҳои амид, 2-[2-(р-аминофенил)этил]бензимидазол, кислотаҳои алканои ивазкунандаи фенил, кислотаҳои бензой, катализ кислотаҳо, спектроскопияи NMR.*

SYNTHESIS AND CHARACTERIZATION OF AMIDE DERIVATIVES OF 2-[2-*P*-AMINOPHENYL)-ETHYL]BENZIMIDAZOL

L.G. Mukhtorov[1], Y.N. Vlasova[2], M.B. Nikishina2, M.B. Karimov[2], Y.M. Atroshchenko[1], I.V. Shakhkeldyan[1]

Tula State Pedagogical University (Lev Tolstoy) [1]

Dushanbe branch of the National Research Technological University[2]

Abstract. *The practical and theoretical interest in benzimidazole derivatives is due to their various physiological activities. The purpose of this article was to synthesize and study the spectral characteristics of amide derivatives of 2- [2- (p-aminophenyl)ethyl]benzimidazole and benzoic and phenyl-substituted alkanoic acids. The target compounds was obtained by the interaction of malonic acid and p-nitrobenzaldehyde, followed by reduction of the product with hydrogen on a palladium catalyst, because of which 3-(p-aminophenyl) propionic acid was isolated. By condensing it with o-phenylenediamine in hydrochloric acid, 2-[2-(p-aminophenyl)ethyl]benzimidazole was obtained, which can be used as a building block for further functionalization at the amino group, in particular, using the acylation reaction. The synthesized heterocyclic amine was reacted with various benzoic and phenyl-substituted alkaloid acids, the carboxyl group of which was preliminarily activated by interaction with 1,1'-carbonyldiimidazole (CDI). TLC monitored the reaction progress and the purity of the obtained products. All connections were obtained with good yield. The characteristic features of the ^1H NMR spectra of the synthesized amides are considered. The obtained spectral data can serve as a source for reliable identification of amides of carboxylic acids and 2-[2-(p-aminophenyl)ethyl] benzimidazole by 1H NMR spectroscopy.*

Keywords: *amide derivatives, 2-[2-(p-aminophenyl)ethyl]benzimidazole, phenyl-substituted alkanoic acids, benzoic acids, acid catalysis, NMR spectroscopy.*

Сведения об авторах:

Мухтров Лоик Гургович – к.х.н., научный сотрудник кафедры химии Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого, Россия, Тульская область,300026, г.Тула, пр. Ленина 125,
тел: +7(953)-188-46-16, E-mail: mukhtorov.loik@mail.ru

Власова Юлия Николаевна – к.х.н., доцент кафедры химии Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого, Россия, Тульская область,300026, г.Тула, пр. Ленина 125,
тел.: +7(920)-744-62-64,E-mail: vlasovaun@tsput.ru

Никишина Мария Борисовна – к.х.н., доцент, заведующий кафедрой химии Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого, Россия, Тульская область,300026, г.Тула, пр. Ленина 125, тел.: +7(960-)611-50-86, E-mail: mama-67@mail.ru

Каримов Махмадкул Бобоевич – д.х.н., профессор Филиала национального исследовательского технологического университета «МИСиС» в городе Душанбе.

Республика Таджикистан, г. Душанбе, Тел.+992-(919)-41-02-41. E mail. karimovm.b@mail.ru
Атрощенко Юрий Михайлович – д.х.н., профессор, ведущий научный сотрудник кафедры химии Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого, Россия, г.Тула, тел:+7(910)-945-69-82, E-mail: reaktiv@tsput.ru
Шахкельдян Ирина Владимировна д.х.н., профессор, декан естественнонаучного факультета Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого, Россия, г.Тула, тел: +7(91)-569-12-68, E-mail: reaktiv@tsput.ru

УДК 549.02, 549.08

ИЗУЧЕНИЕ ВЛИЯНИЯ КАТИОННОГО СОСТАВА НА ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СОЕДИНЕНИЙ СО СТРУКТУРОЙ ВАНАДАТА КАЛЬЦИЯ

Одинаева А.Т., Барышникова О.В.
МГУ имени М.В. Ломоносова

Аннотация. *Были получены твердые растворы составов $Ca_{9-x}Sr_xIn(VO_4)_7$ (x = 1-9), $Ca_{9-x}Sr_xIn(PO_4)_7$ (x=1-9) со структурой витлокита. Определены параметры элементарной ячейки полученных образцов. Методами генерации второй оптической гармоники (ГВГ) и диэлектрической спектроскопии было показано, что однофазные образцы имеют нецентросимметричную структуру и в температурном интервале от 900 до 100 К претерпевают обратимые фазовые переходы (сегнето- и антисегнетоэлектрические) в центросимметричную структуру.*
Ключевые слова: *сегнетоэлектрические фазовые переходы, фосфаты, ванадаты, витлокиты, диэлектрическая спектроскопия, оптическая нелинейность.*

Введение

Значительный интерес исследователей по всему миру (в последнее время, в особенности), вызывают твердые растворы β-$Ca_3(PO_4)_2$ (также, как и β-$Ca_3(VO_4)_2$), изоструктурные минералу витлокиту, так как они считаются одними из самых известных и изучаемых полифункциональных веществ, сочетающих в себе довольно много полезных свойств. В частности,для витлокитоподобных соединений характерны: люминесцентные [1], сегнетоэлектрические и антисегнетоэлектрические [2], нелинейно-оптические [3] и многие другие свойства. Но все же, самая главная особенность витлокитоподобных фосфатов и ванадатов - это то, что эти соединения могут не только проявлять все вышеперечисленные свойства по отдельности, но и комбинировать их в рамках одного состава. Что делает витлокитоподобные соединения потенциально применимыми в очень многих сферах науки и техники.

Экспериментальная часть

Образцы $Ca_{9-x}Sr_xIn(VO_4)_7$ с $0\leq x\leq 9$ и $Ca_{9-x}Sr_xIn(PO_4)_7$ с $0\leq x\leq 9$ синтезировали на воздухе путем нагревания стехиометрических количеств $CaCO_3$ (ЧДА), $SrCO_3$ (ЧДА), In_2O_3(ЧДА), V_2O_5 (ЧДА), $NH_4H_2PO_4$ (ХЧ). Стехиометрическое количество исходных веществ, взвешивали на электронных аналитических весах и перетирали под слоем ацетона для лучшей гомогенизации. Предварительные отжиги проводились при температурах 300^{O}C, 500^{O}C и 700^{O}C в течение 72 часов. Синтез проводили при температуре 1000 ^{O}C в течение 150 часов. Каждые 50 часов образцы перетирались под слоем ацетона.

Для всех полученных образцов был проведен рентгенофазовый анализ на порошковом рентгеновском дифрактометре с вращающимся анодом Rigaku D/MAX-2500 PC.

Исследование генерации второй оптической гармоники (ГВГ) проводились с помощью лазерной системы по схеме на отпажение, как описано в [5].

Для изучения электрофизических свойств используются образцы в виде керамических таблеток диаметром около 10 мм и толщиной 1.5-2 мм. Таблетки получены методом прессования под давлением ~30 бар. Затем полученные таблетки подвергаются ступенчатому отжигу при температуре 300°C ,400°C и 950°C суммарно в течение 12 часов.На плоские параллельные поверхности таблеток наносят электроды путем вжигания в течение 1 часа пасты, содержащей коллоидную платину (платиновую пасту). Температура вжигания составляла 973–1023 K.

Результаты и их обсуждение

В системах $Ca_{9-x}Sr_xIn(VO_4)_7$ $(0\leq x\leq 9)$ $Ca_{9-x}Sr_xIn(PO_4)_7$ $(0\leq x\leq 9)$ выявлены области составов, содержащих только изоструктурную $Ca_3(VO_4)_2$ фазу. В частности, показанные на рис. 1 рентгенограммы $Ca_{9-x}Sr_xIn(VO4)7$ (x = 1-9) отвечают характерному набору рентгеновских максимумов для структуры витлокита и согласуются с пр. гр. *R3c*. Рефлексы соответствуют однофазным твердым растворам на основе ванадата $Ca_9In(VO_4)_7$, в которых часть катионов Ca^{2+} замещена на близкие по размеру катионы Sr^{2+}.

Аналогичные данные получены для составов $Ca_{9-x}Sr_xIn(PO_4)_7$ $(0\leq x\leq 9)$. Параметры элементарных ячеек, рассчитанные с использованием разложения по методу Ле Бейля, даны в табл. 1 и 2.

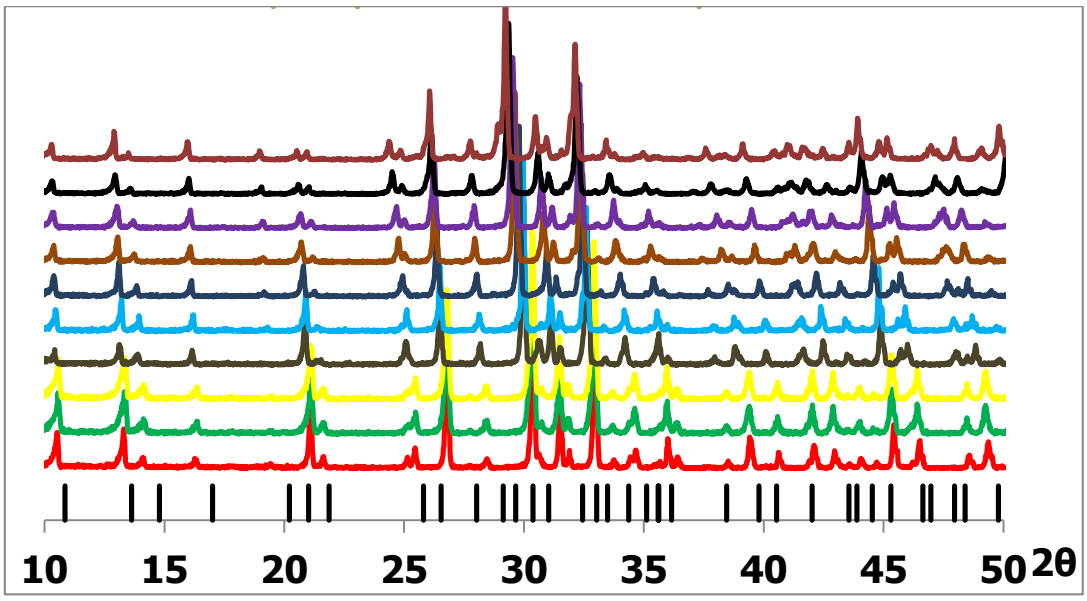


Рисунок 1. Штрих-дифрактограмма образца $Ca_9Yb(VO_4)_7$ [00-049-1781] и экспериментальные дифрактограммы образцов состава $Ca_{9-x}Sr_xIn(VO_4)_7$.

Таблица 1. Параметры элементарной ячейки системы $Ca_{9-x}Sr_xIn(VO_4)_7$

состав	***x***	***a*, Å**	***c*, Å**	***V*, Å³**
$Ca_9In(VO_4)_7$	0	10.881	37,272	3955.7
$Ca_6Sr_3In(VO_4)_7$	3	10.292	37,277	3498,4
$Ca_3Sr_6In(VO_4)_7$	6	11.079	37,348	3527,7
$Sr_9In(VO_4)_7$	9	10.434	37,372	3532,7

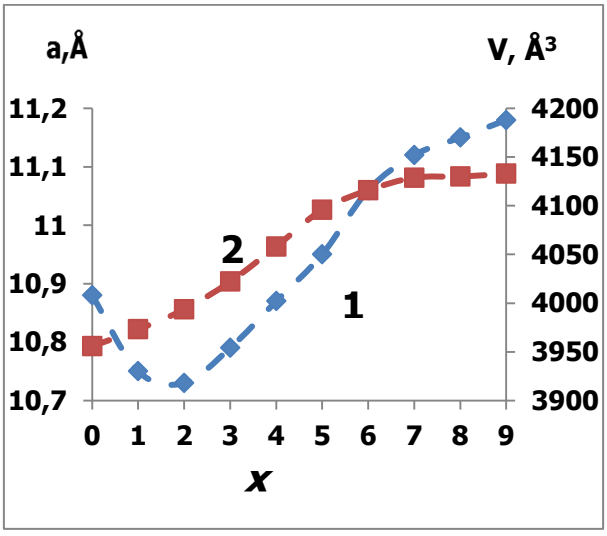


Рисунок 2. Зависимость параметров элементарной ячейки решетки *c* (1) и *V* (2) от состава $Ca_{9-x}Sr_xIn(VO_4)_7$

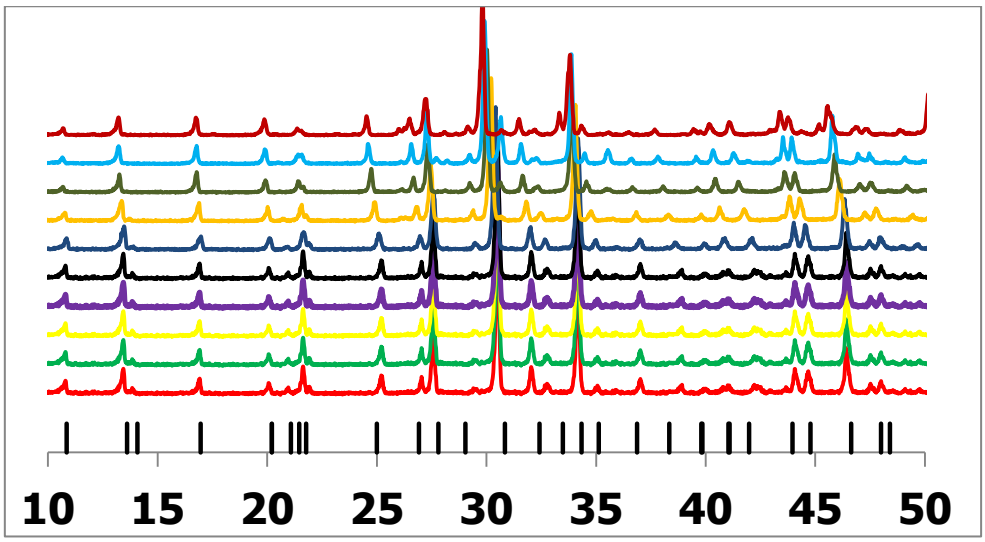


Рисунок 3. Штрих-дифрактограмма образца $Ca_3(PO_4)_2$ [24-1008], и экспериментальные дифрактограммы образцов состава $Ca_{9-x}Sr_xIn(PO_4)_7$

Таблица 2. Параметры элементарной ячейки системы $Ca_{9-x}Sr_xIn(PO_4)_7$

состав	***x***	***a*, Å**	***c*, Å**	***V*, Å^3**
$Ca_{9}In(PO_4)$	0	10.401	37,275	3491,7
$Ca_6Sr_3In(PO_4)_7$	3	10.408	37,295	3522,1
$Ca_3Sr_6In(PO_4)_7$	6	10.428	37,359	3529,6
$Sr_9In(PO_4)_7$	9	10.442	37,375	3528,9

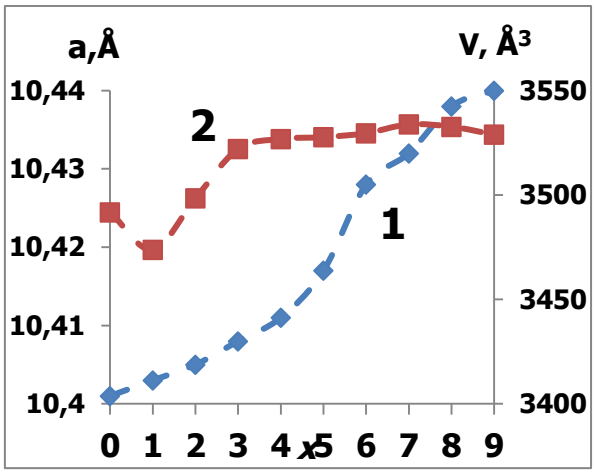


Рисунок 4. Зависимость параметров элементарной ячейки решетки *c* (1) и *V* (2) от состава $Ca_{9-x}Sr_xIn(PO_4)_7$

Выводы

В работе установлено образование твёрдых растворов с сегнетоэлектрическими свойствами в новых системах $Ca_{9-x}Sr_xIn(RO_4)_7$ с R = V, P ($0 \leq x \leq 9$). Температуры сегнетоэлектрических ФП возрастают в интервале температур 900−1000 K при замещении стронция на кальций и снижаются до 850 . Низкое значение константы Кюри−Вейсса указывает на структурный механизм фазового перехода ”порядок−беспорядок“ при низкой концентрации ионов заместителей и возрастание вклада механизма смещения при повышении их концентрации. Полученные твердые растворы на основе ванадатов стронция отличаются пониженной проводимостью по крупным двухвалентным катионам, что способствует сохранению отчетливого сегнетоэлектрического максимума даже при повышенном содержании катионов-заместителей стронция.

Литература

1. Mi X., Du K., Huang K., Zhou P., Geng D., Zhang Y., Shang M. Synthesis and luminescence of Ca9Eu1−xLnx(VO4)7 (Ln = Y, La, Gd, Lu) phosphors // Mater. Res. Bull. 2014. V. 60. - P. 72–78.
2. Teterskii A. V., Stefanovich S.Y., Lazoryak B.I., Rusakov D.A. Whitlockite Solid Solutions Ca9-xMxR(PO4)7 (x = 1, 1.5; M = Mg, Zn, Cd; R = Ln, Y) with Antiferroelectric Properties // Russ. J. Inorg. Chem. 2007. V. 52, No 3. - P. 308–314.
3. Тетерский А.В., Морозов В.А., Стефанович С.Ю., Лазоряк Б.И. Диэлектрические и нелинейно-оптические свойства фосфатов Ca9R(PO4)7 (R = РЗЭ) // Журнал неорганической химии. 2005. Т. 50, № 7. С. 1–5.
4. Nakajima T., Tsuchiya T. Plant Habitat-Conscious White Light Emission of Dy3+ in Whitlockite-like Phosphates: Reduced Photosynthesis and Inhibition of Bloom Impediment // ACS Appl. Mater. Interfaces. 2015. V.7, No 38. - P. 21398–21407.
5. Rangavittal N., Landa-Canovas A.R., Gonzalez-Calbet J.M., Vallet-Regi M. Structural study and stability of hydroxyapatite and b-tricalcium phosphate: Two important bioceramics // J. Biomed. Mater. Res. 2000. V. 51, No 4. - P. 660–668;
6. D.V. Deyneko, I.V. Nikiforov, B.I. Lazoryak, D.A. Spassky, I.I. Leonidov, S.Yu. Stefanovich, D.A. Petrova, S.M. Aksenov, P.C. Burns. J. Alloys Compd. 776, 897 (2019).

ОМУЗИШИ ТАЪСИРИТАРКИБИ КАТИОНИ БА ХОСИЯТҲОИ ФИЗИКӢ ВА ХИМИЯВИИ ПАЙВАСТАҲО БО СОХТОРИ ВАНАДАТИ КАЛСИЙ

Одинаева А.Т., Барышникова О.В.
ДДМ ба номи М.В.Ломоносов

Аннотатсия. *Маҳлулҳои сахти таркибҳои $Ca_{9-x}Sr_xIn(VO_4)_7$ (x = 1-9), $Ca_{9-x}Sr_xIn(PO_4)_7$ (x=1-9) ба сохтори витлокит ба даст оварда шудаанд. Параметрҳои воҳиди ҳуҷайраҳои намунаҳои гирифташуда муайян карда шудаанд. Он аз ҷониб насли оптики гармоникии дуввум (SNG) ва спнктроскопияи диэлектрикӣ нишон дода шудааст,ки намунаҳои якфазавӣ дорои сохтори ғайриметросиметрӣ буда,аз гузаришҳои баръакси марҳилаҳои марҳилавӣ (феро ва зиддифероэлектрикӣ) ба сохтори қентросимметрӣ дар ҳарорати аз 900 то 100 К мегузаранд.*
Калидвожаҳо: *гузаришҳои марҳилаи ферроэлектрикӣ, фосфатҳо,ванадатҳо,витлокитҳо,спектроскопия диэлектрикӣ, гайрихаттӣ оптикӣ.*

THE STUDY OF CATIONIC COMPOSITION INFLUENCE ON PHYSICAL AND CHEMICAL PROPERTIES OF COMPOUNDS WITH CALCIUM VANADATE-TYPE STRUCTURE

Odinaeva A.T., Baryishnikova O.V.
Lomonosov Moscow State University

Annotation. *Solid solutions of the compositions $Ca_{9-x}Sr_xIn(VO_4)_7$ (x = 1-9), $Ca_{9-x}Sr_xIn(PO_4)_7$ (x = 1-9) with a whitlokite-type structure were obtained. The unit cell parameters of the obtained samples were determined. It was shown by optical second harmonic generation (SHG) and dielectric spectroscopy that single-phase samples have a noncentrosymmetric structure and undergo reversible phase transitions (ferro and antiferroelectric) to a centrosymmetric structure in the temperature range from 900 to 100 K.*
Keywords: *ferroelectric phase transitions, phosphates, vanadates, whitlokites, dielectric spectroscopy, optical nonlinearity.*

***Сведения об авторах*.** **Одинаева Анна Тимуровна** – аспирант Факультета наук о материалах МГУ имени М.В.Ломоносова , г. Москва. E-mail: an.odin02@mail.ru
Барышникова Оксана Владимировна – к.хн., доцент каферды химической технологии и новых материалов химического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, г.Москва. E-mail: barov@teach.chem.msu.ru

УДК 551.34

ВЫСОКОГОРНАЯ МЕРЗЛОТА ТЕРРИТОРИИ РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН: ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

Додобоев Э.И., Гагарин В.Е.

Московский Государственный университет имени М.В. Ломоносова

Аннотация. *Приведен краткий литературный обзор горной мерзлоты Республики Таджикистан. Подробно рассматривается какие методы применялись для исследования высокогорной мерзлоты и насколько хорошо изучена горная криолитозона Таджикистана.*

Ключевые слова: *геофизика, мерзлота, температура.*

Введение

Целью данного обзора является выяснение наличие мерзлых грунтов в горных областях Республики Таджикистан, а также рассмотреть какие методы применяются для изучения их температурного режима, состава свойств и криогенного строения пород.

Практически вся территория Таджикистана, а точнее 93% общей площади, находится в горах. При этом половина всей страны лежит на высоте более 3000 метров над уровнем моря [1], где среднегодовые температуры воздуха в течении нескольких десятков лет остаются отрицательными (от -2^{o}C и ниже), что говорит о возможности существования мерзлоты в горных районах страны.

Горы Таджикистана относятся к горным системам Тянь-Шаня, Гиссара – Алая и Памира. По вопросу криолитозона Тянь-Шаня были рассмотрены статьи в журналах «Арктика и Антарктика» за 2020 г, «Криосфера Земли» за 2018 г, «Материалы пятой конференции геокриологов России. МГУ имени М.В. Ломоносова, 14-17 июня 2016 г», научная и учебная библиотека за 1989 г [2-5].

Результаты обзорной статьи показали, что в настоящее время по Таджикистану изучены только мерзлые грунты Гиссарского хребта и Восточного Памира.

В работах по Юго-Западному Тянь-Шаню приводятся результаты методов геокриологических и геофизических исследований, включающий в себя бурение инженерно-геокриологических скважин с отбором образцов и определением строения и состава грунтов, термометрию в скважинах, проведение геофизического профилирования с построением геоэлектрических разрезов и карты температурных полей [6].

Для Восточного Памира был посчитан общий объём эвидентных подземных льдов. Первые подсчеты осуществлялись на основе геокриологической карты масштаба 1:1 000 000 [2].

На основании обзора журнальной и учебной литературы можно сделать вывод о наличии в журналах «Криосфера Земли» научных статей: «Деградация оледенения и криогенез на современных моренах северного Тянь-Шаня»; «Высокодинамичные каменные глетчеры Тянь-Шаня»; «Оценка объёмов подземных льдов в горной системе Тянь-Шаня».

В даных работах показаны в основном результаты исследования криогенных процессов и подземных льдов северного Тянь-Шаня (Казахстан) и малая часть посвящена мерзлым породам территории Восточного Памира. Были установлены условия формирования сегрегационных, инъекционных, жильных и других подземных льдов котловины оз. Зоркуль (абс. высота 4126 м), базируясь на выявлении региональных структур высотной геокриологической поясности [4], но нету конкретных данных о глубине залегания подошвы многолетнемерзлых пород, температурного режима и развития мерзлотных процессов котловины оз. Зоркуль, возможно из-за слабой геокриологической изученности этого горного региона.

Первая попытка определения объема подземных льдов в Тянь-Шане сделана Б.И. Втюриным в 1975 г [5]. по первичным материалам А.П. Горбунова [8]. В статье [2] говорится, что оценки запасов подземных льдов по Тянь-Шаню и Памиру, приведенные Б.И. Втюриным, существенно занижены. Он определил общий объем эвидентных подземных льдов в Тянь-Шане в пределах территории СССР в 45 км^3, на Памире – 15 км^3, в то время как по подсчетам Казахстанской высокогорной геокриологической лабораторией Института мерзлотоведения (ИМЗ) СО РАН, на основе геокриологической карты масштаба 1:1 000 000 объем подземных льдов в Тянь-Шане составляет 412 км^3. Позже оценка по карте масштаба 1:500 000 с привлечением некоторых уточняющих материалов позволила снизить эту величину до 320 км^3.

Да, расчеты запасов подземных льдов по Тянь-Шаню имеются, но на вопрос как менялся объём подземных льдов на Памире (15 км^3), рассчитанным Б.И. Втюриным, после поправки Казахстанской высокогорной геокриологической лабораторией Института мерзлотоведения (ИМЗ) СО РАН, к сожалению, ответа нет.

Ранее, в материалах «V конференции геокриологов России» МГУ имени М.В. Ломоносова, размещена статья [4], в которой приведены результаты исследований высокогорной криолитозоны Тянь-Шаня, проведенных в 2016

году. Исследования проводились в районе северного Тянь-Шаня (хребет Заилийский Алатау) и Юго-Западного Тянь-Шаня (Гиссарский хребет). В даном обзоре, мы затрагиваем лишь результаты исследований мёрзлых пород высокогорных районов Юго-Западного Тянь-Шаня.

В статье говорится о геокриологических условиях Гиссарского хребта, авторами были организованы стационарные площадки, где проводились наблюдения за температурным режимом пород в нескольких точках перевала Анзоб (абс. высота 3372 м). По результатам годовых термометрических наблюдений им удалось создать математическую модель высокогорной криолитозоны в этом районе и прогнозировать их изменение в связи с изменениями ландшафтно-климатических условий.

Полевые и лабораторные исследования позволили авторам определить состав и строение мерзлых пород, а также развитие мерзлотных процессов Гиссарского хребта. Полевые работы включали в себя:

- бурение скважин с отбором проб;
- оснащение скважин температурными датчиками;
- геофизические работы: использования таких методов как ВЭЗ (вертикальные электрические зондирования), ЗСБ (зондирование становлением поля в ближней зоне) и сейсмика;
- рекогносцировочные маршруты.

Результаты исследования показали, что перевал Анзоб относится к области сезонного промерзания грунтов. В данной работе не указано, в диапазоне каких высот встречаются многолетнемерзлые породы, а лишь дано общее представление о мерзлотных условиях района. Более глубокие исследования всего Гиссарского хребта требовали уже дальнейших работ, таких как - определение градиента среднегодовых температур пород на каждые 100 м, составление карты температурных полей на основе организации сетей температурных наблюдений в разных гипсометрических уровнях, что и было выполнено, результаты исследований представлены в научных журналах.

В журналах «Арктика и Антарктика» за 2020 год теме мерзлым породам Тянь-Шаня посвящена всего лишь одна статья. Участок исследования тот же Гиссарский хребет, перевал Анзоб, но уже с новыми данными. В статье [6] приведены результаты годовых (с 2016 по 2020) наблюдений за состоянием мерзлых пород этого района, новые температурные данные с новых пробуренных геокриологических скважин, расположенных в разных гипсометрических уровнях. На основе всего этого была построена карта температурных полей для Юго-Западного Тянь-Шаня (рис. 1).

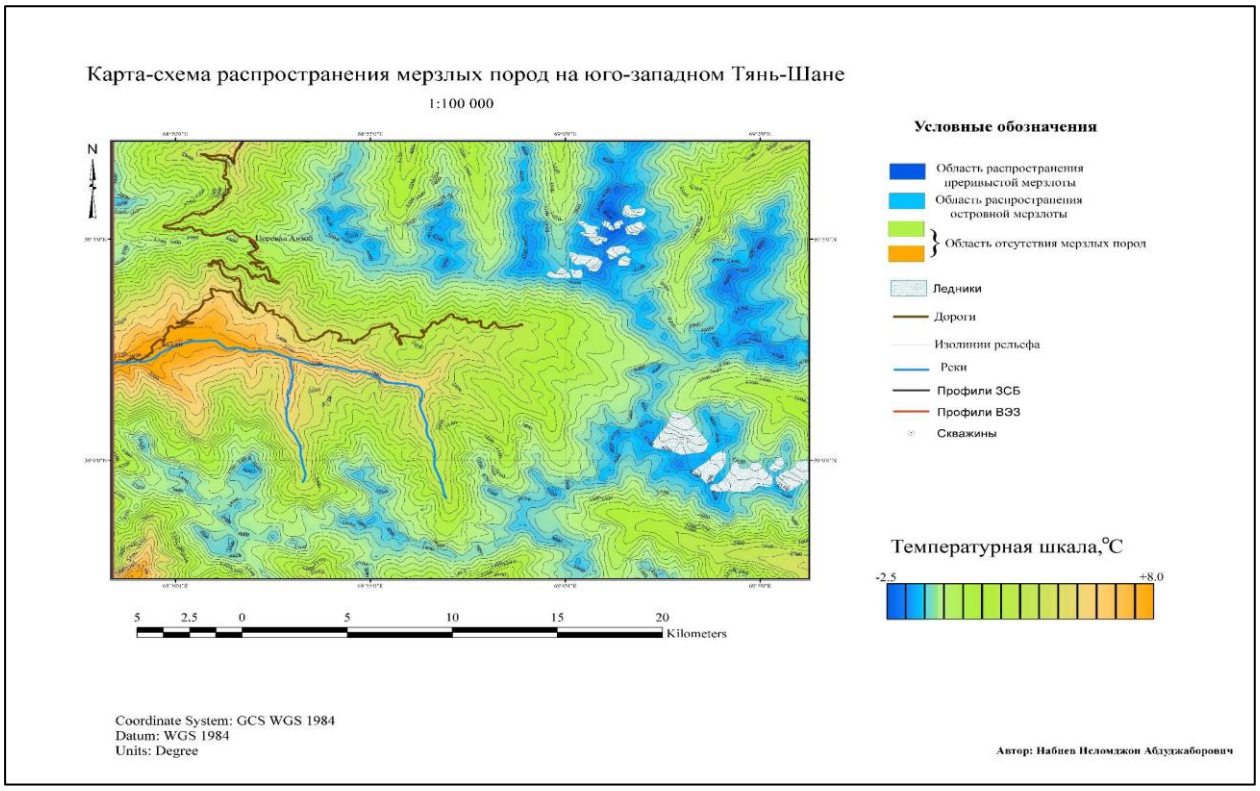


Рисунок 1. Карта-схема распространения мерзлых пород на юго-западном Тянь-Шане (составил Набиев И.А).

Такая карта очень удобна исследователям в области гляциологии, криолитологии, климатологии и других направлений. В данной работе также установлена причина отсутствия многолетнемерзлых пород перевала Анзоб, хоть и среднегодовая температура воздуха в течение несколько десятках лет остается отрицательной [9]. Конечно, автор понимает, что для такого рода масштаба построить карту распространения мерзлых пород имея лишь несколько термометрических скважин не совсем правильно, рассчитав градиент среднегодовых температуры пород на каждые 100 м поднятия установили, что появление многолетнемерзлых пород ожидается на высотах более 4 000 м. Но не по всему Юго-Западному Тянь-Шаню, т.к. литология территории не одинаковая, соответственно меняются и теплофизические свойства пород, что сказывает на сохранение ледяных включений в горной породе. Отсюда, никакое моделирование не представляется достоверным без проведения параметрических полевых наблюдений, но тем не менее выполненная работа максимально близка к реальным значениям. Возможно, дальнейшие исследования позволят авторам составить более точные прогнозы и построить модели с реальными входными параметрами.

Учебная литература в вопросе исследований мерзлых пород таджикской территории сильно отличается от данных, представленных в периодических

журналах. В учебной литературе [5] рассматривается геокриологические пояса высокогорной зоны Юго-Западного Тянь-Шаня, ограниченная информация о температурном режиме, состава и строения мерзлых пород. Но можно найти в каких геокриологических поясах встречаются мерзлые толщи и также на каких высотных интервалах.

Анализ литературных данных показывает, что современных крупных исследований в области изучения горной криолитозоны Таджикистана практически нету, имеются только старые исследования в годы СССР, проведенные на Восточном Памире.

В работе [10] рассматривается формирование подземных льдов в склоновых отложениях Восточного Памира. По вскрытым обнажениям описываются их криогенная текстура и структура мерзлой осыпи, а также их мощность. На долине Северного Акбайтала обнаружен фрагмент грунтовой наледи, частично открытой, частично погребенной под рыхлыми склоновыми отложениями, установлены площадь и мощность погребенных льдов.

Очень интересные исследования по Памиру сделаны в конец 20 века советскими учёными, но в настоящее время отсутствуют современные прямые наблюдения за динамикой состояния мерзлоты данного региона, систематические круглогодичные геокриологические исследования фактически не проводятся.

Большинство статей и учебные литературы посвящаются изучению мерзлых пород северного Тянь-Шаня. Потому что на этой территории, в районах распространения высокогорной мерзлоты возведено различные сооружения, идет добыча полезных ископаемых, но и сам город Алматы расположен в предгорьях Заилийского Алатау. Незначительные климатические изменения могут сказываться на активации криогенных процессов, которые в некоторых районах могут приводить к катастрофическим событиям в сумме с тектонической опасностью. К таковым относятся сели, прорывы ледниковых горных озер, оползни, термоэрозия, термокарст [10]. Отсюда, исследование мерзлых пород района Северного Тянь-Шаня не теряет свою актуальность, ежели Юго-Западный Тянь-Шань и Памир.

Методы исследования горной криолитозоны

Главная особенность вечной мерзлоты – это ее изменчивость, ее наличие и формирование определяется множеством факторов и определенными условиями, изменения хотя бы одного из которых может приводить к непредвиденным последствиям. Найти наиболее эффективный метод определения распространения многолетнемерзлых пород — это одна из

важных и сложных задач, стоящих во главе инженерных исследований и анализе геокриологических условий.

Бурение инженерно-геокриологических скважин. Одним из основных и наиболее эффективных методов определения мерзлых пород является бурение скважин и детальное изучение изменчивости температурного поля в них, как и изучение содержимого скважин, другими словами детальное изучение керна. Но как известно бурение очень сложный и трудно затратный процесс. Для проведения буровых работ нужно произвести тщательную подготовку и самое главное нужно наличие буровых инструментов или целых буровых установок. В условиях высокогорий наличие буровых установок и приспособлений не всегда возможно, а порой и вовсе не представляется возможности доставить оборудование в труднопроходимые районы горных сооружений.

Что касается использования ручных инструментов для бурения, то такие методы не позволяют пробурить глубже 10-15 метров, а большинство задач подразумевает исследование горных массивов на глубины, превышающие несколько десятков метров. В таком случае на помощь приходят вспомогательные методы.

В условиях высокогорной криолитозоны наиболее приоритетная и часто встречаемая задача — это изучение границ мерзлых и талых пород в плане и разрезе, так как не всегда присутствуют ярко выраженные признаки наличия мерзлоты. Как раз именно эта задача возникает при инженерно-геокриологических исследованиях. Также одним из важнейших составных элементов геокриологических исследований является изучение льдосодержания или положения ледяных тел в пространстве.

Геофизические методы в геокриологии преимущественно представлены шестью группами – сейсморазведка, терморазведка, электроразведка, ядерно-физические методы, а также гравиразведка и магниторазведка. При проведении геофизических исследований в условиях горной местности чаще всего используются первые три метода, а последние три на имение эффективные, и предоставляют скудный спектр информации при использовании в данных геокриологических условиях. Все методы основываются на изучении определенных типов физических полей и их распространении в пространстве [11].

Далее будут рассмотрены наиболее эффективные и часто использующиеся методы в условиях высокогорной местности. Главными критериями целесообразности и использования того или иного метода будет его информативность для тех или иных задач, требования к проведению

буровых работ и удобство доставления оборудования без использования транспортных средств.

Вертикальное электрическое зондирование. Данный метод входит в состав методов, основывающихся на изучении полей постоянного тока. Электрическое зондирование является одним из наиболее информативных геофизических методов, используемых в геокриологии. Выделяют два вида ВЭЗ – ВЭЗ кажущихся сопротивлений (ВЭЗ КС) и ВЭЗ методом двух составляющих (ВЭЗ МДС). Различаются они лишь объемами получаемой информации, так, в методе ВЭЗ МДС помимо обычной кривой кажущихся сопротивлений, получаемых в ходе выполнения ВЭЗ КС, также исследуется зависимость напряжений на осевой приемной линии и перпендикулярной ей, что позволяет оценить весь разрез более полно, т.е. учитывая все неоднородности и особенности залегания геологических тел и, что для нас более важно – границ мерзлых пород.

Методика проведения вертикального электрического зондирования заключается в ряде последовательных этапов [11] (рис. 2):

- анализ геологического строения исследуемой области (Пункт присущ всем методам геофизики);
- планирование точек измерения и последующая установка подготовленных приемных линий. Вследствие того, что изменение глубинности получаемых данных производится посредством изменения расстояния между электродами (AMNB), также следует установить начальное положение этих электродов;
- далее, посредством увеличения расстояния между электродами увеличивают глубину проникновения электрического поля, изменяется глубина на которой исследуется разрез (Обычно она равна ½ от расстояния между питающими электродами A и B). После каждого замера данные о расстоянии, напряжении в приемных электродах M и N, силе тока, геометрическом коэффициенте установки заносятся в таблицу, на основании которой производятся дальнейшие расчеты ρ кажущегося и построение графика зависимости кажущегося сопротивления от AB/2;
- после окончания зондирования и построения кривой ВЭЗ аппаратуру и оборудование переносят на новую точку. Обычно точки зондирования располагают вдоль разведочных линий;
- интерпретация полученного графика с учетом имеющихся данных по геологии.

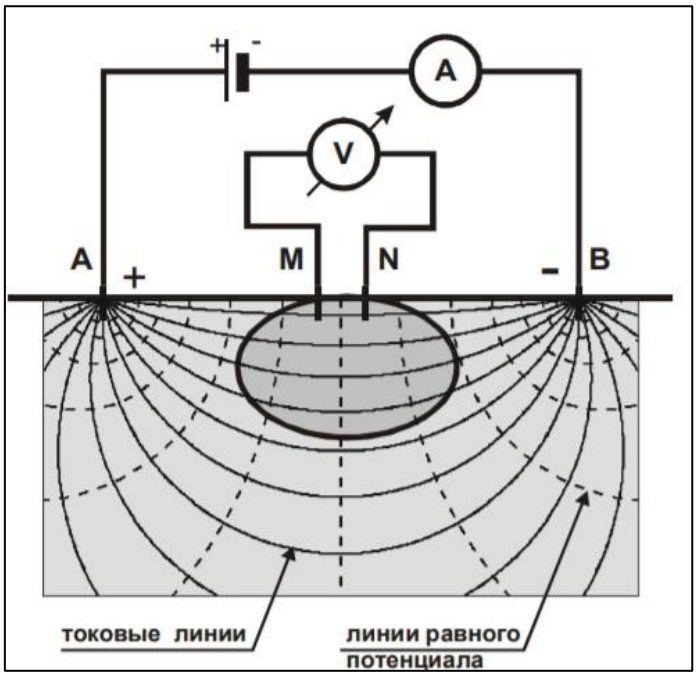


Рисунок 2. Схема измерений в методе ВЭЗ (https://pandia.ru)

Основными задачами, решаемыми с помощью ВЭЗ – это определение глубины залегания кровли мерзлых грунтов и мощности многолетнемерзлых пород, наблюдение за динамикой сезонного оттаивания и промерзания, изучение изменений в литологическом составе, льдистости, засоленности.

Что же касается информативности метода, то основной проблемой является сложность реального геологического разреза, что не позволяет интерпретировать данные абсолютно однозначно. Так, например, по данным электроразведки можно утверждать, что где-то на протяжении разреза имеется резкое повышение кажущегося сопротивления, но точно указать причину повышения сопротивления без проведения буровых работ или достаточных данных по геологическому строению региона нельзя, и обнаруженная «мерзлота» может оказаться лишь более литифицированными породами.

Зондирование методом становления поля. Зондирование методом становления поля основано на изучении становления (установления) электрической и магнитной составляющих электромагнитного поля при подаче или выключении импульсов постоянного тока в земную поверхность. Главным преимуществом данного метода является применение технологий переменного тока, что позволяет производить зондирования глубинных частей геологических разрезов [11].

Различают два варианта зондирования становлением поля: зондирование в дальней зоне (ЗСД) и зондирование в ближайшей зоне

(ЗСБ). Главным принципиальным различием в устройстве и выполнении вышеназванных методах, это то, что при выполнении ЗСД используется дипольные установки и расстояние между генераторной группой и полевой лабораторией должно превышать в 5-6 раз исследуемую глубину. В методе ЗСБ разнос постоянен и меньше проектируемых глубин разведки. Так как рельеф и местность в горных странах очень изменчива, то при использовании ЗСД могут возникнуть осложнения с достаточным разносом генераторов переменного тока и лабораторией. Также из-за небольших размеров установок ЗСБ превосходит ЗСД большей детальностью и разрешающей способностью. В связи э этими проблемами, на роль ведущего метода в области высокогорных исследований, выходит метод зондирования становлением поля в ближней зоне.

В процессе зондирования используется установка, состоящая из генератора, незаземленной генераторной петли и приемной точки измерения (тоже незаземленная петля), расположенных на поверхности земли, размеры которых определяются требуемой глубиной исследования (рис. 3).

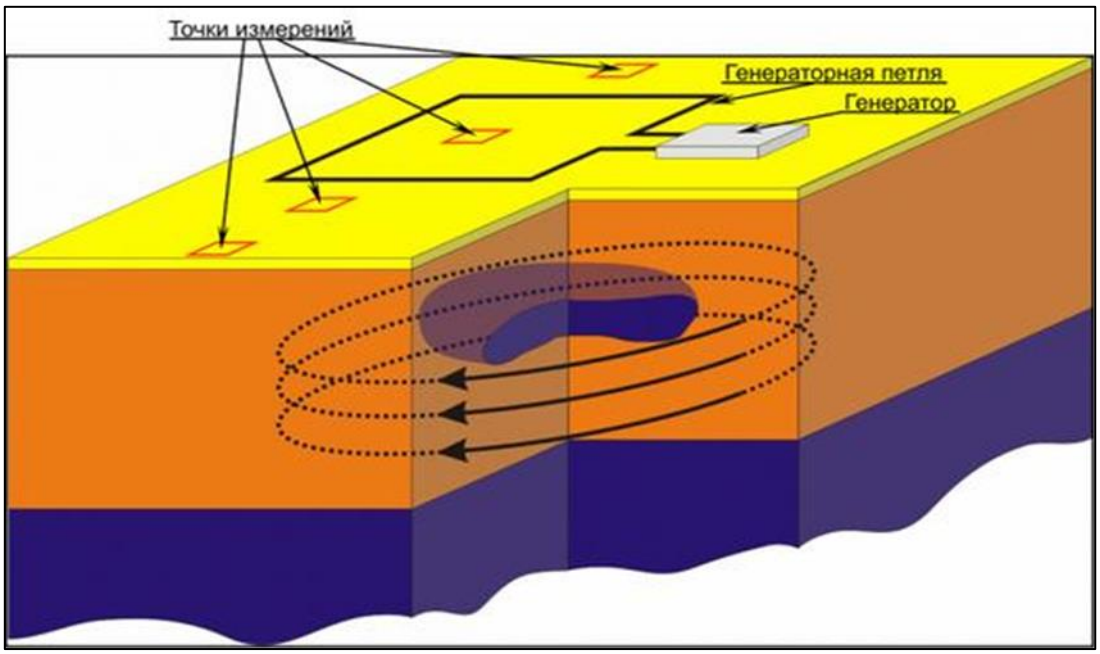


Рисунок 3. Основная аппаратура и схема измерений в методе ЗСБ [1].

За счёт включения и выключения тока в генераторной петле происходит процесс возбуждения поля в исследуемой среде. Это поле вызывает в приемной петле ЭДС, которую называют «переходной характеристикой среды» или «сигналом становления поля». В результатах измерений этой ЭДС содержатся сведения об исследуемой среде, характеристики которой

затем определяются в процессе интерпретации. Для возбуждения поля переходных процессов необходимо создать импульсное переключение тока в питающей (генераторной) установке. При изменении силы тока в источнике в проводящей среде возникает неустановившееся электромагнитное поле, то есть имеет место процесс становления поля.

В начальный момент времени (на малых временах измерения после переключения тока в питающей петле) вторичные токи распределяются в приповерхностной части разреза. Затем, с течением времени, (на больших временах измерения после переключения тока в питающей петле) токи начинают проникать в более глубокие слои, затухая с удалением от источника. Длительность и характер становления поля связаны с распределением удельного сопротивления пород на разной глубине. В результате форма регистрируемого импульса будет отличаться от формы импульса, поданного в питающую установку.

Этот метод является наиболее информативным для изучения строения мерзлых грунтов в горах. Метод ЗСБ позволяет построить более детальный разрез и определить под слоями грунтов, обладающими низкими показателями электропроводности (мерзлые грунты), наличие электропроводящих горизонтов. Это позволяет определять мощность мерзлых пород и отличить их в разрезе от скальных оснований.

Общие выводы

Осмысливая просмотренные материалы можно сделать следующие выводы:

В журналах и сборниках научных трудов по изучению высокогорной мерзлоты Таджикистана посвящены лишь несколько статьи, предложены материалы, касающиеся геокриологических условий Юго-Западного Тянь-Шаня (Гиссарский хребет), дана оценка запасов подземных льдов Восточного Памира и установлены условия их формирования.

Крупные исследования криолитозоны в горах проведены только в годы СССР. Публикация новых данных по морфологии криолитозоны гор Таджикистана единичны и касаются лишь горных цепов Гиссара.

Из проведенного детального анализа и собранной информации на основании различных современных источников, можно выделить основную группу геофизических методов, которые нашли широкое применение в решении геокриологических задач, возникающих при инженерно-геокриологических исследованиях в горных районах. К основной группе методов, относятся: электромагнитные методы, включающие в себя зондирование становлением поля и вертикальное электрическое зондирование.

Все вышеперечисленные методы являются наиболее подходящими для исследований в сложных условиях и обладают рядом таких преимуществ, как мобильность, простота в использовании и предоставлении наиболее информативных данных.

Литература

1. http://www.meteo.tj/about/tajikiston/ Сайт «Агентство по гидрометеорологии Комитет охраны окружающей среды при Правительстве Республики Таджикистан». Дата обращение 15.05.2021. (https://pandia.ru) Сайт «Энциклопедия знаний». Дата обращение 25.05.2021.
2. Горбунов А.П., Железняк М.Н., Северский Э.В. Оценка объемов подземных льдов в горной системе Тянь-Шаня// Журнал Криосфера Земли, 2018, - 10 с.
3. Желтенкова Н.В., Гагарин В.Е., Кошурников А.В., Набиев И.А. — Режимные геокриологические наблюдения на высокогорных перевалах Тянь-Шаня // Журнал «Арктика и Антарктика» – 2020. – № 3. – С. 25 – 43.
4. Пятая конференция геокриологов России Москва, 14–17 июня 2016 года. Гагарин В.Е, Кошурников А.В., Брушков А.В., Хименков А.Н., Желтенкова Н.В. Криолитозона южного и северного Тянь-Шаня (на примере перевалов Анзоб и Жосалы-Кезень).
5. Геокриология СССР. Горные страны юга СССР/ Э. Д. Ершов (гл. редактор) и др.; Под ред. Э. Д. Ершова – М.: Недра, 1989. – 515 с.
6. Втюрин Б.И. Подземные льды СССР. М., Наука, 1975, - 209 с
7. Горбунов А.П. Вечная мерзлота Тянь-Шаня. Фрунзе, Илим, 1967, -164 с.
8. Горбунов А.П. Геокриологические условия Тянь-Шаня и Памира / А.П. Горбунов, Э.В. Северский, С.Н. Титков. Якутск, ИМЗ СО РАН, 1996. - 194 с.
9. Набиев И.А. Геокриологические условия северного и юго-западного Тянь-Шаня Материалы магистерской работы. (27 мая 2020 г.). Москва, Россия: МГУ. - 86 с.
10. Горбунов А.П., Северский Э.В. Высотная геокриологическая поясность Северного Тянь-Шаня // Криогенные явления Казахстана и Средней Азии. Якутск, ИМЗ СО РАН, 1979, - с. 67–83.
11. Доброхотова И.А., Новиков К.В. Электроразведка. Учебное пособие. М.: РГГРУ, 2009, - 54 с.

ЯХБАНДИИ АБАДИИ БАЛАНДКӮҲИ ҲУДУДИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН: ШАРҲИ АДАБИЁТ

Додобоев Е.И., Гагарин В.Е.
ДДМ ба номи М.В.Ломоносов

Аннотатсия. *Шарҳи мухтасари адабии яхбандии абадии баландкӯҳи Ҷумҳурии Тоҷикистон пешниҳод карда мешавад. Дар он барои омухтани яхбандии абадии баландкӯҳ чӣ гуна усулҳо ба кор бурда шуда, криолитозонаи кӯҳии Тоҷикистон то чи андоза хуб омухта шудааст муфассал баррасӣ шудааст.*
Калидвожаҳо*: геофизика, яхбандии абадӣ, ҳарорат.*

HIGH-ALTITUDE PERMAFROST OF THE TERRITORY OF THE REPUBLIC OF TAJIKISTAN: A LITERARY REVIEW

Dodoboev E.I., Gagarin V.E.
Lomonosov Moscow State University

Annotation*. A brief literary review of the permafrost of the Republic of Tajikistan is given. It is considered in detail what methods were used to study the high-altitude permafrost and how well the mountain cryolithozone of Tajikistan has been studied.*
Keywords: *geophysics, permafrost, temperature*

Сведения об авторе: Гагарин Владимир Евгеньевич – к.г.-м. н., старший научный сотрудник кафедры геокриологии Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова», E-mail: gagar88@yandex.ru
Додобоев Эхсон Икромович - МГУ имени М.В. Ломоносова, Геологический факультет, кафедра Геокриологии, магистрант: г.Москва, РФ, E-mail: edi.dodoboev@mail.ru

УДК 556.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ВОДОНОСНЫХ ГОРИЗОНТОВ ГИССАРСКОЙ ДОЛИНЫ

Курбонов М.Д., Расторгуев А.В.
МГУ имени М.В. Ломоносова

Аннотация. *В настоящей работе были исследованы Гиссарская и Сурхандарьинская долины. Охарактеризованы гидрогеологические условия площади работ. В работе названы основные проблемы предыдущих исследований в долине. После анализа имеющихся материалов были построены схемы зональности по коэффициенту фильтрации, по мощности водоносных слоев, по мощности верхних водоупоров. По графикам нормального и логнормального распределения определен средний коэффициент фильтрации для всей долины. Методом аналитических элементов (МАЭ) в программе GFLOW построена геофильтрационная модель долины площадью 800 км^2. Оценены притоки с бортов долины в размере 494629 м^3/сутки.*
Ключевые слова: *Гиссарская и Сурхандарьинская долина, водозаборы, водоносные горизонты, фильтрационные неоднородности, коэффициент фильтрация,*

водопроводимость, мощность, удельный дебит, напор, схема зональности, график нормального распределения, граничные условия, режим, геофильтрационное моделирование, дискретизация, гидроизогипсы, ГИС МАПИНФО, МАЭ, GFLOW.

На территории Гиссарской и Сурхандарьинской долин, гидрогеологические работы были начаты в середине прошлого столетия. Подземные воды были исследованы комплексно [1] и частично [2-5] с целью организации хозяйственно-питьевого и технического водоснабжения.

Были подсчитаны запасы подземных вод по каждой долине и по республике. В ходе исследований были построены различные карты и разрезы и были сделаны выводы о том, что гидрогеологические условия Гиссарской и Сурхандарьинской долин схожи, но они отделены друг от друга и не являются единой гидрогеологической структурой, или даже единым месторождением. Поэтому мы решили проверить, так ли это.

Целью данной работы является исследование фильтрационной неоднородности в плане и разрезе основного водоносного горизонта четвертичных отложений Гиссарской и Сурхандарьинской долин. В качестве задач были: анализ фондовых и опубликованных геологических и гидрогеологических материалов, графическое изображение характера фильтрационных неоднородностей, гидрогеологическая интерпретация полученных графических изображений.

Район работ охватывает равнинную часть Гиссарской и Сурхандарьинской долин, ограниченную предгорьями Гиссарского хребта с севера, с юга и востока низкими предгорьями хребтов Баба-Таг, Карши-Тау, Рангон, грядами Абдуллаака, границей между Таджикистаном и Узбекистаном на западе [6-10].

Описываемый район охватывает орошаемую часть Гиссарской и Сурхандарьинсой долин [11], выполненных рыхлыми грубо и мелкообломочными отложениями современного, верхнего, среднего и нижнего отделов четвертичной системы, вмещающими поток подземных вод [12].

Формирование потока подземных вод осуществляется за счет рек Кафирниган, Иляк, Душанбинка, Ханака, Каратаг и Ширкент. Дополнительное питание осуществляется инфильтрирующимися ирригационными водами с полей и из оросительных каналов. Частично источником питания служат атмосферные осадки.

Водоносными являются в основном галечники всех возрастов и генетических типов, представляющие собой неоднородную как по вертикали, так и по площади толщу.

В долинах поверхностные воды имеют весьма малую минерализацию и обусловливают пресный характер подземных вод с минерализацией до 1.0 г/л [13].

Движение потоков подземных вод ориентировано вниз по общему уклону местности каждой из долин.

В обеих долинах Гиссарской и Сурхандарьинской были проведены комплексные гидрогеологические исследования, по всей площади долин [14] и по частям [15, 16].

Нами были получены фондовые материалы, т.е. отчеты проведенных исследований в выше названных долинах.

Качество этих отчетов очень различается. По времени исполнения эти работы отличаются на десятилетия. Методики опытно-фильтрационных работ зачастую оказываются несопоставимыми. Из фондов удается извлечь иногда лишь тексты, в отдельных случаях табличные приложения. Графические приложения (карты, разрезы) не всегда доступны. Следует отметить, что архивные и фондовые материалы хранятся на бумажных носителях, еще не оцифрованы и доступ к их обработке ограничен.

Для нашего исследования мы использовали каталог скважин, пробуренных с 60-ых годов прошлого столетия до 2017 года [17, 18]. Ниже представлена таблица части даного каталога скважин, как пример (табл. 1).

Как видно в таблице 1, из гидрогеологических параметров приведены: глубина залегания слоя, вскрытая мощность горизонтов, глубина появления воды, установившиеся уровни, дебит, понижение, минерализация при бурении и при обследовании.

Используя эти данные, были определены подошва и кровля водоносного горизонта, мощность слоя, удельный дебит, проводимость и коэффициент фильтрации. Мощность была определена как сумма всех слоев водопроницаемых пород по описаниям геологических разрезов скважин. Скважины из каталога в ходе исследования были отсортированы и из них были использованы 251 скважина, глубиною от 18 до 300 метров. Все скважины были привязаны на топографической карте.

Собранные данные позволили определить удельный дебит для каждой скважины:

$$q = \frac{Q}{S} \quad (1)$$

Далее водопроводимость была определена согласно [17-23]:

$$T = \xi q \quad (2)$$

где ξ – коэффициент, который для напорных вод равен 1.5, а для безнапорных вод равен 1. Коэффициент фильтрации связан с водопроводимостью:

$$K\text{ф} = \text{Т}/m, \qquad (3)$$

Таблица 1. Каталог скважины

№ скв	Местоположение	Литологический разрез	Глубина залегания слоя, м		Вскрытая мощность водоносного горизонт, м	Глубина появления воды, м / Установившиеся уровень, м	Дебит, л/с / Понижение, м	Минерализация при бурении, г/л / Минерализация при
			от	до				
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Колхоз им. Дзержинского, участок Ильичевский								
1	Междуречья р.р. Душанбинки и Ханака, в 2 км к Ю от правления колхоза, территория уч-ка им. Ильича, западная окраина.	1. Суглинок с гравием и галькой.	0,0	25,0	48,0	25,0	19,4	1.0
			25,0	73,0		4,0	18,0	0.6
		2. Гравийно-галечные отложения с валунами и крупнозернистым песком.						

Расчеты показали, что величина коэффициента фильтрации составляет от 0.006 до 384 м/сутки. Среднее значение $К_ф$ можно определить по графику распределения, приведенного на рисунках 1 и 2.

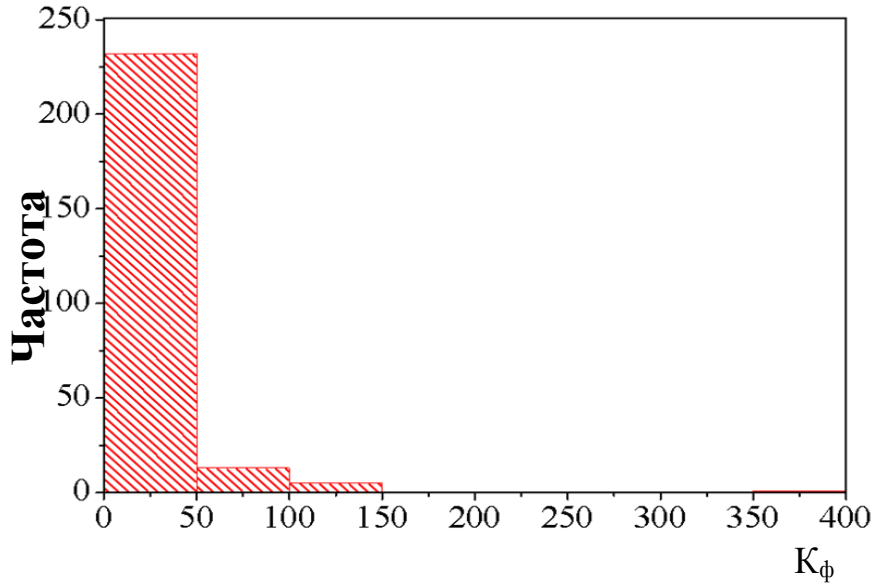


Рисунок 1. Гистограмма распределения $К_ф$.

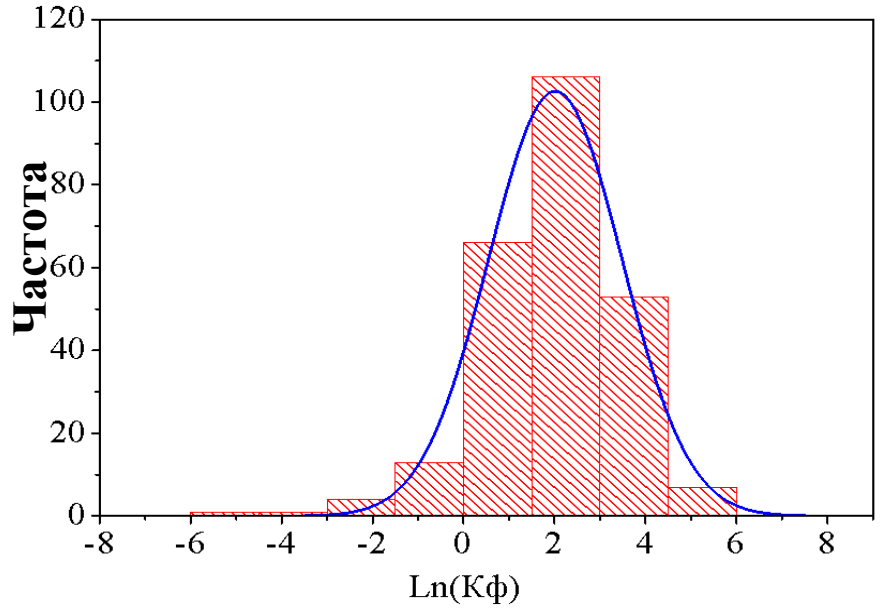


Рисунок 2. График логнормального распределения $К_ф$.

На рисунке 1 показано, что в долине более 200 скважин имеют значение коэффициента фильтрации, начиная от 0 до 50 м/сутки, а другие скважины от 50 до 384 м/сутки. Если принимать нормальное распределение, то среднее значение коэффициента фильтрации составляет 18.3 м/сутки со стандартным отклонением 1.82.

На втором графике (рис. 2) показана гистограмма логарифмически нормального распределения величины коэффициента фильтрации. Соответствующее ему среднее значение коэффициента фильтрации 2.04 м/сутки со стандартным отклонением 0.7.

Высокие значения $К_ф$ в основном в прибрежной прирусловой части долин там, где мощный слой валунно-галечниковых отложений. Низкие

значения $К_ф$ в основном по бокам долин, где наблюдается увеличение мощности суглинистых пород. Плановое распределение коэффициента фильтрации показано на рисунке 3. Также была построена схема вскрытых мощностей водоносных слоев по всей территории долины (рис. 4).

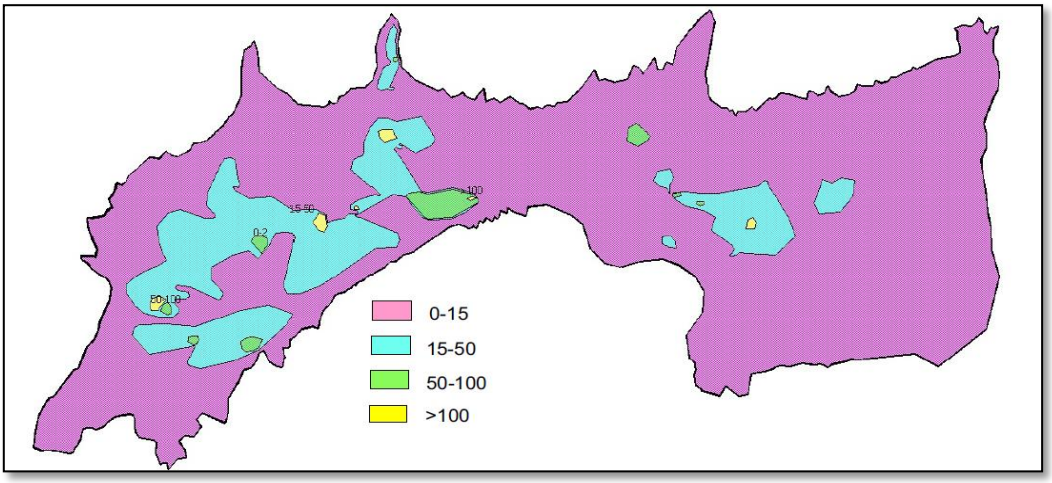


Рисунок 3. Схема зональности $К_ф$ долины.

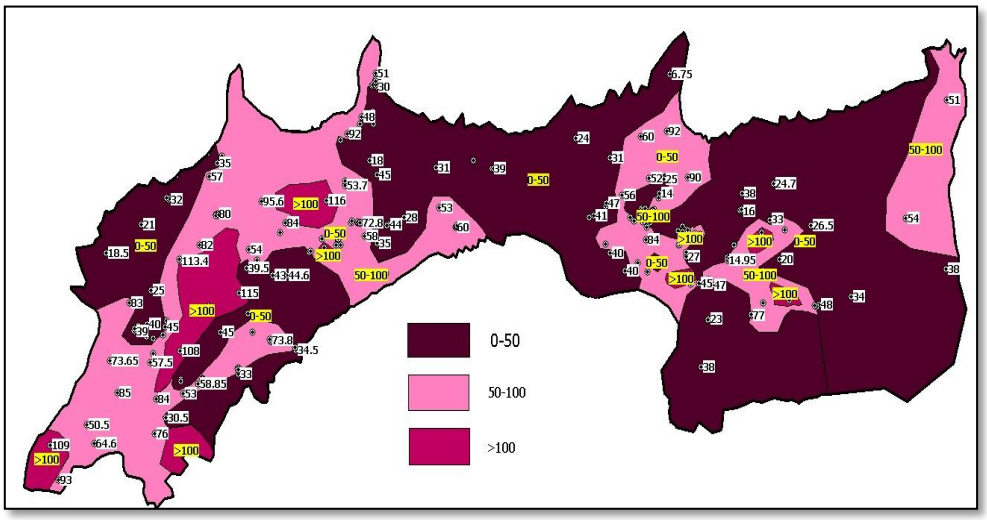


Рисунок 4. Схема зональности вскрываемых мощностей водоносных слоев.

На рисунке видно, что более водообильным является долина реки Ширкент-Каратаг и где мощность водоносных слоев выше, соответственно и повышенную мощность имеет слой валунно-галечниковых отложений.

Номерами в белых квадратиках на рисунке показаны мощности слоев в отдельных скважинах, а в желтых квадратиках значение, характерное для зоны. Для области площадью примерно 800 км^2, показанной на рисунках 3 и 4, было проведено геофильтрационное моделирование. В пределах данной области средствами ГИС МАПИНФО моделирования были оцифрованы

изолинии рельефа, реки и каналы, водоемы , урезы и скважины со всеми гидрогеологическими параметрами и абсолютными отметками (см. рис. 5).

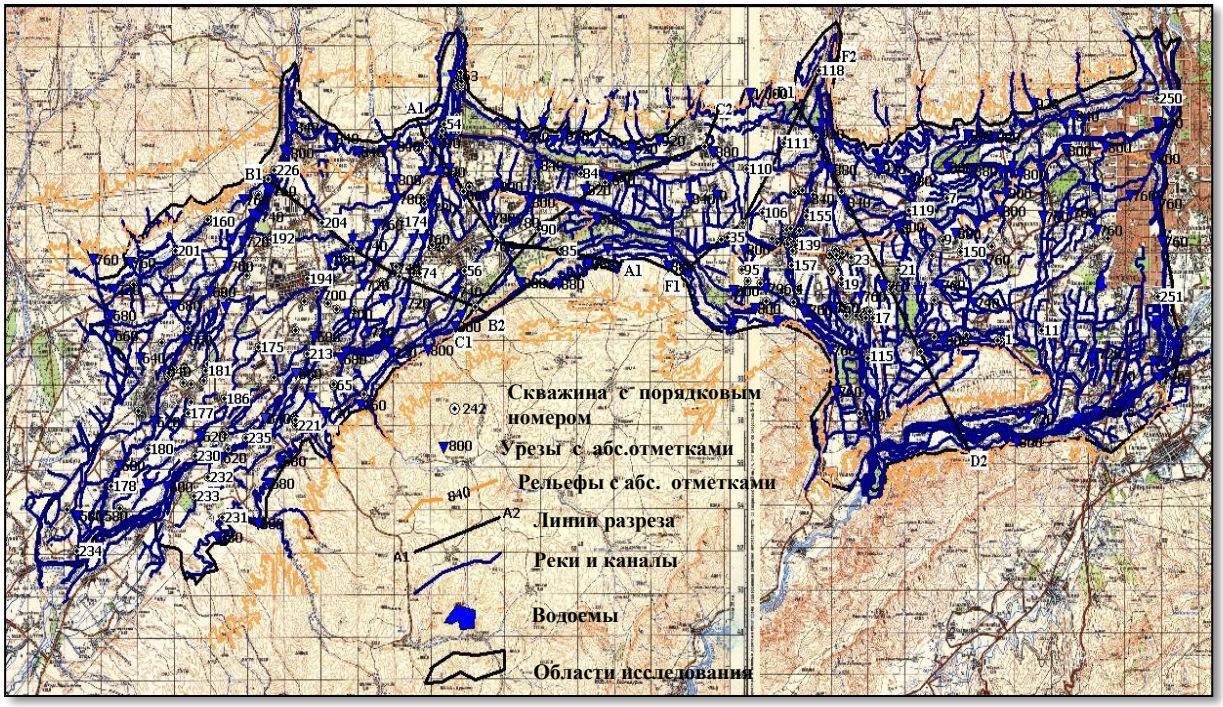


Рисунок 5. Информация, оцифрованная для моделирования

Геофильтрационная схематизация

Геофильтрационная схематизация предусматривает описание основных закономерностей формирования подземных вод, которое достаточно для последующего количественного анализа (аналитического или численного моделирования).

Геофильтрационная схематизация обычно состоит из четырех этапов, на которых друг за другом устанавливаются режим протекания процесса во времени, пространственная структура, граничные условия и внутреннее строение потока, характеризуемое распределением геоинфильтрационных параметров [24-28].

Режим потока характеризуется изменениями элементов потока во времени. Выделяют стационарный (установившийся), нестационарный (неустановившийся) режимы потока. В Гиссарской и Сурхандарьинской долинах водозаборные скважины эксплуатируются многие годы с постоянными расходами, поэтому режим фильтрационного потока можно принять стационарным (установившимся).

Пространственная структура. Анализ гидрогеологических условий: а) соотношение размеров в плане (десятки километров) с мощностями водоносного горизонта (сотни метров), б) отсутствие выдержанных толщ, разделяющих отложения, позволяет использовать модель плановой

фильтрации. Имеющиеся данные бурения дают сведения о вскрытых мощностях водоносного горизонта (см. рис 4), которые значительно меньше реальных мощностей. Поэтому водоупорная подошва водоносного горизонта была принята на абсолютной отметке 500 м, что соответствует средней мощности 80-300 м. Согласно гидрогеологическим разрезам, поток подземных вод в Гиссарской и Сурхандарьинской долинах в значительной степени безнапорный, поэтому в качестве верхней границы была принята уровенная поверхность подземных вод.

Границы и граничные условия. На северном и южном бортах долины осуществляется питание подземным потоком, формирующимся в горах [29]. На модели питание с бортов долины было реализовано граничным условием второго рода. Величина питания устанавливалась далее при проведении калибровки (верификации) модели. Внутренними границами в данном случае являются водотоки – реки и каналы, протекающие в Гиссарской и Сурхандарьинской долинах. Они были реализованы граничным условием 3 рода, которое предполагает задание абсолютных отметок уровней водотоков, их ширины и глубины, а также сопротивления ложа. Вся совокупность водотоков с их урезами показана на рис 5., однако задать на модели удалось лишь основные (см. рис 6). Величины сопротивлений лож водотоков оценивались при калибровке модели. К внутренним границам модели можно отнести и скважины общим объемом откачки 565629.7 $м^3$/сутки.

Параметры модели. Распределение коэффициентов фильтрации было задано в соответствии со схемой, приведенной на рис. 3. При задании инфильтрационного питания исходили из того, что оно составляет 15 % (или 73 мм/год) из общей суммы осадков в 500 мм/год.

Математическая постановка и вычислительная схематизация. Для дальнейшего построения нашей модели был использован Метод аналитических элементов. В основе метода аналитических элементов (МАЭ) лежит реализация гидрогеологической обстановки на основе распределённых источников-стоков, интенсивность которых может быть заранее известна (скважины) или найдена (водотоки). МАЭ может также рассматриваться как вариант метода граничных элементов. Наиболее практически интересный круг задач, решаемых МАЭ, соответствует модели плановой стационарной геофильтрации [8]:

$$\frac{\partial}{\partial x}(km\frac{\partial h}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(km\frac{\partial h}{\partial y})+\mathrm{W}+Q+\alpha(H-h)=0 \qquad (4)$$

где x,y - плановые координаты, Q – производительность откачивающих скважин (дебит), W -инфильтрационное питание, k - коэффициент

фильтрации, m – мощность водоносного горизонта, h — напор подземных вод, α - проводимость ложа реки, H - абсолютная отметка уровня в реке. При решении (4) МАЭ принимается, что параметры постоянны в границах выделенных зон.

Расчёты методом аналитических элементов проводились с помощью программы GFLOW. Дискретизация граничных условий и зон неоднородности аналитическими элементами, необходимая для проведения моделирования с помощью GFLOW, дана на рисунке 6.

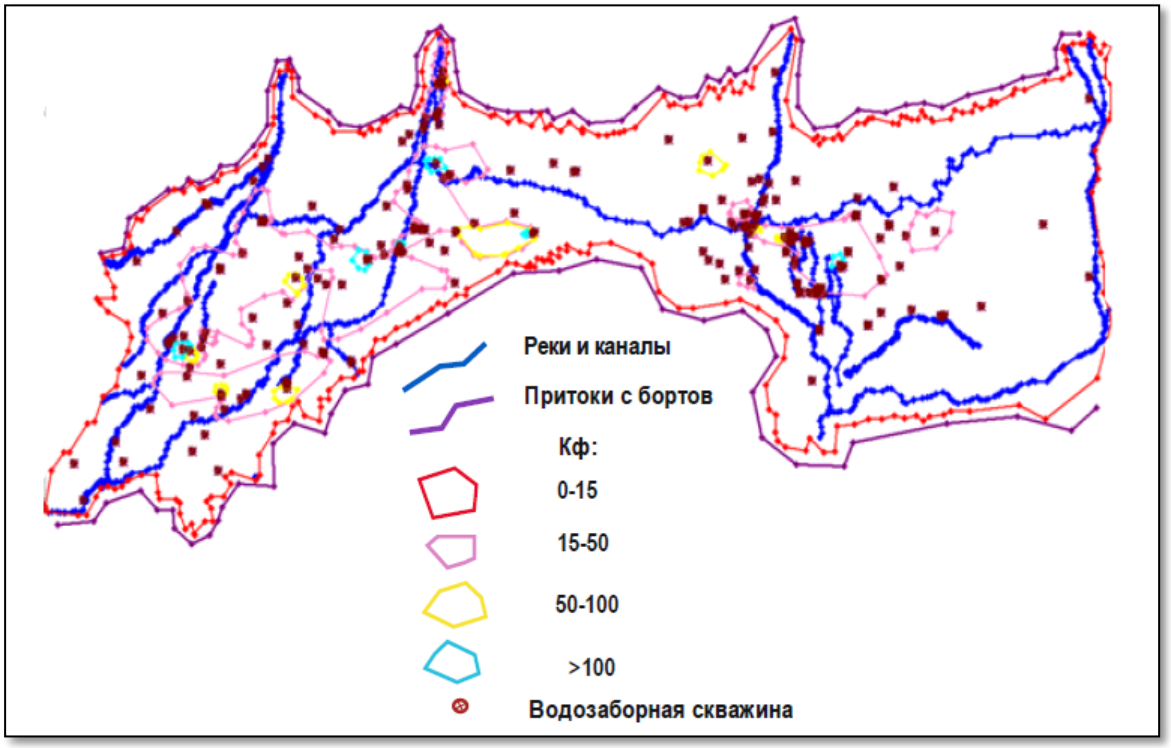


Рисунок 6. Дискретизация расчетной области аналитическими элементами.

Верификация модели. При проведении верификации оценивали притоки с бортов долины и сопротивления лож водотоков. При верификации добивались минимальной разности фактических и модельных уровней. На рисунке 7 показано сопоставление фактических и модельных уровней, принятое в программе GFLOW. График разброса говорит о том, что фактические данные и данные модели лежат близко к синей линии, проведенной из начала координат. Если точки лежат выше синей линии – модельные уровни выше фактических уровней и наоборот. Чем ближе к синей линии, тем лучше соответствие. На рисунке также даны следующие количественные характеристики разности фактических и модельных напоров: средняя арифметическая разность (average difference), медиана разности (median difference), среднее арифметическое абсолютных значений разности (mean absolute difference), квадратный корень среднего

арифметического квадрата разности (root mean square difference), сумма квадратов разности (sum of squared difference). Если принять диапазон изменения уровней в расчетной области Δ H 250 м, то нормализованная ошибка root mean square difference=(21.8/250)*100%=8.7%, что вполне приемлемо.

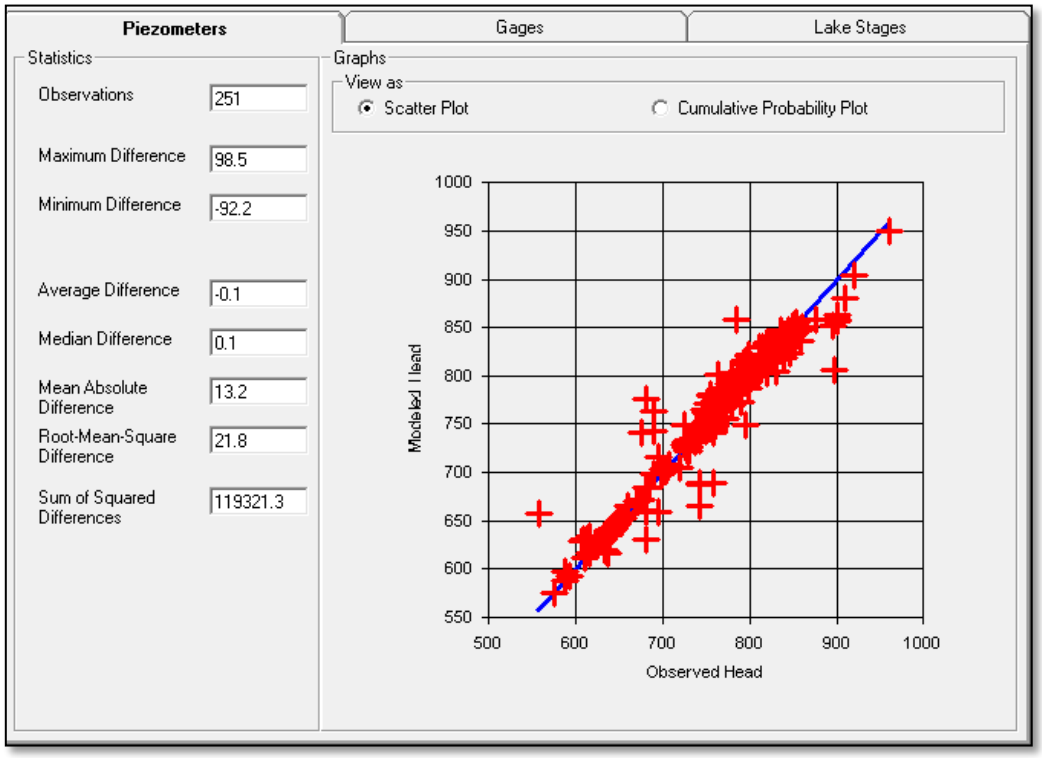


Рисунок 7. Сопоставление фактических уровней с модельными уровнями.

При приведенном на рисунке 9 соответствии фактических и модельных данных оказалось, что погонный приток с бортов долин с севера равен 4 $м^2$/сутки, общий приток с северного борта долины составляет 331405 $м^3$/сутки. С южных бортов в погонный приток равен 2 $м^2$/сутки, общий приток с юга был оценен 163224 $м^3$/сутки. Общий приток с северного и южного бортов равен 494629 $м^3$/сутки. Величина сопротивления лож водотоков оказалась равной в диапазоне от нуля до 1 суток. Полученная в результате моделирования карта гидроизогипс приведена на рисунке 8. При ее анализе следует иметь в виду, что изолинии уровней имеют смысл внутри границ расчетной области, показанных фиолетовой линией.

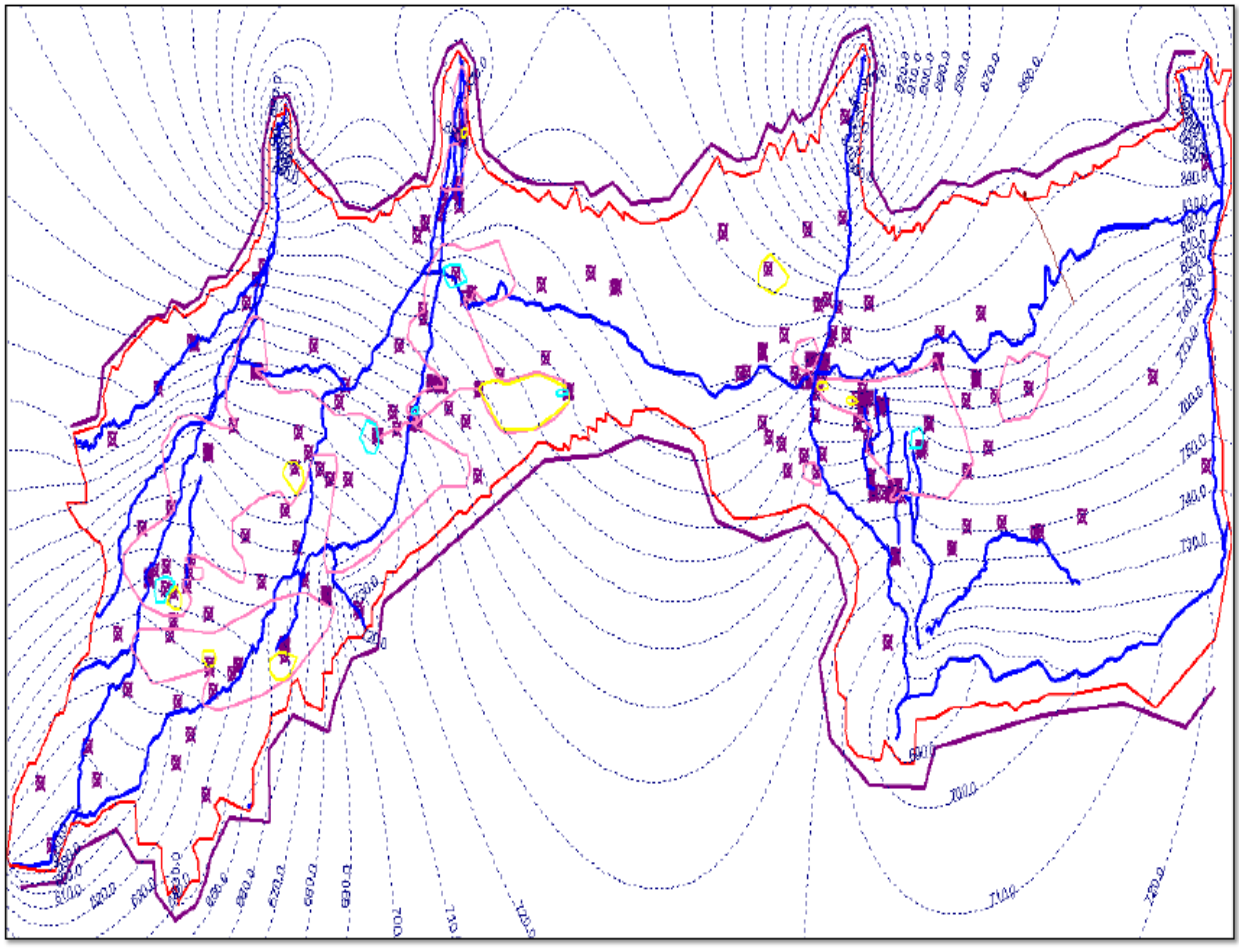


Рисунок 8. Карта гидроизогипс полученная в результате моделирования МАЭ.

Выводы

Таким образом, анализируя результаты моделирования, мы с уверенностью можем говорить о единстве условий формирования потока, общего для двух речных долин.

В связи с полученными результатами можно считать, что от Душанбе до Сурхан-Дарьи простирается Гиссарская долина, разделяющая субширотные хребты. А в этой долине текут две реки – притоки Сурхан-дарьи на западе и Кафирнигана на востоке. Пока при современном развитии водопотребления из подземных горизонтов еще можно считать запасы раздельно для населенных пунктов в западной и восточной частях долины. Но с развитием водопотребления, ирригации, переброски воды между долинами придется учитывать единство обеих частей Гиссарской долины и оперировать понятием «месторождение подземных вод Гиссарской гидрогеологической структуры».

В ходе исследования, оказались важными такие проблемы в исходных материалах, как геометрия рек, параметры скважин, литологические характеристики пород и т.д.

Рекомендуется бурение нескольких дополнительных скважин на юге водораздела Ханака-Каратаг и по всей долине, с целью более детального изучения литологии и водообильности галечников и выявления абсолютной мощности водоносных горизонтов.

В Таджикистане каждая долина нуждается в таких исследованиях, и в дальнейшем с помощью МАЭ можно строить геоинфильтрационную модель всей площади Гиссарской долины.

Литература

Опубликованные

1. Всеволожский В.А. Основы гидрогеологии. М.: МГУ, 2007. -448 с.
2. Гидрогеология СССР, том 41 «Таджикская ССР». М.: «Недра», 1972.
3. Геология СССР, том 24 «Таджикская ССР». М: «Гос. науч.-техн. изд-во лит. По геол. и охране недр», 1959. -735 с.
4. Костенко Н.П. Местная стратиграфическая схема четвертичных отложений Таджикской депрессии. Тезисы доклада к совец. по унификации стратиграфии схемы Средней Азии. М., 1958.
5. Костенко Н.П., Мирошниченко Л.Н., Никитин Р.М. Гидрогеологические исследования в межгорных впадинах Южного Таджикистана. М.: МГУ. 1991.
6. Лоскутов В.В. Геоморфология Таджикистана. 1962.
7. Мусаелян А.А. Лессовидные грунты основания гражданских сооружений в г. Душанбе (в сейсмических районах). Ташкент, 1963.
8. Расторгуев А.В., Капырин И.В., Левицкая Е.В., Сускин В.В. Метод аналитических элементов для решения задач геофильтрации и геомиграции. М: МГУ, 2016.
9. Сарабеков Н.Ш. Инженерно-геологические процессы Юго-Западного склона Гиссарского хребта: оценка и прогнозирование риска стихийных бедствий. Душанбе, 2016.
10. Таджибеков Мададбек. Важнейшие закономерности геологического строения и история формирования внутригорных впадин Юго-Востока Средней Азии, а новейшем этапе. Алматы: 2006.
11. Шарифов Г.В. Инженерно-геологическая типизация георисков на территории города Душанбе и его агломерации. Душанбе, 2015.
12. Шестаков В.М. Гидрогеодинамика. М.: КДУ, 2009. -334 с.
13. Разыков Б.Х. Экономическая оценка и промышленное использование минеральных вод Таджикистана. Душанбе: Дониш, 2007. -89 с.

Фондовые

14. Ахмедов А.С. Комплексное исследование подземных источников воды для размещения новых групп скважин и длительное проектирование в городах Гиссар и Турсунзаде. 2013.
15. Босов В.Д. Третичные континентальные отложения Таджикской депрессии. Ташкент, 1962.

16. Васильев В.А., Костенко Н.П., Ласкутов В.В., Чедик О.К. Причины геоморфологической съемки территории Таджикистана в масштабе 1:500000. 1960.
17. Гей. Л.И., Ловиев В.Л. и др. Геологические описания северной части лист 2 I-42-55. Фонды УГ СМ Таджикской ССР, 1962.
18. Домарев С.Н. Подземные воды юго-западного Таджикистана. Фонды УГ СМ Таджикской ССР, 1943.
19. Ермолин П.М. Пояснительная записка к инженерно-геологическому обследованию участка строительства ЦККП Таджикистана. Фонды УГ СМ Таджикской ССР, 1953.
20. Зегильман Б. Гидрогеологические исследования в Гиссарской долине Таджикской ССР. Фонды УГ СМ Таджикской ССР, 1935.
21. Ивашкин В.Е. Информационный отчет о региональной оценке запасов подземных вод междуречья Ширкент-Каратаг в 1992-93 г.г. Пос. Разведчик, 2003.
22. Керкис В.В. Краткая инженерно-геологическая характеристика Большого Гиссарского канала. Фонды УГ СМ Таджикской ССР, 1943.
23. Костенко Н.П. Строение антропогенного покрова Гиссарской и Илякской долин. Фонды УГ СМ Таджикской ССР, 1956.
24. Куделько А.А., Белокопытов И.Ф. Результаты гидрогеологических исследований в долине р. Ширкент для промышленно-технического водоснабжения Таджикского алюминиевого завода с подсчетом запасов подземных вод в сентябрь 1965 г. Фонды УГ СМ Таджикской ССР, 1965.
25. Лим С.В. Составление открытого варианта карт четвертичных отложений и геоморфологии Таджикистана масштаба 1:500000: Душанбе, 1985. - Т. I, кн.1.- 1 л. 17
26. Лоскутов В.В. Геоморфология и новейшая тектоника Памира. Фонды УГ СМ Таджикской ССР, 1964.
27. Лысков, Л.М. Информационный отчет об исследованиях «Новейшая тектоника» территории Таджикской ССР масштаб 1:500000: на основе космической съемки. Душанбе, 1978. - 39 с.
28. Обидин. Н.И. Гидрогеологический очерк центральной части Гиссарской долины по исследовании 1940-41 гг. Фонды УГ СМ Таджикской ССР, 1942.
29. Симаков С.Н., Рисс К.К. Геологическое описание трапеции I-42-54. Отчет о работах Душанбинской партии за 1944 г. Фонды УГ СМ Таджикской ССР, 1947.

ОМӮЗИШИ НОБАРОБАРИИ ФИЛТРИИ УФУҚҲОИ ОББОРИ ВОДИИ ҲИСОР

Қурбонов М.Д., Расторгуев А.В.
ДДМ ба номи М.В. Ломоносов

Аннотатсия. *Дар ин мақола водиҳои Ҳисор ва Сурхондарё таҳқиқ шудаанд. Шароити гидрогеологии майдони кор тавсиф карда шудааст. Дар мақола проблемаҳои асосии*

тадқиқоти пештара дар водӣ муайян карда шудаанд. Баъди таҳлии материалҳои мавҷуда схемаҳои районҳо аз рӯи коэффитсиенти филтрӣ, аз рӯи ғафсии қабатҳои об, аз рӯи ғафсии гидроизолятсияи боло сохта шуданд. Аз рӯи графикҳои тақсимоти нормал ва логнормалӣ коэффитсиенти миёнаи филтрӣ барои тамоми водӣ муайян карда шуд. Бо истифода аз усули унсурҳои таҳлилӣ (УУТ) дар барномаи GFLOW модели геофилтратсияи водӣ бо масоҳати 800 км^2 сохта шудааст. Маҷрои об аз паҳлӯҳои водӣ 494629 м^3 дар як шабонарӯзро ташкил медиҳад.
Калидвожаҳо. *Водии Ҳисор ва Сурхондарё, обгириҳо, қабатҳои обӣ, нобаробарии филтрӣ, коэффитсиенти филтрӣ, газариши об, ғафсӣ, схемаи минтақавӣ, графики тақсимоти муқаррарӣ, шароити сарҳадӣ, режим, моделсозии геофилтрӣ, дискретизатсия, гидроизгипс, ГИС МАПИНФО, УУТ, GFLOW.*

STUDY OF FILTRATION HETEROGENEITY OF AQUIFERS IN THE GISSAR VALLEY

Kurbonov M.D., Rastorguev A.W.
Lomonosov Moscow State University

Annotation. *In this work, the Gissar and Surkhandarya valleys were investigated. The hydrogeological conditions of the work area are characterized. The paper identifies the main problems of previous studies in the valley. After analyzing the available materials, zoning schemes were built according to the filtration coefficient, according to the thickness of the aquifers, according to the thickness of the upper aquicludes. From the graphs of normal and lognormal distributions, the average filtration coefficient for the entire valley was determined. Using the method of analytical elements (MAE) in the GFLOW program, a geofiltration model of a valley with an area of 800 km^2 was built. The inflows from the sides of the valley are estimated at 494629 m^3/day.*
Keywords. *Gissar and Surkhandarya valleys, water intakes, aquifers, filtration heterogeneities, filtration coefficient, permeability, capacity, specific flow rate, head, zoning scheme, normal distribution graph, boundary conditions, mode, geofiltration modeling, discretization, hydroisohyps, GIS MAPINFO, MAE, GFLOW.*

Сведения об авторах. **Курбонов Муродали Давлатхуджаевич** - аспирант кафедры гидрогеологии Геологического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, тел: +79254664409, E-mail: murod.kurbanov@inbox.ru.
Расторгуев Александр Владилинович – к.т.н. доцент кафедры гидрогеологии Геологического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, E-mail: alvr9@mail.ru

УДК 624.131

СВОЙСТВА АЛЛЮВИАЛЬНЫХ ПЕСКОВ ПОЙМЫ РЕКИ КАФИРНИГАН (ГОРОД ВАХДАТ) КАК СТРОИТЕЛЬНОГО СЫРЬЯ И ОСНОВАНИЯ СТРОЕНИЙ

Наджотов А.Б., Салихов Ф.С.
Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе

Аннотация. *Исследованы аллювиальные пойменные пески правого борта долины реки Кафирниган в пределах города Вахдат. Определены гранулометрический состав, пористость и плотность этих песков, что позволило сделать вывод о пригодности данных песков в качестве строительного материала и достаточно прочного основания для строительства.*
Ключевые слова: *аллювиальные пески, физико-механические свойства, Кафирниган, строительный материал, основание строений.*

Аллювий является одним из наиболее распространенных генетических типов континентальных осадочных образований. Аллювиальные пески являются экономически выгодным строительным материалом и нередко на аллювиальных грунтах возводятся здания и сооружения, что делает актуальным вопрос изучения свойств этих грунтов [1]. Нами исследованы гранулометрический состав, плотность, пористость аллювиальных песков правого берега поймы реки Кафирниган как строительного материала и основания строений. Для изучения характеристик грунтов осенью 2021 года были отобраны три образца на пойме реки Кафирниган на окончании улиц Бинокорон, Эригитов и Шодмон в городе Вахдат.

Методика исследований. Гранулометрический состав аллювиальных песков правого берега поймы реки Кафирниган определялся ситовым методом. Определялось процентное содержание частиц по фракциям (гравелистых, песчаных, пылеватых и глинистых частиц), что позволило классифицировать грунты (табл.1) по классификации Е.М. Сергеева [2]. Во всех образцах преобладают частицы песчаной фракции (2 – 0.05мм). Грунты отобранные на улице Бинокорон и на улице Шодмон являются песком гравелистым, неотсортированным, крупным т.к. суммарно преобладают частицы >0.25мм (по Е.М. Сергееву [2]). Грунт отобранный на улице Эригитов является песок пылеватый, неотсортированный, мелкий т.к. суммарно преобладают частицы <0.25 (по Е.М. Сергееву [2]) (рис.1).

Таблица 1. Гранулометрический состав песчаных грунтов

Место отбора	Содержание частиц по фракциям (мм), %							Классификация песчаного грунта по Е.М. Сергееву
	>2	2,0-1,0	1,0-0,5	0,5-0,25	0,25-0,1	0,1-0,05	<0,05	
улица Бинокорон	6,80	13,9	8,3	38,7	19,9	2,50	9,90	Песок гравелистый крупный
улица Эригитов	0,55	3,3	7,86	25,32	39,76	11,36	11,85	Песок пылеватый мелкий
улица Шодмон	9,14	10,43	11,54	28,82	26,15	6,47	7,45	Песок гравелистый крупный

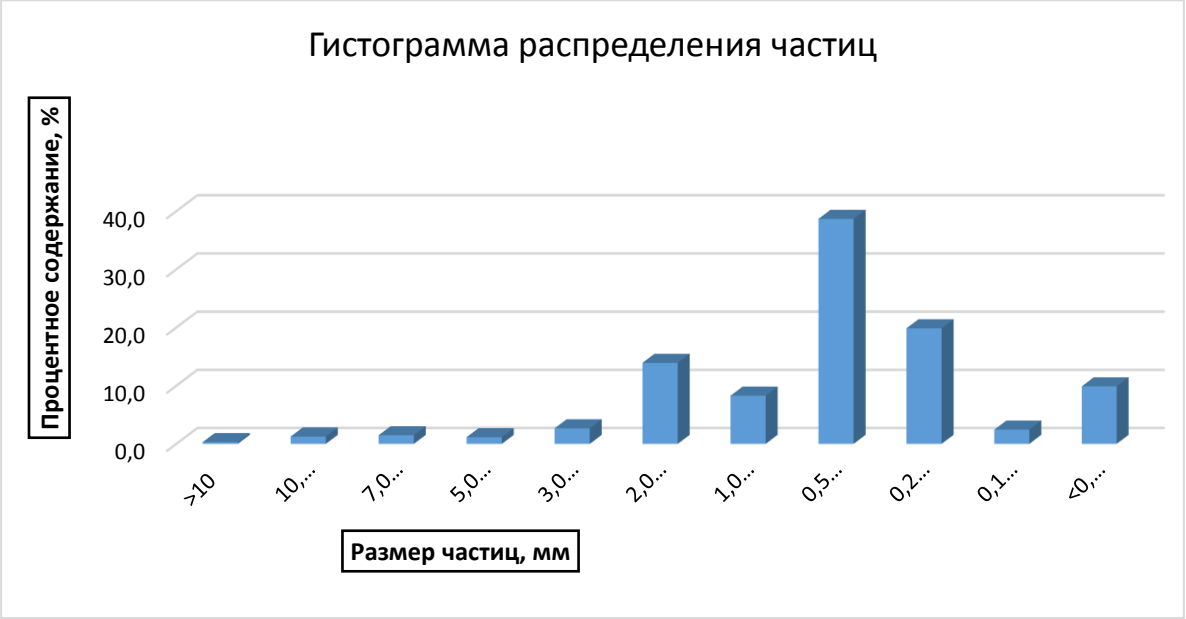


Рисунок 1. Гистограмма распределения частиц.

Интегральная кривая результатов гранулометрического анализа в полулогарифмическом масштабе (рис.2) позволяет просчитать коэффициент неоднородности (табл.2), что в свою очередь показывает неоднородность грунтов (значения $К_н$ больше 3). Также были определены медианы данных грунтов (табл.3).

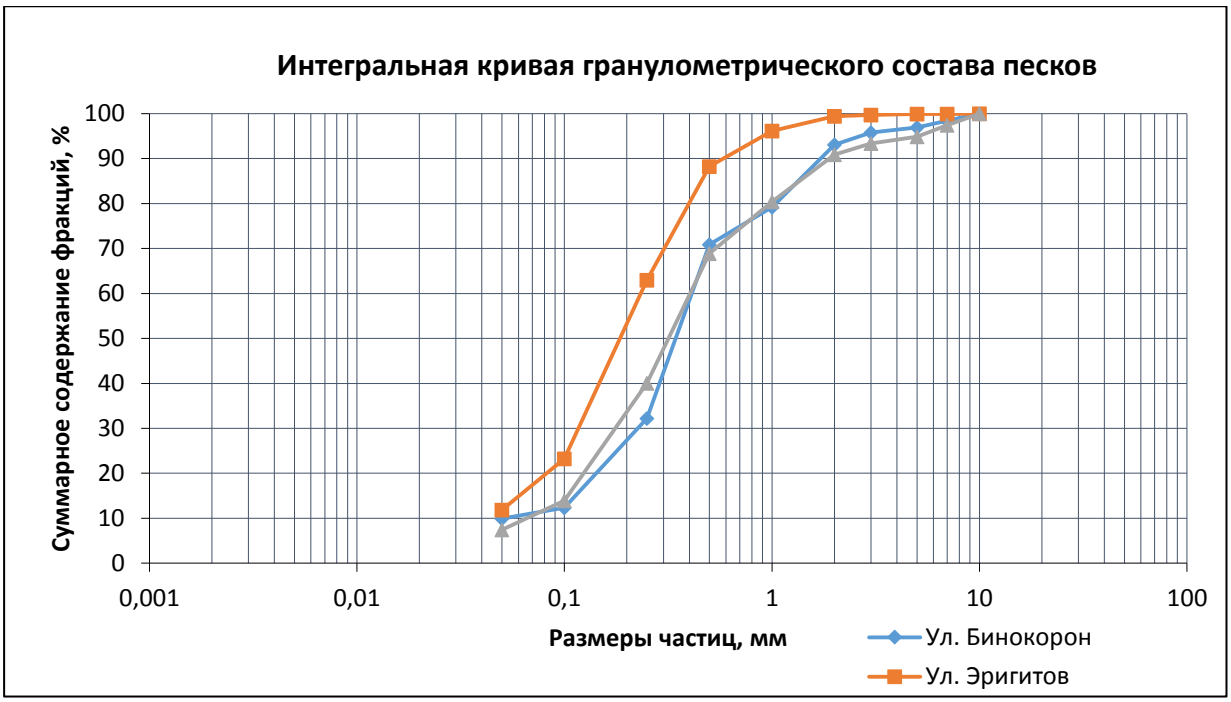


Рисунок 2. Интегральная кривая гранулометрического состава песков.

Таблица 2. Коэффициенты неоднородности результатов гранулометрического состава

Место отбора	d60	d10	Коэффициент неоднороднос ти d60/ d10	Классификация по ГОСТ 25100-2020
Ул.Бинокорон	0,31	0,051	6,07	Неоднородный
Ул.Шодмон	0,31	0,06	5,16	Неоднородный

Таблица 3. Результаты расчетов медианы

Место отбора	Медиана
ул. Бинокорон	0,35
ул. Эригитов	0,19
ул. Шодмон	0,32

Влажность (%). По результатам лабораторных исследований влажность аллювиальных песков правого берега поймы реки Кафирниган варьируется от 12 до 13% (табл.4). Значения влажности для всех трех образцов почти одинаковы. Это связано с тем, что образцы были отобраны на пойменных участках.

Плотность(р). Величина плотности дисперсных грунтов колеблется от 1.30 до 2.20 г/см^3 [2]. Плотность определялась методом режущего кольца

[3]. Значения плотности песков правого берега поймы реки Кафирниган колеблятся от 1.65 до 1.78 г/см^3 (табл.4). Эти значения плотности высоки по причине высокой влажности.

Плотность скелета грунта (p_d). Плотность скелета грунта зависит от пористости и состава твердой компоненты [3]. Чем ниже значения пористости тем выше значения плотности скелета грунтов. Для исследованных грунтов плотность скелета грунта варьируется от 1.46 до 1.58 г/см^3 (табл.4). Это связано с тем, что у исследуемых грунтов достаточно высокие значения пористости и следовательно, при высоких значениях пористости уменьшается значение плотности.

Плотность твердых частиц (p_s). Плотность твердых частиц зависит только от минерального состава и наличия в нем органических веществ. Она определялась пикнометрическим методом. Плотность твердых частиц аллювиальных песков правого берега поймы реки Кафирниган имеет довольно высокие значения. Они варьируются от 2.66 до 2.68 и это говорит о том, что в состав данных песков не входит органическое вещество, в противном случае плотность твердых частиц грунтов была бы существенно ниже (табл. 4).

Таблица 4. Физико – механические свойства песчаных грунтов

	Ул. Бинокорон	Ул. Эригитов	Ул. Шодмон
Естественная влажность, %	12.6	13.1	13.02
Естественная плотность, г/см^3	1.67	1.65	1.78
Плотность твердых частиц, г/см^3	2.66	2.68	2.68
Плотность скелета грунта, г/см^3	1.49	1.46	1.58
Пористось, %	44	45	40
Коэффициент пористости, д. ед	0.8	0.83	0.69

Пористость и коэффициент пористости (n,e). Значения пористости и коэффициента пористости исследуемых песков довольно высоки. Значения пористости колеблется от 40 до 45%, а значение коэффициента пористости от 0.69 до 0.83 д. ед. (табл. 4).

Выводы

Полученные данные позволяют сделать вывод о том, что:

- исследуемые грунты имеют высокую плотность, пригодную для строительных песков,
- наличие воды в грунтах увеличивает их плотность,
- отсутствие органического вещества является также положительным фактором для использования данных песков в качестве строительного материала.

В целом можно утверждать, что данные грунты являются прочным основанием для возведения зданий и сооружений [4, 5], а также могут рассматриваться в качестве строительного материала.

Литература

1. Ларионов А.К., Приклонский В.А., Ананьев В.П. Лессовые породы и их строительные свойства. – М.: Госгеолиздат, 1959, - 367 с.
2. Лабораторный практикум по грунтоведению: Учебное пособие / Под ред. В.А Королева, В.Н. Широкова и В.В Шаниной. – Душанбе: Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова, 2019. – 240 с.
3. Лабораторные работы по грунтоведению: Учебное пособие / Под ред. В.Т. Трофимова и В.А. Королева. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: КДУ, Университетская книга, 2017, - 654 с. Душанбе: Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова, 2019. – 240 с.
4. Основания и фундаменты на просадочных грунтах / Крутов В.И. – Киев: Будивельник, 1982, - 224 с.
5. СП 22.13330.2016 Основания зданий и сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.02.01-83 (с изменением №1). -М., 2016, - 160 с.

ХУСУСИЯТҲОИ РЕГИ АЛЛЮВИАЛИИ САНГОБИ ДАРЁИ КОФАРНИҲОН (ШАҲРИ ВАҲДАТ) ҲАМЧУН АШЁИ БИНОКОРӢ ВА ТАҲКУРСИИ БИНОҲО

Начотов А.Б., Салихов Ф.С.
Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар ш. Душанбе

Аннотация. *Реги аллювиалии тарафи рости водии Кофарниҳон дар дохили шаҳри Ваҳдат таҳқиқ карда шуд. Таркиби гранулометрӣ, ковокӣ ва зичии ин регҳо муайян карда шуд, ин имкон дод, ки дар бораи ба сифати масолеҳи бинокорӣ ва таҳкурсии ба қадри кофӣ мустаҳкам мувофиқ будани ин регҳо хулоса бароварда шавад.*

Калидвожаҳо: *регҳои аллювиалӣ, хосиятҳои физикию механикӣ, Кофарниҳон, масолеҳи сохтмонӣ, таҳкурсии биноҳо.*

PROPERTIES OF ALLUVIAL SANDS OF THE KAFIRNIGAN RIVER FLOOD (VAKHDAT CITY) AS BUILDING RAW MATERIALS AND BASES OF BUILDINGS

Najotov A.B., Salikhov F.S.
Lomonosov Moscow State University in Dushanbe

Annotation. *The alluvial floodplain sands of the right side of the Kafirnigan river valley within the city of Vakhdat were investigated. The granulometric composition, porosity and density of these sands were determined, which made it possible to draw a conclusion about the suitability of these sands as a building material and a sufficiently strong foundation for construction.*
Keywords: *alluvial sands, physical and mechanical properties, Kafirnigan, building material, foundation of buildings.*

Сведения об авторах. **Наджотов Абуали** – выпускник направления подготовки Геология Филиала МГУ имени М.В.Ломоносова в г. Душанбе, тел.: +992 888 877 900.
Салихов Фарид Салохиддинович – к.г.-м.н., доцент, заведующий лабораторией геологии Филиала МГУ имени М.В.Ломоносова в г. Душанбе. тел.: +992 918610162. E-mail: ffaarriidd@bk.ru

УДК 624.131.439

ОПЫТ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГЛИНИСТЫХ ГРУНТОВ В УСЛОВИЯХ КОМПРЕССИОННОГО СЖАТИЯ СТАТИЧЕСКИМ НАГРУЖЕНИЕМ И В РЕЖИМЕ РЕЛАКСАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

Широков В.Н.[1], Заболоцкая А.А.[2]
МГУ имени М.В. Ломоносова[1]
ООО «ЭТКПроект»[2]

Аннотация. *Определены значения одометрического модуля деформации глинистых грунтов природного и нарушенного сложения различного возраста, генезиса, состава и состояния стандартным методом по ГОСТ 12248.4-2020 и методом релаксации напряжений. Показано, что получаемые разными методами значения модуля деформации на образцах – близнецах могут как практически совпадать, так и существенно отличаться друг от друга. Степень совпадения и различия показателя зависят от качества грунта и выбранного интервала нагрузок.*
Ключевые слова: *грунты, деформируемость грунтов, компрессионные испытания, статическое нагружение, метод релаксации напряжений, одометрический модуль деформации.*

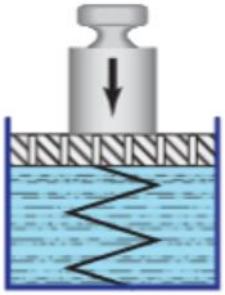
Под грунтами принято понимать «любые горные породы, почвы, осадки и антропогенные геологические образования, рассматриваемые как многокомпонентные динамичные системы, исследуемые в связи с планируемой, осуществляемой или осуществлённой деятельностью

человека» [1, с. 19]. Подчеркнём, что грунт как объект исследований представляет собой многокомпонентную и динамичную систему, включающую твёрдый, жидкий и газообразный компоненты. При этом к глинистым относятся тонкодисперсные образования, содержащие не менее 3 % глинистых частиц. Среди методов определения показателей деформационных свойств глинистых грунтов наиболее широкое применение в ходе инженерных изысканий находят лабораторные методы, и в первую очередь, компрессионные испытания, выполняемые в соответствии со стандартом ГОСТ 12248.4-2020 [2]. Этот метод достаточно прост с точки зрения выполнения эксперимента, однако требует много времени. В зависимости от гранулометрического состава и состояния глинистых грунтов один опыт может продолжаться от 3-4 дней до месяца [3]. Существенно сократить время, необходимое для получения значений одометрического модуля деформации E_{oed}, позволяет метод релаксации напряжений (МРН), разработанный А.Н. Труфановым [4]. Метод подробно описан в стандарте предприятия НП «КубаньСтройИзыскания» (СТО 60284311-003-2012 [5]), а ГОСТ 12248.4 *допускает* его использование при определении характеристик деформируемости дисперсных грунтов при их исследовании для строительства.

Принципиальное отличие методов друг от друга А.Н. Труфанов и А.А. Чайкин описывают так: «При стандартных испытаниях нагружение на каждой ступени осуществляется заданной величиной вертикального давления σ, что на модели показано в виде груза, установленного на штамп (рис. 1а). При испытаниях методом релаксации напряжений нагружение осуществляется заданием перемещений Δh, что на модели обеспечивается вращением винта винтовой пары» (рис. 1г) [6, с. 39]. Происходящие в ходе эксперимента изменения давления и деформаций представлено на рис. 2: «а» и «б» – для статического нагружения, «в» и «г» – для МРН.

а)

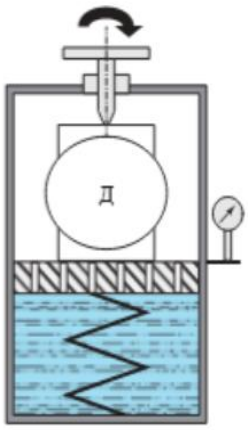
заданные напряжения



σ = const; Δh = f(t)

б)

заданные деформации

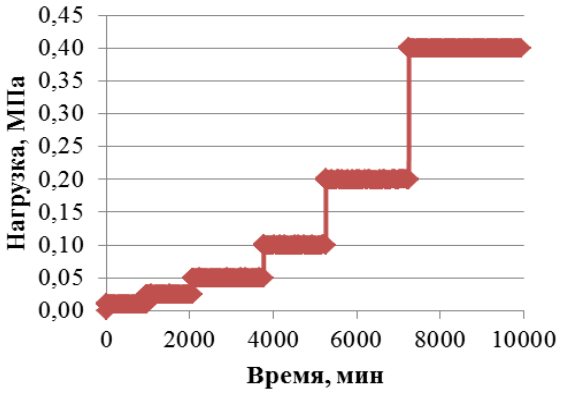


σ = f(t); Δh = const

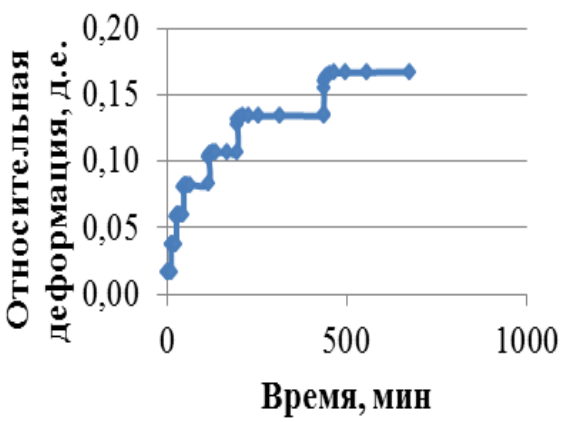
Рисунок 1. Схемы нагружения образцов в ходе компрессионных испытаний по стандартной методике в режиме заданных напряжений (а) и методом релаксации напряжений в режиме заданных деформаций (б) [6]: σ – приложенное на образец давление; Δh – изменение высоты образца

Широкое применение МРН изыскательскими организациями ограничивается рядом факторов, в числе которых наиболее существенным является очень малое количество результатов сопоставления деформационных характеристик для грунтов различного возраста, генезиса, состава и состояния, полученных этим методом с теми, которые получают стандартным методом. Примерами немногих работ в этом направлении являются статьи А.Н. Труфанова [4], в которой объектом исследований были твердые вендские суглинки и водонасыщенные тяжелые глины текучей консистенции, а также А.Н. Труфанова и А.А. Чайкина [6], посвящённая покровным, водно-ледниковым и ледниковым отложениям московского региона.

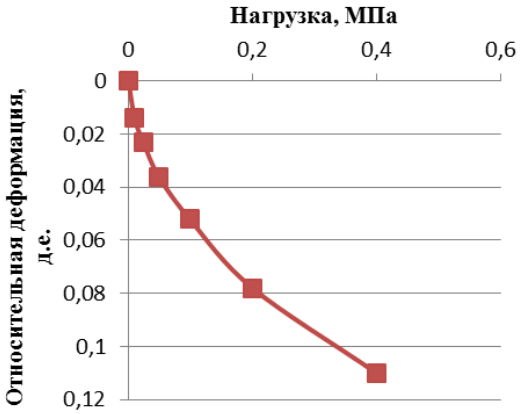
а)



в)



б)



г)

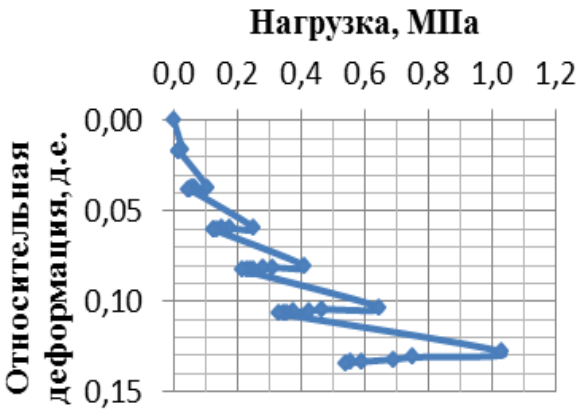


Рисунок 2. Графическое представление результатов компрессионных испытаний по стандартной методике (а, б) и методом релаксации напряжений (в, г) на примере образцов нарушенного сложения тяжелой глины J_3ox

Настоящее исследование представляет собой сравнительный анализ деформируемости в условиях компрессии глинистых грунтов, отличающихся по составу и строению, с применением классического статического режима нагружения и метода релаксации напряжений. Программа работ предусматривала:

- подбор образцов природного сложения, отличающихся по составу и состоянию;
- изготовление на их основе искусственных (модельных) образцов с заданными значениями плотности и влажности;
- компрессионные испытания природных и искусственных образцов стандартным методом и методом МРН;
- графическую обработку результатов экспериментов и расчёт значений модуля деформации E_{oed} в различных диапазонах прикладываемых напряжений;
- анализ полученных зависимостей и результатов расчётов.

Исследования выполнялись на трёх группах образцов грунтов. Две из них испытывались как при природном, так и при нарушенном сложении: это суглинок легкий пылеватый юрского периода келловейского века (г. Красногорск, Московская область) и глина тяжелая юрского периода оксфордского века (г. Обнинск, Калужская область). Кроме того, для приготовления грунтовой пасты была использована глина легкая пылеватая каменноугольного периода (г. Гжель, Московская область). Характеристики их состава, строения и свойств представлены в табл. 1.

Таблица 1. Характеристика грунтов

Возраст грунта	Глубина отбора, м	Наименование грунта по ГОСТ 25100-2020	Влажность природного сложения, %	Коэффициент пористости при природном сложении, д.е.	Плотность твердых частиц грунта, ρ_s, г/см^3	Влажность нижнего предела пластичности W_p, %	Влажность верхнего предела пластичности W_L, %	Число пластичности I_p ,%
C_3	-	Глина легкая пылеватая	-	-	2,81	37	55	18
J_3kl	19,5	Суглинок легкий пылеватый	19,1	0,56	2,72	19	31	12
J_3ox	15,0	Глина тяжелая	47	1,27	2,79	40	75	35

Искусственные образцы создавались по методике, изложенной в ГОСТе 30416-2012 [8] таким образом, чтобы для каждого из сравниваемых между собой образцов одного минерального состава плотность скелета грунта ρ_d была постоянна независимо от изменения влажности.

Напомним основные особенности проведения компрессионных испытаний стандартным методом и методом МРН. ГОСТ 12248 предусматривает воздействие на образец путём ступенчатого увеличения нагрузки при условии достижения на каждой предыдущей ступени этапа фильтрационной консолидации (на практике выполнение этого условия для глинистых грунтов сводится к ожиданию стабилизации деформации 0,05 % за 18 ч). В нашем эксперименте значения передаваемых на образцы напряжений составили 0.01; 0.025; 0.05; 0.1; 0.2; 0.4 МПа. Графически подобная схема нагружения представлена на рис. 2а, а результатом испытаний является компрессионная кривая (рис. 2б). В методе МРН воздействие на образец реализовывается заданием ему на каждом этапе испытаний фиксированной деформации (рис. 2в), значение которой определяется с учётом числа пластичности и коэффициента пористости [5]. Итогом испытания каждого образца является график взаимосвязи

напряжений и деформаций (рис. 2б и 2г), по результатам обработки которого получают значения модуля деформации E_{eod}.

Методические особенности проведения экспериментов представлены в таблице 2.

Таблица 2. Особенности испытаний грунтов методами статического нагружения и релаксации напряжений

метод испытаний / Приборы	параметры испытаний		
	задаваемый параметр	фиксируемый параметр	критерий перехода к следующей ступени
Статический / АСИС	напряжение, давление	деформация	окончание фильтрационного этапа или скорость деформаций
МРН / Релаксометр КР-2 конструкции А.Н. Труфанова	деформация	напряжения и деформации	окончание фильтрационного этапа или скорость изменения напряжений

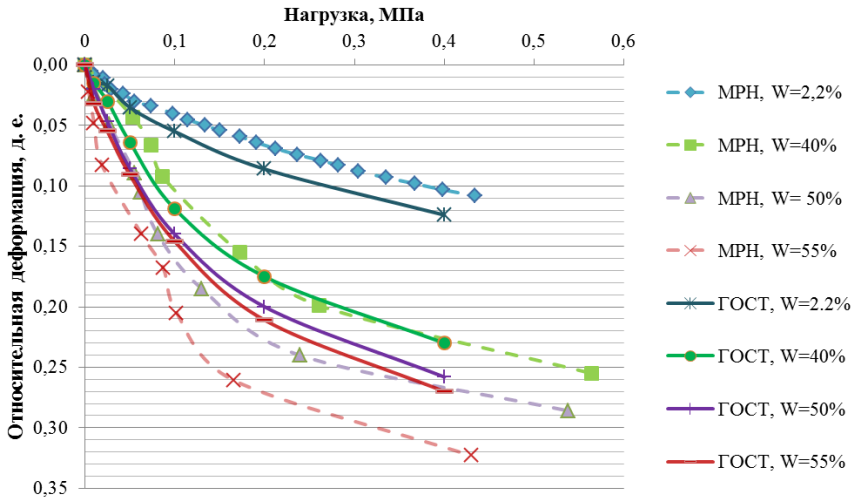
Компрессионные кривые, полученные стандартным методом и методом релаксации напряжений для *искусственно сформированных образцов*, представлены на рис. 3. На графиках тип линий отражает метод испытаний, а цвет – влажность грунтов. Анализ результатов параллельных испытаний показал, что компрессионные кривые, полученные на приборе АСИС и на релаксометре КР-2, полностью совпадают для всех грунтов, имеющих влажность близкую к влажности нижнего предела пластичности W_P. Для образцов с влажностью выше W_P компрессионные кривые, полученные методом релаксации напряжений, имеют схожий характер, но располагаются ниже, чем при стандартном проведении испытаний. Иначе говоря, при одних и тех же нагрузках грунт при влажности $W > W_P$ испытывает бóльшие деформации в ходе испытаний методом МРН. Подобное явление для образцов с большим количеством жидкого компонента может быть связано с тем, что более высокий градиент давления, возникающий в начале каждой ступени при МРН-испытаниях, является причиной более интенсивного оттока влаги, благодаря чему скелет грунта быстрее вовлекается в работу и при одинаковом конечном значении напряжений фиксируются более высокие значения относительной

деформации. Заметим, что полное совпадение либо параллельное расположение фрагментов компрессионных кривых обуславливают близость величин модулей деформации для заданных диапазонов давлений (табл. 3). А максимальное расхождение значений E_{eod}, полученных разными методами, достигает 30-50%.

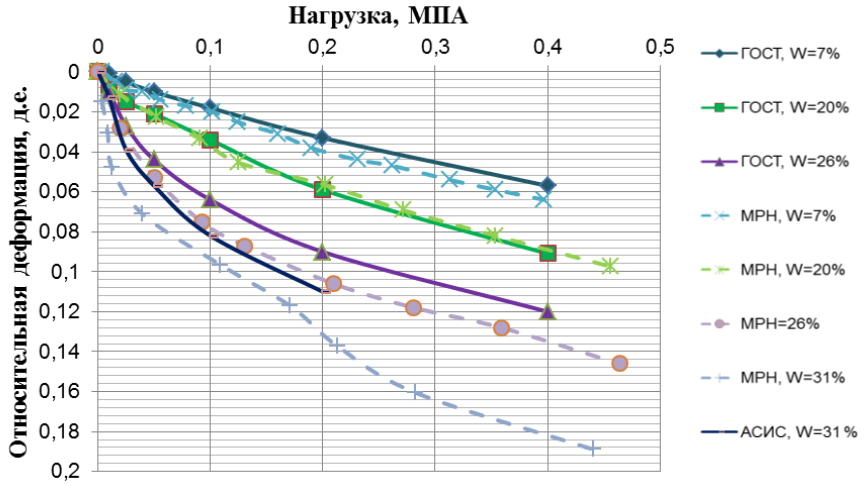
Что касается грунтов *природного сложения* юрского возраста, то в первую очередь следует отметить их состояние – и суглинок, и глина имеют положительные, но близкие к нулю, значения показателя консистенции I_L, т.е. их влажность очень близка к влажности нижнего предела пластичности. В этой связи тот факт, что наблюдается полное совпадение графиков параллельных испытаний образцов-близнецов келловейской глины природного сложения с влажностью нижнего предела пластичности (W = 19.1 %, I_L = 0,01) нельзя считать случайным. Точно так же, как и то, что компрессионные кривые образцов-близнецов оксфордской глины природного сложения (W = 47.3 %, I_L = 0.21) повторяют зависимость, полученную на модельных грунтах – графики практически на всём интервале нагрузок оказались параллельны друг другу (рис. 4).

Неоспоримым преимуществом испытаний с использованием метода релаксации напряжений является их относительно малая продолжительность (табл. 4). Если длительность испытаний при стандартном режиме нагружения изменялась от 4-х до 9-и суток, то для определения аналогичных показателей в режиме релаксации напряжений потребовалось от 3-х до 15 часов. Другими словами, на выполнение экспериментов потребовалось времени меньше в среднем в 26 раз.

а)



б)



в)

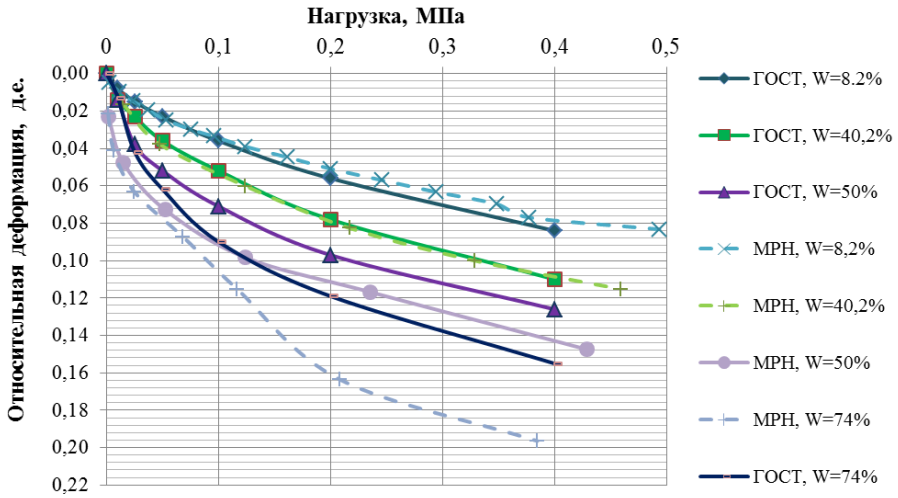


Рисунок 3. Результаты компрессионных испытаний искусственно сформированных образцов, полученные по стандартной методике и методом МРН:
а – глина лёгкая (C_3); б – суглинок легкий пылеватый (J_3kl); в – глина тяжелая (J_3ox).

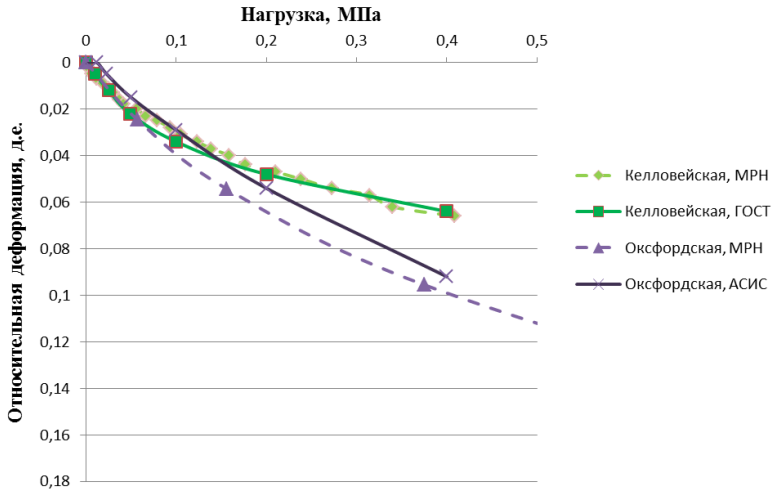


Рисунок 4. Результаты компрессионных испытаний суглинка легкого пылеватого (J_3kl) и глины тяжелой (J_3ox) природного сложения, полученные по стандартной методике и методом МРН

Таблица 3. Значения одометрических модулей деформации E_{oed} искусственно сформированных образцов в диапазонах нагрузок $\frac{0,1-0,2}{0,2-0,3}$ МПа

Грунт	Модуль деформации E_{oed} (МПа) при заданных значениях влажности							
	гигроскопическая влажность W_g		влажность нижнего предела пластичности W_P		пластичный грунт $W_g < W < W_P$		влажность верхнего предела пластичности W_L	
	МРН	АСИС	МРН	АСИС	МРН	АСИС	МРН	АСИС
Глина легкая пылеватая C_3	$\frac{3,8}{5,0}$	$\frac{3,3}{5,0}$	$\frac{1,5}{3,0}$	$\frac{1,8}{3,3}$	$\frac{1,3}{3,3}$	$\frac{1,5}{3,3}$	$\frac{1,5}{3,5}$	$\frac{1,5}{3,3}$
Суглинок легкий пылеватый J_3kl	$\frac{3,5}{5,2}$	$\frac{4,5}{5,3}$	$\frac{3,5}{3,7}$	$\frac{2,7}{4,0}$	$\frac{2,5}{4,0}$	$\frac{2,5}{4,2}$	$\frac{2,0}{3,0}$	$\frac{2,3}{2,8}$
Глина тяжелая J_3ox	$\frac{5,3}{7,8}$	$\frac{5,0}{7,3}$	$\frac{4,3}{5,5}$	$\frac{3,8}{6,8}$	$\frac{4,5}{6,3}$	$\frac{3,8}{5,3}$	$\frac{1,8}{5,5}$	$\frac{3,5}{5,3}$

Таблица 4. Продолжительность компрессионных испытаний образцов нарушенного сложения различной влажности при стандартном режиме испытаний (ГОСТ) и в режиме релаксации напряжений (МРН)

Образец		Продолжительность	
Грунт	Влажность, %	ГОСТ, сутки	МРН, час
Глина лёгкая (C_3)	2,2	9,1	3,0
	40	6,9	9,1
	50	4,9	11,7
	55	7,0	15,0
Суглинок легкий пылеватый (J_3kl)	7,0	4,1	3,0
	20	5,0	5,6
	26	6,2	6,0
	31	7,1	6,8
Глина тяжелая (J_3ox)	8,6	7,0	4,0
	40	7,9	7,3
	50	7,2	6,1
	74	8,3	5,0

Кроме оценки затрат времени, необходимого на проведение экспериментов, результаты исследований можно свести к следующим положениям:

1. В опубликованной на данный момент литературе отсутствуют результаты сопоставления деформационных характеристик, полученных стандартным методом и методом релаксации напряжений для широкого круга грунтов различного возраста, генезиса, состава и состояния, исследованных в различных регионах.
2. Практическая реализация компрессионных испытаний методом релаксации напряжений осуществляется в соответствии со стандартом предприятия СТО 60284311-003-2012 – основным нормативным документом, описывающим методику экспериментов. Однако работ, посвящённых рассмотрению механизма поведения грунтов, отличающихся, прежде всего, составом и состоянием, при их испытаниях анализируемыми методами, нами не встречено.
3. Визуальный анализ компрессионных кривых, полученных для образцов нарушенного сложения стандартным методом и методом МРН, свидетельствует о том, что в координатах «относительная деформация – напряжение» можно видеть как их полное совпадение, так и расхождение на большую или меньшую величину.

Наибольшее совпадение компрессионных кривых, полученных различными методами, наблюдается при испытании грунтов с влажностью близкой к нижнему пределу пластичности. При иных значениях влажности взаимное расположение графиков зависит от содержания влаги: для воздушно-сухого состояния оно неоднозначно, а для пластичных образцов ($W > W_p$) компрессионные кривые, построенные по результатам МРН-испытаний, располагаются ниже компрессионных кривых, построенных по стандартной методике ГОСТ 12248.4-2020.

4. Основными факторами, определяющими взаимное положение компрессионных кривых и их форму, на наш взгляд, являются как особенности грунтов, в частности соотношение в грунтах различных категорий и видов воды, так и значения величин напряжений, передаваемых на образцы в ходе экспериментов.

   При испытаниях грунтов методом релаксации напряжений на каждой ступени деформирования возникают значительные градиенты давления, провоцирующие отток слабосвязанной воды переходного типа (осмотической и капиллярной) в грунтах пластичной консистенции ($W > W_p$) и, как следствие, закономерно растущие значения относительной деформации за счёт сжатия скелета грунта. При стандартных компрессионных испытаниях градиенты давления, возникающие в образце, значительно меньше из-за сравнительно небольших прикладываемых ступеней нагрузок. В этом случае процесс перераспределения напряжений и оттока влаги происходит медленнее, отчего в итоге и скелет грунта испытывает меньшие деформации.
5. Следствием различия формы и взаимного расположения компрессионных кривых, полученными двумя методами, является изменчивость соотношения модулей деформации E_{oed} на различных по величине напряжений интервалах. Наибольшие отклонения характерны для невысоких значений напряжений, но по мере их увеличения значения модулей сближаются и в ряде случаев становятся равными.
6. Тенденции и закономерности, полученные на грунтах нарушенной структуры, прослеживаются и на грунтах природного сложения, однако для значимых выводов необходимы дополнительные эксперименты на грунтах различной консистенции.

Литература

1. Грунтоведение // Под ред. В.Т.Трофимова – 6-е изд., перераб. и дополн. (серия Классический университетский учебник) / В.Т. Трофимов,

В.А. Королёв, Е.А. Вознесенский и др. – М., Изд-во МГУ и Наука, 2005. – 1024 с.
2. ГОСТ 12248.4-2020. Грунты. Определение характеристик деформируемости методом компрессионного сжатия.
3. Труфанов А.Н. Компрессионные испытания в инженерно-геологических изысканиях // Инженерные изыскания. – 2015. – №8. – С.40-47.
4. Труфанов А.Н. Перспективы применения метода релаксации напряжений в практике инженерных изысканий // Инженерные изыскания. – 2013. – №5. – С. 44-51.
5. СТО 60284311-003-2012. Грунты. Метод компрессионных испытаний грунтов в режиме релаксации напряжений.
6. Труфанов А.Н., Чайкин А.А. Сравнительный анализ результатов компрессионных испытаний глинистых грунтов методом релаксации напряжений и по ГОСТ 12248-2010 // Инженерные изыскания. – 2014. – №5-6. – С. 38-43.
7. ГОСТ 25100-2020. Грунты. Классификация.
8. ГОСТ 30416-2012. Грунты. Лабораторные испытания. Общие положения.

ТАҶРИБАИ МУАЙЯН НАМУДАНИ ХУСУСИЯТҲОИ ДЕФОРМАТСИОНИИ ХОКҲОИ ГИЛИН ДАР ШАРОИТИ КОМПРЕССИОНӢ БО БОРИ СТАТИКӢ ВА ДАР РЕЖИМИ ФИШОРИ РЕЛАКСӢ

Широков В.Н.[1], Заболотская А.А.[2]
Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В. Ломоносов[1]
ҶДММ «ЭТКПроект»[2]

Аннотатсия. *Арзишҳои модули одометрии деформатсияи хокҳои гилии конститутсияи табиӣ ва вайроншудаи синну сол, генезис, таркиб ва ҳолати гуногун бо усули стандартӣ мувофиқи ГОСТ 12248.4-2020 ва бо усули релаксатсияи фишор муайян карда шудаанд. Нишон дода шудааст, ки арзишҳои модули деформатсия, ки бо усулҳои гуногун дар намунаҳои дугона ба даст оварда шудаанд, метавонанд ҳам амалан мувофиқат кунанд ва ҳам аз ҳамдигар хеле фарқ кунанд. Дараҷаи тасодуф ва фарқияти нишондиҳанда аз сифати хок ва фосилаи интихобшудаи сарборӣ вобаста аст.*

Калидвожаҳо: *хок, деформатсияи хок, озмоишҳои фишурдакунӣ, боркунии статикӣ, усули релаксатсияи фишор, модули деформатсияи одометрӣ.*

EXPERIENCE IN DETERMINING THE DEFORMATION CHARACTERISTICS OF CLAY SOILS UNDER CONDITIONS OF ODOMETRIC COMPRESSION WITH STATIC LOADING AND IN THE STRESS RELAXATION MODE

Shirokov V.N.[1], Zabolotskaya A.A.[2]
Lomonosov Moscow State Universiti[1]
OOO «ETKProekt»[2]

Annotation. *The values of the odometric modulus of deformation of undisturbed and disturbed clay soils of various ages, genesis, composition and state were determined by the standard method according to GOST 12248.4-2020 and by the stress relaxation method. It is shown that*

the values of the deformation modulus obtained by different methods on twin-samples can both practically coincide and differ significantly from each other. The degree of coincidence or difference of the indicators of deformation properties depends on the quality of the soil and the selected load interval.
***Keywords**: soils, deformability of soils, odometric compression, static loading, stress relaxation method, odometric modulus of deformation.*

Сведения об авторах: **Широков Владимир Николаевич** – к.г.-м.н., доцент кафедры инженерной и экологической геологии геологического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова, E-mail: shirokov@geol.msu.ru
Заболоцкая Анна Александровна – магистр геологии, инженер-геолог 1 категории отдела инженерных изысканий ООО «ЭТКПроект». E-mail: ann144.96@mail.ru

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

В научном журнале «Вестник Филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе» печатаются статьи, содержащие результаты научных исследований по естественным, гуманитарным и экономическим наукам. Направляя статью в редколлегию, автору необходимо соблюдать следующие правила: размер статьи не должен превышать 10 страниц компьютерного текста, включая текст, таблицы, библиографию, рисунки и тексты аннотаций на таджикском, русском и английском языках; статья должна быть подготовлена в системе Microsoft Word, при этом одновременно с распечаткой статьи в 2-х экземплярах сдаются также соответствующие файлы (для каждой статьи на отдельном диске); рукопись должна быть отпечатана на компьютере (шрифт Times New Roman 14, формат А4, интервал 1,15, поля: верхнее – 2.0 см, нижнее – 2.0 см, левое – 2.5 см, правое – 2.5см). Все листы статьи должны быть пронумерованы; текст статьи должен быть изложен кратко, тщательно отредактирован и подписан всеми авторами с указанием их фамилий, имен и отчеств с номерами телефонов; каждый экземпляр должен содержать текст статьи, список литературы; название статьи, название вуза (организации), аннотация и ключевые слова представляются на русском, таджикском и английском языках; после заголовка статьи приводится название учреждения (-ий), в котором (-ых) выполнена данная работа; в верхнем правом углу первой страницы рукописи указывается раздел науки, которому соответствует статья, строкой ниже в левом углу страницы указывается индекс статьи по универсальной десятичной классификации (УДК). Ниже приводится название статьи, затем указывается название организации, в центре следующей строки – инициалы и фамилия автора (-ов); ниже – краткая аннотация (на языке, на котором написана статья) с указанием конкретных результатов работы и вытекающих из них выводов, а также ключевые слова, наиболее полно отражающие область исследования и полученные в работе результаты (до 10-12 слов) через тире и адрес для корреспонденции (почтовый и электронный). Далее через строку следует основной текст. Сразу после текста статьи приводится список литературы (не более 10 названий) под заголовком «**Литература**» в порядке упоминания, ссылки на цитируемую литературу по тексту даются в квадратных скобках, например [1].

Список литературы оформляется следующим образом: для книг – фамилия и инициалы автора (-ов), полное название книги, место издания, издательство, год издания, том или выпуск, общее количество страниц. Для

периодических изданий – фамилия и инициалы автора (-ов), название статьи, год издания, том, номер, первая и последняя страницы статьи.

В целом, оформление статьи должно соответствовать предъявляемым установленным нормам:

- формулы и символы должны быть напечатаны на компьютере в одном стиле;
- написание математических формул в виде рисунков не допускается;
- следует избегать громоздких обозначений;
- занумерованные формулы пишутся с красной строки, номер формулы в круглых скобках ставится у правого края;
- нумеруются лишь те формулы, на которые имеются ссылки;
- сокращения должны быть расшифрованы, за исключением общепринятых;
- в десятичных дробях после целой части числа ставится точка;
- при упоминании в тексте иностранных фамилий в скобках необходимо давать их оригинальное написание;
- первое упоминание в статье названия вида животного или растения приводится по-русски и по латыни;
- в тексте необходимо дать ссылки на все приводимые таблицы, рисунки и фотографии;
- научные статьи, представленные в редакцию журнала, должны иметь направление учреждения, в котором выполнялась данная работа, и экспертное заключение о возможности опубликования;
- при выполнении работы в нескольких учреждениях представляются направления из каждого учреждения;
- к статье должна быть приложена заверенная рецензия специалиста.

Редколлегия оставляет за собой право производить сокращения и редакционные изменения статьи. Статьи, не отвечающие настоящим правилам, редколлегией не принимаются.

ПОРЯДОК РЕЦЕНЗИРОВАНИЯ НАУЧНЫХ СТАТЕЙ, ПРЕДСТАВЛЯЕМЫХ В ЖУРНАЛ «ВЕСТНИК ФИЛИАЛА МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В ГОРОДЕ ДУШАНБЕ»

Статьи, поступающие в редакцию, проходят предварительную экспертизу (проводится членами редколлегии – специалистами по соответствующей отрасли науки) и принимаются в установленном порядке. Требования к оформлению оригинала статей приводятся в каждом номере журнала.

Все присланные в редакцию статьи должны быть оригинальными материалами. При упоминании работ других авторов необходимо соблюдать точность при цитировании и указании источника. Редакция не принимает статьи, готовящиеся к публикации или уже опубликованные в других изданиях.

Если рукопись принята, то редакция сообщает автору замечания по содержанию и оформлению статьи, которые необходимо устранить до передачи текста на рецензирование.

Затем статьи рецензируются в обязательном порядке членами редколлегии журнала или экспертами соответствующей специальности (кандидатами и докторами наук).

Рецензия должна содержать обоснованное перечисление качеств статьи, в том числе научную новизну проблемы, её актуальность, фактологическую и историческую ценность, точность цитирования, стиль изложения, использование современных источников, а также мотивированное перечисление её недостатков. В заключении дается общая оценка статьи и рекомендации для редколлегии – опубликовать статью, опубликовать её после доработки, направить на дополнительную рецензию специалисту по определенной тематике или отклонить. Объем рецензии - не менее одной страницы текста. Статья, принятая к публикации, но нуждающаяся в доработке, направляется авторам с замечаниями рецензента и редактора. Авторы должны внести все необходимые исправления в окончательный вариант рукописи и вернуть в редакцию исправленный текст, а также его идентичный электронный вариант вместе с первоначальным вариантом рукописи. После доработки статья повторно рецензируется, и редколлегия принимает решение о ее публикации. Статья считается принятой к публикации при наличии положительной рецензии и если её поддержали члены редколлегии. Порядок и очередность публикации статьи определяется в зависимости от даты поступления её окончательного варианта. Рецензирование рукописи осуществляется конфиденциально. Разглашение конфиденциальных деталей рецензирования рукописи нарушает права автора. Рецензентам не разрешается снимать копии статей для своих нужд. Рецензенты, а также члены редколлегии не имеют права использовать в собственных интересах информацию, содержащуюся в рукописи, до её опубликования.

Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе.
734003, г. Душанбе, ул. Бохтар, 35/1.
Тел.: +992 (37) 221-99-41, 221-99-04,
E-mail: info@msu.tj, **сайт**: http://www.msu.tj

Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар шаҳри Душанбе.
734003, ш. Душанбе, кӯч. Бохтар, 35/1.
Тел.: +992 (37) 221-99-41, 221-99-04,
E-mail: info@msu.tj, **сайт:** http://www.msu.tj

Подписано в печать 03.12.2021г.
Заказ 213. Тираж 200 экз.
Отпечатано в издательско-типографическом секторе
Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе
г. Душанбе, ул. Бохтар, 35/1