ISSN 2709-6238

Научный журнал

основан В 2016 году

В Е С Т Н И К
ФИЛИАЛА МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В Г. ДУШАНБЕ

СЕРИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

П А Ё М И
ФИЛИАЛИ ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ МОСКВА БА НОМИ М.В. ЛОМОНОСОВ ДАР Ш. ДУШАНБЕ

БАХШИ ИЛМҲОИ ТАБИЙ

BULLETIN
of LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY IN DUSHANBE

THE SERIES OF NATURAL SCIENCES

1 (13) 2020

ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В Г. ДУШАНБЕ
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ОСНОВАН В 2016 ГОДУ.

ФИЛИАЛИ ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ МОСКВА БА НОМИ
М.В. ЛОМОНОСОВ ДАР Ш. ДУШАНБЕ
МАҶАЛЛАИ ИЛМӢ СОЛИ 2016 ТАЪСИС ЁФТААСТ.

LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY IN DUSHANBE
ACADEMIC JOURNAL FOUNDED IN 2016.

В журнале статьи печатаются на русском, таджикском и английском языках.
Дар маҷалла мақолаҳо бо забонҳои русӣ, тоҷикӣ ва англисӣ нашр мешаванд.

СОДЕРЖАНИЕ - МУНДАРИЧА

УДК: 512.548

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В.Д. БЕЛОУСОВА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИАССОЦИАТИВНЫХ КВАЗИГРУПП

Комилов О.О.

Таджикский национальный университет

Аннотация. *В данной работе исследуются диассоциативные квазигруппы малого порядка. Эти классы квазигрупп были введены в связи с исследованием порядка элемента и обобщением идемпотентного элемента в линейных квазигруппах. Решена задача В.Д.Белоусова об изотопных лупах квазигруппы Стейна. Найдены праводиассоциативные квазигруппы 5 – го порядка, в которых выполняется тождество Стейна. Также найдены все главноизотопные лупы для этих классов квазигрупп. Для доказательств некоторых свойств и тождеств в квазигруппах малых порядков, используется таблица Кэли. Так как внутренняя часть таблицы Кэли является латинским квадратом, то целесообразно охарактеризовать требуемые алгебраические свойства квазигрупп из их латинских квадратов. Разработан пакет программ на языке программирования C++ и C#, для классификации диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени $k(l)$ по основным тождествам, и для нахождения изотопии диассоциативных квазигрупп. Графическая иллюстрация программы также приведена в работе. В работе применялись алгебраические и комбинаторные методы исследования, а также методы компьютерной алгебры.*

Ключевые слова: *квазигруппы, лупы, латинский квадрат, таблица Кэли, диассоциативность, тождество, квазигруппа Стейна, главноизотоп.*

Теория квазигрупп и луп является областью активных исследований со многими открытыми своими проблемами.

Идея изучения неассоциативных структур развивалась уже в 20-е гг. XX века и первые обобщенные работы на эту тему были работы А.К.Сушкевича [1], Р.Муфанг [2], Г.Бола[3], А.Альберта и Р.Брака [4, 5], а также В.Д. Белоусова [6].

В монографии В.Д.Белоусова сформулирован ряд задач по теории квазигрупп и луп, решение которых до сих пор представляет интерес. Одна из этих задач относится исследованию изотопных луп для квазигруппы Стейна. Постановка задачи следующая:

«Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется квазигруппой Стейна, если в $(Q,\cdot)$ выполняется тождество $x \cdot xy = yx$. Каким лупам они изотопны?», (задача 3, с.216 из [6]).

Квазигруппы Стейна хорошо известны и составляют важный класс квазигрупп [7]. Также необходимо отметить статьи Сада [8], где рассматриваются квазигруппы с тождеством $x(xy) = yx$.

Целью настоящей работы является решение задачи В.Д. Белоусова об изотопных лупах квазигруппы Стейна. Найдены праводиассоциативные

квазигруппы 5 – го порядка, в которых выполняется тождество Стейна. Также найдены все главноизотопные лупы для этих классов квазигрупп.

В работе [9] И.Флоря и Н.Дидурик изучают изотопы квазигруппы Стейна. В поле действительных чисел $R(+,\cdot)$ находят левую квазигруппу Стейна и также доказывают, что если квазигруппа Стейна $(Q,\cdot)$ изотопна группе $(Q,\circ)$, тогда группа $(Q,\circ)$ абелева. Ими построены различные интересные примеры.

В данной работе также построены примеры и найдены все главноизотопные лупы квазигруппы Стейна 5 - го порядка.

Приводим некоторые определения и сведения, которые известны и будут использованы в работе.

Определение 1. Группоид $(Q,\cdot)$ то есть множество Q с бинарной операцией $(\cdot)$ называется квазигруппой [6], если для любых $a, b \in Q$ уравнения

$$a \cdot x = b,\ y \cdot a = b \qquad (1)$$

всегда разрешимы, причем однозначно.

Разрешимость квазигрупп можно проверять с помощью таблицы Кэли. И известно, что таблица Кэли любой квазигруппы $(Q,\cdot)$ представляет собой латинский квадрат (табл.1)[10, 11].

Таблица 1. Квазигруппа - латинский квадрат 4 - го порядка

$\cdot$	a	b	c	d
a	b	a	c	d
b	a	b	d	c
c	d	c	a	b
d	c	d	b	a

b	a	c	d
a	b	d	c
d	c	a	b
c	d	b	a

В работе [12], в связи с исследованием порядка элемента и обобщением идемпотентного элемента в линейных квазигруппах, введён новый класс квазигрупп - диассоциативные квазигруппы.

Определение 2. *Квазигруппа* $(Q,\cdot)$ *называется диассоциативной степени* $k(l)$*, если в ней выполняются одновременно тождества* (2) *и* (3) [12].

$$[x,\ y^k] = ((...(\underbrace{xy)y)...)y}_{k-раз} = x, \qquad (2)$$

$$\{y^l,\ x\} = \underbrace{y(...(y(}_{l-раз}yx)...)) = x \qquad (3)$$

С помощью несложной разработанной компьютерной программы получены все праводиассоциативные (леводиассоциативные) квазигруппы 4 - го и 5 - го порядков (рис.1).

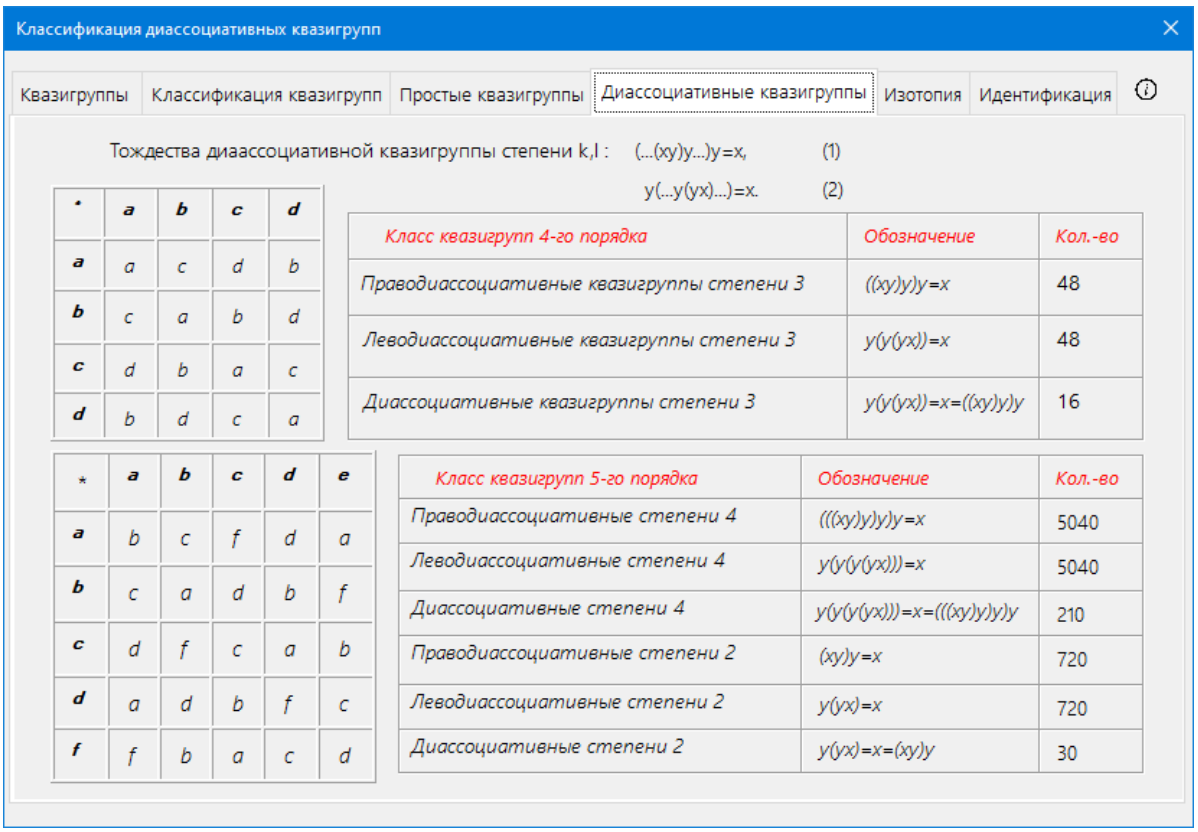


Рисунок 1. Класс диассоциативных квазигрупп

Пример 1. Пусть $(Q, \cdot)$ - квазигруппа 5 - го порядка со следующей таблицей умножения (табл.2):

Таблица 2. Квазигруппа 5 – го порядка

$\cdot$	a	b	c	d	f
a	a	c	d	f	b
b	d	b	f	c	a
c	f	a	c	b	d
d	b	f	a	d	c
f	c	d	b	a	f

Тогда $(Q,\cdot)$ праводиассоциативная квазигруппа степени $k(l) = 2$, идемпотентная, также квазигруппа Стейна, то есть в $(Q, \cdot)$ выполняются тождества:

1. $(((xy)y)y)y = x$;
2. $xx = x$;
3. $x \cdot xy = yx$.

С помощью компьютерного анализа найдены все квазигруппы Стейна 5 - го порядка (рис.2), также все главноизотопные лупы с соответствующими подстановками для этих квазигрупп (табл. 3-4).

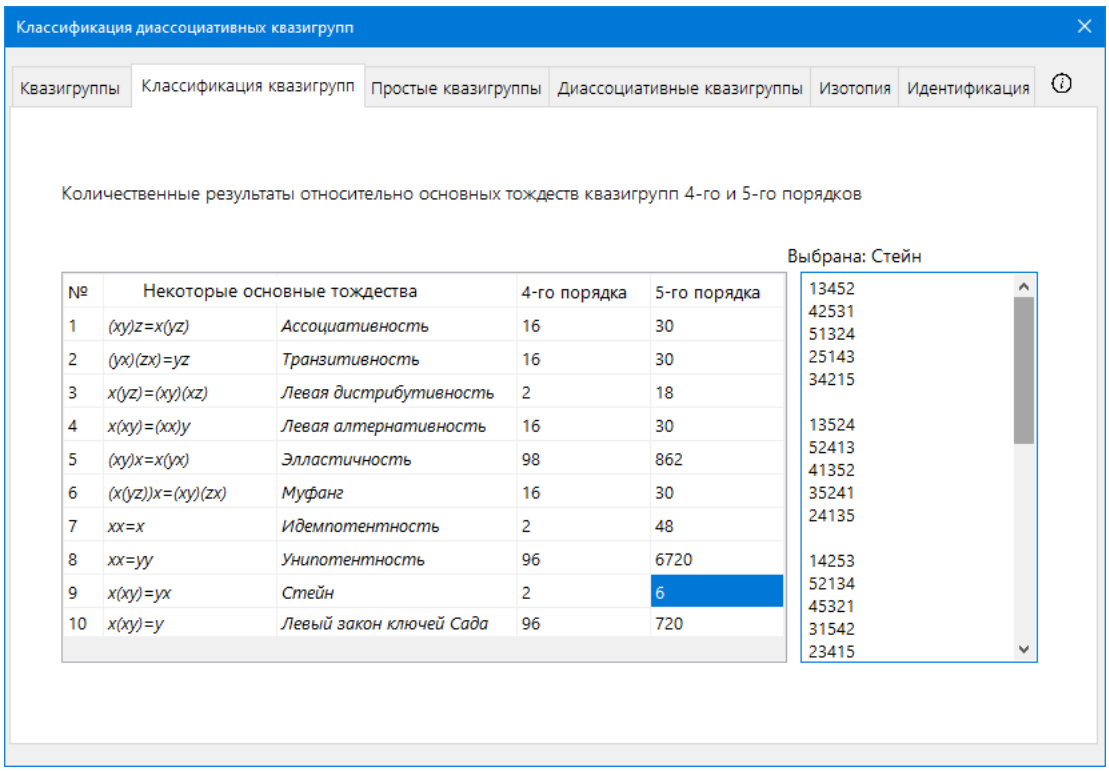


Рисунок 2. Квазигруппы Стейна

Таблица 3. Количество квазигруппы Стейна и изотопные лупы

Квазигруппы Стейна		Количество главноизотопных луп	Количество подстановок для каждой главноизотопных луп
Порядок	Количество		
5	*6*	*5*	*5*

Из табл. 4(1) видно, что $(Q,\cdot)$ квазигруппа Стейна и $(Q,\circ)$ главноизотопная лупа со следующими подстановками:

$$\alpha = adfbc,$$

$\beta = afbcd,$

$\gamma = \varepsilon = abcdf,$

где ε - тождественная подстановка. И для для любых $x, y \in Q$ выполнено равенство $B(x,y) = A(\alpha x, \beta y)$. Также, для $(Q,\circ)$ тождество ассоциативности $(xy)z = x(yz)$ выполняется. Очевидно, что $(Q,\circ)$ абелева группа.

Предложение 1. *Каждая квазигруппа Стейна порядка 5 главноизотопна 5 абелевым группам.*

Доказательство проверятеся непосредственно.

Следствие 1. *Класс праводиассоциативных квазигрупп 5-го порядка степени k=2 с левым тождеством Стейна главноизотопна абелевым группам.*

Таблица 4. Изотопии квазигруппы Стейна

1	$\cdot$ | a b c d f a | a c d f b b | d b f c a c | f a c b d d | b f a d c f | c d b a f $\alpha = adfbc \rightarrow$	a b c d f a | a c d f b b | b f a d c c | c d b a f d | d b f c a f | f a c b d $\beta = afbcd \rightarrow$	$\circ$ | a b c d f a | a b c d f b | b c f a d c | c f d b a d | d a b f c f | f d a c b $\gamma = \varepsilon$
2	$\cdot$ | a b c d f a | a c d f b b | d b f c a c | f a c b d d | b f a d c f | c d b a f $\alpha = badcf \rightarrow$	a b c d f a | d b f c a b | a c d f b c | b f a d c d | f a c b d f | c d b a f $\beta = bdcfa \rightarrow$	$\circ$ | a b c d f a | b c f a d b | c f d b a c | f d a c b d | a b c d f f | d a b f c $\gamma = \varepsilon$
3	$\cdot$ | a b c d f a | a c d f b b | d b f c a c | f a c b d d | b f a d c f | c d b a f $\alpha = cbadf \rightarrow$	a b c d f a | f a c b d b | d b f c a c | a c d f b d | c d b a f f | b f a d c $\beta = cafdb \rightarrow$	$\circ$ | a b c d f a | c f d b a b | f d a c b c | d a b f c d | b c f a d f | a b c d f $\gamma = \varepsilon$
4	$\cdot$ | a b c d f a | a c d f b b | d b f c a c | f a c b d d | b f a d c f | c d b a f $\alpha = dfcab \rightarrow$	a b c d f a | b f a d c b | c d b a f c | f a c b d d | a c d f b f | d b f c a $\alpha = dcabf \rightarrow$	$\circ$ | a b c d f a | d a b f c b | a b c d f c | b c f a d d | f d a c b f | c f d b a $\gamma = \varepsilon$
5	$\cdot$ | a b c d f a | a c d f b b | d b f c a c | f a c b d d | b f a d c f | c d b a f $\alpha = fcbda \rightarrow$	a b c d f a | c d b a f b | f a c b d c | d b f c a d | b f a d c f | a c d f b $\alpha = fbdac \rightarrow$	$\circ$ | a b c d f a | f d a c b b | d a b f c c | a b c d f d | c f d b a f | b c f a d $\gamma = \varepsilon$

Заметим, что квазигруппы Стейна являются частным случаем диассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени $k = 2$. Все 6 квазигрупп Стейна порядка 5 встречаются в классе праводиассоциативных квазигрупп 5 - го порядка степени $k = 2$.

Литература

1. Сушкевич А.К. Теория обобщённых групп [Текст] / А.К. Сушкевич // Харьков, Киев. :ОНТИ НКТП, 1937, - 176 с.
2. Moufong R. Zur Structur von Altomativ Korpera [Текст] / R. Moufong // Math Ann. 1935, Vol. 110 (1). - P. 416 – 430.

3. Bol G. Gewebe und Gruppen [Текст] / G. Bol // Math. Ann., 1937, Vol. 114 (1). - P. 414 – 431.
4. Albert A. A. Quasigroups, I. [Текст] / A. A. Albert // Trans. Amer. Math. Soc. 1943, Vol. 54(3) - P. 507 – 519.
5. Bruck R.H. Some results in the theory of quasigroups [Текст] / R.H. Bruck // Trans. Amer. Math. Soc., 1944, V. 55, - p. 19 – 52.
6. Белоусов, В.Д. Основы теории квазигрупп и луп [Текст] / В.Д. Белоусов. - М.: Наука. -1967. -223 с.
7. Stein S.K. On the foundation of quasigroups [Текст] / S.K. Stein // Trans. Amer. Math. Soc. 1957, Vol. 85, - p. 228 – 256.
8. Sade A. Produit direct singulier de quasigroupes orthogonaux et antiadeliens [Текст] / A. Sade // Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 1960, ser. I, 74, No 2, - p. 91 – 99.
9. Флоря И.А., Дидурик Н.Н. О некоторых изотопах квазигруппы Стейна [Текст] / И.А. Флоря, Н.Н. Дидурик // Вестник Приднестровского университета. Серия: Физико - математические и технические науки. Экономика и управление. 2014, № 3, - с. 61 – 67.
10. Тужилин, М. Э. Латинские квадраты и их применение в криптографии [Текст] / М. Э. Тужилин. - Прикладная дискретная математика. -2012. -№ 3. - с. 47 – 52.
11. Комилов, О.О. Латинские квадраты [Текст] / О.О. Комилов. Вестник таджикского национального университета. Серия естественных наук. -2014. -№ 1/2(130). - с. 64 – 67.
12. Табаров А.Х., Каримов Ф. Линейные квазигруппы с дополнительными тождествами [Текст] / А.Х. Табаров , Ф. Каримов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2011, № 2, - с. 3 – 7.

ҲАЛЛИ МАСЪАЛАИ В.Д. БЕЛОУСОВ БАРОИ БАЪЗЕ СИНФҲОИ КВАЗИГУРӮҲҲОИ ДИАССОСИАТИВӢ

Комилов О.О.
Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Аннотатсия. *Дар кори мазкур квазигурӯҳҳои диассосиативии тартиби хурд татқиқ карда мешаванд. Ин синфи квазигурӯҳҳо дар натиҷаи омӯхтани тартиби элемент ва васеъкунии элементи идемпотентӣ дар квазигурӯҳҳои хаттӣ пайдо шудаанд. Ҳалли масъалаи В.Д.Белоусов оид ба лупаҳои изотопии квазигурӯҳи Стейн ҳал шудааст. Квазигурӯҳҳои аз рост диассосиативии тартиби 5-ум, ки дар онҳо айнияти Стейн иҷро мегардад ёфт шудаанд. Инчунин, лупаҳои ба онҳо изотопи асосӣ низ ёфта шудаанд. Барои исботи баъзе хосиятҳо ва айниятҳо дар квазигурӯҳҳои тартибашон хурд ҷадвали Кэли истифода шудааст. Аз сабаби он ки қисми дохилии ин ҷадвал квадрати лотинӣ аст, онро барои додани характеристикаи квазигурӯҳҳо истифода намудан ба мақсад дуруст аст. Дастаи барномавӣ дар забони барномасозии C++ ва C# сохта шудааст, ки тавассути он квазигурӯҳҳои тартиби 5-уми дараҷаи $k(l)$ аз рӯи айниятҳои асосӣ тасниф мегарданд ва изотопҳои вквазигурӯҳҳои диассосиативӣ ёфта мешаванд. Намуди гарфикии ин барнома оварда шудааст. Дар кор усулҳои тадқиқоти алгебравӣ, комбинаторӣ ва усулҳои алгебраи компютерӣ истифода шудаанд.*

***Калидвожаҳо**: квазигруппа, лупа, квадрати лотинӣ, ҷадвали Кэлӣ, диассосиативӣ, айният, квазигруппаи Стейн, изотопи аосӣ.*

SOLUTION OF THE PROBLEM V.D. BELOUSOV FOR SOME CLASSES OF DIASSOCIATIVE QUASIGRUPS

Komilov O.O.
Tajik National University

***Annotation.** In this paper, we study small-order diassociative quasigroups. These classes of quasigroups were introduced in connection with the study of the order of an element and the generalization of an idempotent element in linear quasigroups. The problem of VD Belousov on isotopic loops of the Stein quasigroup is solved. We find right-hand associative quasigroups of the 5th order in which the Stein identity holds. All principal isotopic loops for these classes of quasigroups are also found. To prove some properties and identities in quasigroups of small orders, the Cayley table is used. Since the inner part of the Cayley table is a Latin square, it is expedient to characterize the required algebraic properties of quasigroups from their Latin squares. A software package in the programming language C ++ and C # has been developed for the classification of diassociative quasigroups of the 5th order of degree k (l) by the basic identities, and for finding the isotopy of diassociative quasigroups. A graphic illustration of the program is also given in the work. Algebraic and combinatorial research methods, as well as methods of computer algebra, were used in the work.*
***Keywords:** quasigroups, loops, Latin square, Cayley table, diassociativity, identity, Stein quasigroup, principal isotope.*

Сведения об авторе: **Комилов Окил Одилович** - старший преподаватель кафедры информационной и телекоммуникационной технологии, Таджикский национальный университет. **Адрес:** 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр.Рудаки, 17. **Телефон:** (+992) 92-828-12-21. **E-mail:** okil.komilov@yandex.ru

УДК 517. 55

СИНГУЛЯРНЫЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ КРУГА

Саидов Б.Б., Иноятов Ф.А.

Таджикский государственный финансово-экономический университет

Аннотация. *В работе исследуются сингулярные квазилинейные граничные задачи сопряжения для круга. Решение задачи ищется в классе функций, ограниченных на контуре. Доказана теорема, определяющее число решений однородной задачи и число условий разрешимости неоднородной задачи, найдена формула вичисления индекса задачи. Для доказательства теоремы используется метод И. Х. Сабитова, который заключается в разложении функции в ряд Фурье, а также строится интерполяционный многочлен.*

Ключевые слова*: аналитическая функция, полюс, интерполяционный многочлен, ряд Фурье, интегральная формула Коши, индекс, предельные значения интеграла Коши, граничная задача.*

Пусть D^+ и D^- соответственно внутренняя и внешняя части окружности Г : $|t|=1.$

1. Рассмотрим следующую квазилинейную сингулярную граничную задачу на окружности:

$$\varphi^+(t)=\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot a_1(t)\cdot\varphi^-(t)+$$

$$+\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot b_1(t)\overline{\varphi^-(t)}+\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}\,\overline{R[\varphi^-(t)]}+C(t). \qquad (1)$$

Здесь η_r $(r=1,2,\ldots,R)$, ξ_m $(m=1,2,\ldots,M)$ - некоторые точки контура, d_r, q_m - целые положительные числа, R - аналитический оператор, отображающий функцию из $L_2(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$; функции $a_1(t)$, $b_1(t)$, $c(t)$ удовлетворяют условию Гельдера и не обращаются в нуль.

Точки ξ_m будем называть её полюсами.

Обозначим $\sum_{r=1}^{R}d_r=d$, $\sum_{m=1}^{M}q_m=q$.

Решение задачи будем искать в классе функций, ограниченных на контуре.

Для применимости дальнейшей теории нужно потребовать, чтобы функции $c(t)$ в сингулярных точках были дифференцируемы достаточное число раз.

Построим многочлен $T(t)$ так, чтобы он удовлетворял следующим условиям:

$$T^{(j)}(\eta_r) = C^{(j)}(\eta_r)\ (j = 0,1,\cdots, d_r - 1, \quad r = 0,1,\cdots, R), \qquad (2)$$

где $C^{(j)}(\eta_r)$ - значения производных j - го порядка в точках η_r.

Граничное условие (1) перепишем, в следующем виде:

$$\varphi^+(t) - T(t) = \frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot a_1(t) \cdot \varphi^-(t) + \frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot b_1(t) \cdot \overline{\varphi^-(t)} + \qquad (3)$$

$$+ \prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}\, \overline{R[\varphi^-(t)]} + C(t) - T(t).$$

Учитывая (2), граничное условие, принимает вид:

$$\varphi^+(t) - T(t) = \frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot a_1(t) \cdot \varphi^-(t) + \frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot b_1(t) \cdot \overline{\varphi^-(t)} +$$

$$+ \prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}\, \overline{R[\varphi^-(t)]} + \prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r} C_1(t),$$

или

$$\frac{\varphi^+(t) - T(t)}{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}} = \frac{a_1(t)}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot \varphi^-(t) + \frac{b_1(t)}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot \overline{\varphi^-(t)} + \qquad (3)$$

$$+ \overline{R[\varphi^-(t)]} + C_1(t),$$

Полагая, что

$$\varphi^-(z) = \prod_{m=1}^{M}(z-\xi_m)^{q_m} \cdot z^{-q} \cdot \varphi_1^-(z),$$

$$\overline{\varphi^-(z)} = \prod_{m=1}^{M}(z-\xi_m)^{q_m} \cdot z^{-q} \varphi_1^-(z) = \prod_{m=1}^{M}(z-\xi_m)^{q_m} \cdot z^{-q} e^{-2i\sum_{r=1}^{R}\theta_r q}\, \overline{\varphi_1^-(z)},$$

где $Q_r = \arg(t-\xi_m)$, будем иметь

$$\varphi_1^+(t) = t^{-q} a_1(t) \varphi_1^-(t) + \overline{t^{-q}} b_1(t) e^{-2\sum_{r=1}^{R}\theta_r q}\, \overline{\varphi_1^-(t)} + R\left[\overline{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m} t^{-q} \varphi_1^-(t)}\right] + C_1(t), \qquad (4)$$

где $\varphi_1^+(t) = \dfrac{\varphi^+(t) - T(t)}{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}$.

или $$\varphi_1^+(t) = t^{-q} a_1(t) \varphi_1^-(t) + b_2(t) \overline{\varphi_1^-(t)} + R\left[\overline{\varphi_1^-(t)}\right] + C_1(t), \qquad (5)$$

где $b_1(t) = \overline{t^{-q}} b_1(t) e^{-2\sum_{r=1}^{R}\theta_r q}$, $\quad \overline{R_1[\varphi_1^-(t)]} = R\left[\overline{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m} t^{-q} \varphi_1^-(t)}\right]$.

Итак, получили задачу (5), эквивалентную (1).

Теорема. *Пусть* Γ *- окружность,* $|z|=1$, *ограничивающая область* D^+, D^- *- внешность круга* $|z|<1$; $a_1(t)$ *- непрерывная,* $b_1(t)$ *- ограниченная и измеримая функция,* $c_2(t)\in L_2(\Gamma), æ = Ind a_1(t)$, $a_1(t)\neq 0$. *Рассматриваются решения представимые интегралом типа Коши и* $\varphi_1^{\pm}(t)\in L_2(\Gamma)$. *Разложим ограниченную функцию* $b_2(t)$ *в сходящийся в среднем* $L_2(\Gamma)$, *ряд Фурье*

$$b_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k t^k . \qquad (6)$$

Пусть N *- наименьшее из всех чисел, для которых имеет место неравенство:*

$$\left\| \frac{b_2(t)=\sum_{k=-N}^{N} b_k t^k}{a_2(t)} \right\|_{L_2} <1,$$

а m *- индекс первого из коэффициентов* $b_{-N}, b_{-N+1}, \cdots, b_{-1}$, *который не равен нулю;* R *- аналитический оператор, действующий из* $L_2(\Gamma)$ *в* $L_2(\Gamma)$, $m\geq 1$, l *- число произвольных вещественных входящих в общее решение задачи* (5), p *- число условий разрешимости неоднородной.*

Тогда:

1) *если* $æ-p\geq m-1$, *то однородная и неоднородная задачи безусловно, разрешимы и* $l=2(æ-p)$, $p=0$.

2) *если* $0\leq æ-p<m-1$, *то однородная задача может иметь ненулевое решение и*

$$\begin{cases} 2(æ-q)\leq l\leq m+æ-q & \text{при } m+æ-q \text{ чётном} \\ 2(æ-q)\leq l\leq m+æ-q-1 & \text{при } m+æ-q \text{ нечётном} \end{cases}$$

а $p=l-2(æ-q)$.

3) *если* $-m+1<æ-q<0$, *то однородная задача может иметь ненулевое решение, а* $p=2|æ-p|, l=0$.

4) *если* $æ-q\leq -m+1$, *то однородная задача имеет только нулевое решение, и*

$0\leq l\leq m+æ-q$, *когда* $m+æ-q$ *– чётное число*

$0\leq l\leq m+æ-q-1$, *когда* $m+æ-q$ *– нечётное число*, $p=l-2æ$.

Доказательство. Вводя обозначения $a_1(t)=\dfrac{\chi^+(t)}{\chi^-(t)}$, перепишем задачу (5), следующим образом:

$$\Phi^+(t)=t^m a_1(t)\varphi_1^-(t)+B_m(t)\overline{\varphi^-(t)}+C_2(t), \qquad (7)$$

где $B_m(t)=[b_2(t)-Q(t)]t^m$, $C_2(t)=t^m C_1(t)$,

$\Phi^+(t)=z^m\varphi^+(z)-P_1(z)\Omega^+(z)-z^m H^+(z)$,

отсюда

$$\varphi_1^+(z)=\frac{\Phi^+(z)+\mathrm{P}_1(z)\Omega^+(z)}{z^m}+\mathrm{H}^+(z), \qquad (8)$$

здесь $\mathrm{H}^+(z)=\overline{R[\varphi^-]}_{\frac{1}{z}}$, $\mathrm{H}^+(t)=\overline{R[\varphi^-]}_t$.

Подставляя

$$\Phi^+(z)=\mathrm{P}_0+\mathrm{P}_1z_1+\cdots+\mathrm{P}_{m-1}z^{m-1}+z^m\Phi_0^+(z), \qquad (9)$$

$$\varphi_1^-(z)=\frac{q_1}{z}+\frac{q_2}{z^2}+\cdots+\frac{q_{m-1}}{z^{m-1}}+\frac{\varphi_0^-(z)}{z^{m-1}},\ \varphi^0(\infty)=0, \qquad (10)$$

в (7), и имея ввиду условие регулярности

$$\mathrm{P}_0=0, \mathrm{P}_1=-b_{-m}q_1^-,\cdots,\mathrm{P}_{m-1}=-b_{-m}\overline{q_{m-1}}-\cdots--b_{-m}\overline{q}, \qquad (11)$$

для функции $\varphi_1^-(z)$, определяемой из (8), получим:

$$\Phi_0^+(t)=t^{-m+1}a_1(t)\varphi_0^-(t)+t^{m-1}B_m(t)\overline{\varphi_0^-(t)}+f(t), \qquad (12)$$

где $f(t)$ содержит $2m-1$ вещественных произвольных постоянных q_k' и q_k'' $q_k=q_k'+iq_k''$ - свободный член и все остальные числа.

Далее, проводя рассуждения аналогичное тому, как это сделано в работе Сабитова И. Х., получим теорему.

Отметим, что решив задачу (12), мы находим $\Phi_0^+(z)$, $\varphi_0^-(z)$, затем определим $\mathrm{H}^+(t)=\overline{R[\varphi^-]}_{\frac{1}{z}}$, после чего по формулам (9) и (11), найдём $\Phi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$.

2. Пусть теперь $a(t)$ и $b(t)$ имеют нули и полюсы сопряженно- аналитического характера, т.е.

$$a(t)=\frac{\prod_{r=1}^{R}\overline{(t-\eta_r)^{d_r}}}{\prod_{m=1}^{M}\overline{(t-\xi_m)^{q_m}}}a_1(t),\quad b(t)=\frac{\prod_{r=1}^{R}\overline{(t-\eta_r)^{d_r}}}{\prod_{m=1}^{M}\overline{(t-\xi_m)^{q_m}}}b_1(t). \qquad (13)$$

Здесь η_r $(r=1,2,\ldots,R)$, ξ_m $(m=1,2,\ldots,M)$ - некоторые несовпадающие точки контура, d_r, q_m - целые положительные числа.

Тогда краевое условие (1) принимает вид:

$$\varphi^+(t)=\frac{\prod_{r=1}^{R}\overline{(t-\eta_r)^{d_r}}}{\prod_{m=1}^{M}\overline{(t-\xi_m)^{q_m}}}\cdot a_1(t)\cdot\varphi^-(t)+$$

$$+\frac{\prod_{r=1}^{R}\overline{(t-\eta_r)^{d_r}}}{\prod_{m=1}^{M}\overline{(t-\xi_m)^{q_m}}}\cdot b_1(t)\overline{\varphi^-(t)}+\prod_{r=1}^{R}\overline{(t-\eta_r)^{d_r}}\,\overline{R[\varphi^-(t)]}+C(t). \qquad (14)$$

Здесь R - аналитический оператор отображающий функцию из $L_2(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$. Функции $a_1(t), b_1(t), C(t)$ из класса Гёльдера.

Так как

$$\prod_{r=1}^{R}\overline{(t-\eta_r)^{d_r}}=\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}e^{-2i\sum_{r=1}^{R}\theta_1 d_r}$$
$$\prod_{m=1}^{M}\overline{(t-\xi_m)^{q_m}}=\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}e^{-2i\sum_{m=1}^{M}\theta_2 d_m}, \qquad (15)$$

где $\theta_1=\arg(t-\eta_r)$, $\theta_2=\arg(t-\xi_m)$.

При помощи равенства (15), краевое условие (14) принимает вид:

$$\varphi^+(t)=\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\frac{e^{-2i\sum_{r=1}^{R}\theta_1 d_r}}{e^{-2i\sum_{m=1}^{M}\theta_2 d_m}}\cdot a_1(t)\cdot\varphi^-(t)+$$
$$+\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\frac{e^{-2i\sum_{r=1}^{R}\theta_1 d_r}}{e^{-2i\sum_{m=1}^{M}\theta_2 d_m}}\cdot b_1(t)\overline{\varphi^-(t)}+\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}\cdot e^{-2i\sum_{r=1}^{R}\theta_1 d_r}\overline{R[\varphi^-(t)]}+C(t). \qquad (16)$$

Здесь $e^{-2i\sum_{r=1}^{R}\theta_1 d_r}$ и $e^{-2i\sum_{m=1}^{M}\theta_2 d_m}$ - непрерывные функции и имеют соответственно индексы, равны $-d$, $-q$.

Краевое условие (16) перепишем в следующем виде:

$$\varphi^+(t)=\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot a_2(t)\cdot\varphi^-(t)+$$
$$+\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot b_2(t)\overline{\varphi^-(t)}+\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}\cdot\overline{R_1[\varphi^-(t)]}+C(t), \qquad (17)$$

где $a_2(t)=e^{-2i\sum_{r=1}^{R}\theta_1 d_r}\cdot a_1(t)$, $b_2(t)=e^{-2i\sum_{m=1}^{M}\theta_2 d_m}\cdot b_1(t)$, $R_1(t)=e^{-2i\sum_{r=1}^{R}\theta_1 d_m}\cdot R$.

При помощи равенства (2), краевое условие (17), перепишем в следующем виде:

$$\varphi^+(t)-T(t)=\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot a_2(t)\cdot\varphi^-(t)+$$
$$+\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot b_2(t)\overline{\varphi^-(t)}+\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}\cdot\overline{R_1[\varphi^-(t)]}+C(t)-T(t). \qquad (18)$$

В силу (2), краевое условие (18) преобразуется следующим образом:

$$\varphi^+(t)-T(t)=\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot a_2(t)\cdot\varphi^-(t)+$$

$$+\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot b_2(t)\overline{\varphi^-(t)}+\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}\cdot\overline{R_1[\varphi^-(t)]}+\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}C_1(t),$$

или

$$\frac{\varphi^+(t)-T(t)}{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}=\frac{a_2(t)}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot\varphi^-(t)+\frac{b_2(t)}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot\overline{\varphi^-(t)}+R_1[\varphi^-(t)]+C_1(t),$$

или

$$\varphi_1^+(t)-T(t)=\frac{a_2(t)}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot\varphi^-(t)+\frac{b_2(t)}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot\overline{\varphi^-(t)}+R_1[\varphi^-(t)]+C_1(t),\qquad(19)$$

где $\varphi_1^+(t)=\dfrac{\varphi^+(t)-T(t)}{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}$.

Полагая, что

$$\varphi^-(z)=\prod_{m=1}^{M}(z-\xi_m)^{q_m}z^{-q}\varphi_1^-(z),\ \overline{\varphi^-(z)}=\overline{\prod_{m=1}^{M}(z-\xi_m)^{q_m}z^{-q}\varphi_1^-(z)}=\prod_{m=1}^{M}(z-\xi_m)^{q_m}\cdot e^{-2i\sum_{m=1}^{M}\theta_m d_m}\cdot\overline{z^{-q}\varphi_1^-(z)},$$

будем иметь:

$$\varphi_1^+(t)=a_3(t)\cdot\varphi^-(t)+b_3(t)\cdot\overline{\varphi^-(t)}+\overline{R_2[\varphi^-(t)]}+C_1(t).\qquad(20)$$

Задача (20) есть задача с непрерывными коэффициентами и для неё справедлива доказанная теорема.

3. Пусть в задаче (1) коэффициенты имеют нули и полюсы модульного характера, т.е. представима в виде:

$$a(t)=\frac{\prod_{r=1}^{R}|t-\eta_r|^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}|t-\xi_m|^{q_m}}a_1(t),\quad b(t)=\frac{\prod_{r=1}^{R}|t-\eta_r|^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}|t-\xi_m|^{q_m}}b_1(t).$$

Тогда, краевое условие (1) перепишем в виде:

$$\varphi^{+}(t)=\frac{\prod_{r=1}^{R}|t-\eta_r|^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}|t-\xi_m|^{q_m}}a_1(t)\cdot\varphi^{-}(t)+$$

$$+\frac{\prod_{r=1}^{R}|t-\eta_r|^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}|t-\xi_m|^{q_m}}b_1(t)\cdot\varphi^{-}(t)+\prod_{r=1}^{R}|t-\eta_r|^{d_r}\overline{R[\varphi^{-}(t)]}+C(t), \qquad (21)$$

где $a_1(t)$, $b_1(t)$, $C(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера на Γ, и имеют в окрестности точки η_r, ξ_m производные соответственно порядков d и q, удовлетворяющие условию Гёльдера $a_1(t)\neq 0$, $b_1(t)\neq 0$.

Введём обозначения $\sum_{r=1}^{R}d_r=\sum_{r=1}^{R}\left(q_r^{(1)}-\xi_r^{(1)}\right)$, $\sum_{m=1}^{M}q_m=\sum_{m=1}^{M}\left(q_m^{(2)}-\xi_m^{(2)}\right)$, где $\sum_{r=1}^{R}q_r^{(1)}$, $\sum_{m=1}^{M}q_m^{(2)}$ - целые числа, $\sum_{r=1}^{R}\xi_r^{(1)}$, $\sum_{m=1}^{M}\xi_m^{(2)}$ - их дробная часть, т.е. $0<\xi_r^{(1)}<1$, $0<\xi_m^{(2)}<1$.

Поскольку

$$\prod_{r=1}^{R}|t-\eta_r|^{d_r}=\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}\cdot\exp\left(-i\sum_{r=1}^{R}\theta_r^{(1)}d_r\right),$$

$$\prod_{m=1}^{M}|t-\xi_m|^{q_m}=\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}\cdot\exp\left(-i\sum_{m=1}^{M}\theta_m^{(2)}q_m\right),$$

где $\theta_r^{(1)}=\arg(t-\eta_r)$, $\theta_m^{(2)}=\arg(t-\xi_m)$.

Равенство (21) перепишем в следующем виде:

$$\varphi^{+}(t)=\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{\xi_r^{(1)}}\cdot\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{\xi_r^{(2)}}\cdot\exp\left(i\sum_{r=1}^{R}\theta_r^{(1)}d_r-i\sum_{m=1}^{M}\theta_m^{(2)}q_m\right)\varphi^{-}(t)+$$

$$+\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{\xi_r^{(1)}}\cdot\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{\xi_r^{(2)}}\cdot\exp\left(i\sum_{r=1}^{R}\theta_r^{(1)}d_r-i\sum_{m=1}^{M}\theta_m^{(2)}q_m\right)\cdot\overline{\varphi^{-}(t)}+C(t). \qquad (22)$$

Полагая, что

$$\varphi^{-}(z)=\prod_{m=1}^{M}(z-\xi_m)^{q_m^{(1)}}z^{-q_m^{(1)}}\varphi_1^{-}(z),$$

$$\overline{\varphi^{-}(z)}=\overline{\prod_{m=1}^{M}(z-\xi_m)^{q_m^{(1)}}z^{-q_m^{(1)}}\varphi_1^{-}(z)}. \qquad (23)$$

Построим интерполяционный многочлен $T(t)$ так, чтобы он удовлетворял следующим условиям:

$$C^{(u)}(\eta_r)=T^{(u)}(\eta_r)\ \ (u=0,1,\cdots,R,\quad r=1,2,\cdots,R). \qquad (24)$$

При помощи (23), (24), краевое условие перепишем в следующем виде:

$$\varphi_2^+(t)=A(t)\varphi_2^-(t)+B(t)\overline{\varphi_2^-(t)}R_1\left[\overline{\varphi^-(t)}\right]+C_1(t),$$

где

$$A(t)=\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{\xi_r^{(1)}}\cdot\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{\xi_m^{(2)}}\cdot\exp\left(i\sum_{m=1}^{M}\theta_r^{(2)}q_m\right)\cdot a_1(t),$$

$$B(t)=\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{\xi_r^{(1)}}\cdot\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{\xi_m^{(2)}}\cdot\exp\left(i\sum_{m=1}^{M}\theta_r^{(2)}q_m\right)\cdot b_1(t).$$

Обе функции $A(t),\ B(t)$ будут многозначными.

Рассмотрим многозначную аналитическую функцию соответствующим образом в разрезанной плоскости как однозначную разрывную. Точками разветвления эти функции будут соответственно z_0,∞ и ζ_r,∞.

Проведём в плоскости z разрез из точки z_0 через точки ζ_r,ξ_m до бесконечности. В разрезанной, таким образом, плоскости обе функции будут однозначными, причём этот разрез для них будет линией разрыва.

Построим специальные функции, имеющие в сингулярных точках те же разрывы, что и $A(t),\ B(t)$, и такие, чтобы, считая их коэффициентами этой задачи и можно было бы для них решить её.

Вводя новые функции

$$\varphi_1^+(z)=\prod_{r=1}^{R}(z-\eta_r)^{d_r}\cdot\prod_{m=1}^{M}(z-\xi_m)^{q_m}\varphi_2^+(z),$$

$$\varphi_1^-(z)=\prod_{r=1}^{R}\left(\frac{z-\eta_r}{z-z_0}\right)^{d_r}\cdot\prod_{m=1}^{M}\left(\frac{z-\xi_m}{z-z_0}\right)^{q_m}\varphi_2^-(z).$$

$$\varphi_1^+(t)=A(t)\prod_{r=1}^{R}(t-z_0)^{-d_r}\cdot\prod_{m=1}^{M}(z-z_0)^{-q_m}\varphi_1^-(t)+$$

$$+B_1(t)\prod_{r=1}^{R}(t-z_0)^{-d_r}\cdot\prod_{m=1}^{M}(z-z_0)^{-q_m}\varphi_1^-(t)+R_1\left[\overline{\varphi^-(t)}\right]+C(t).$$

Итак, получили регулярную задачу, и для неё справедлива доказанная теорема.

Литература

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д.Гахов // – Москва. Наука, 1977. 640 с.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили // – Москва. Наука, 1968. - 513 с.
3. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений / Н. П. Векуа // - М.: Наука, 1970. - 379 с.

МАСЪАЛАИ КАНОРИИ ҲАМРОҲШУДАИ КВАЗИХАТТИИ СИНГУЛЯРӢ БАРОИ ДАВРА

Саидов Б.Б., Иноятов Ф.А.

Донишгоҳи давлатии молия ва иқтисоди Тоҷикистон

Аннотатсия. *Дар мақола масъалаи канории ҳамроҳшудаи квазихаттии сингулярӣ барои давра тадқиқ карда мешавад. Ҳалли масъала дар синфи функсияҳои дар контур маҳдуд ҷустуҷӯ шудаст. Теорема дар бораи ёфтани ҳалли масъалаи якҷинса ва шартҳои ҳалшавандагии масъалаи ғайриякҷинса исбот карда шудааст ва барои исботи он усули И.Х. Сабитов, ки он аз ҷудокунии функсия ба қатори Фурье иборат аст, истифода шудааст. Инчунин, дар ҳалли масъала бисёраъзогии интерполятсионӣ низ истифода шудааст.*
Калидвожаҳо: *функсияи аналитикӣ, қутб, бисёраъзогии интерполятсионӣ, қатори Фурье, формулаи интегралии Коши, индекс, қимати ҳудудии интеграли Коши, масъалаи канорӣ.*

SINGULAR QUASILINEAR BOUNDARY BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A CIRCLE

Saidov B.B., Inoyatov F.A.
Tajik State University of Finance and Economics

Annotation. *The authors of the article have analyzed the singular quasi-linear boundary conjugation problems for a circle. The solution to the problem is sought in the class of functions bounded on the circuit. A theorem is proved that determines the number of solutions to a homogeneous problem and the number of solvability conditions for an inhomogeneous problem, and a formula for calculating the index of the problem is found. To prove the theorem, the method of I. Kh. Sabitov is used, which consists in expanding the function in a Fourier series and constructing an interpolation polynomial.*
Keywords: *analytic function, pole, interpolation polynomial, Fourier series, Cauchy integral formula, index, limit values of the Cauchy integral, boundary value problem.*

Сведения об авторах: **Саидов Бахтиёр Бобокалонович**, к.ф.м.н., зав. кафедрой «Высшая математика». Таджикский государственный финансово - экономический университет. **E-mail:** b.saidov @tgfeu.tj, **тел**.: (+992) 935 075405.
Иноятов Фарухчон Адолатович - старший преподаватель кафедры «Высшая математика». Таджикский государственный финансово - экономический университет. **E-mail**: farruh-1970 @mail.ru, **тел.**: (+992) 918 643 803.

УДК. 512.55

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ПРОИЗВОДНЫМИ ТИПА КАРЛЕМАНА В СИНГУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ

Усмонов Н., Кабиров А.Т.

Таджикский государственный финансово-экономический университет

Аннотация. *В работе рассматриваются краевые задачи типа Карлемана в сингулярном случае. Доказано теоремы, определяющие число линейно независимых решений однородных задач и число условий разрешимости неоднородных задач.*

Ключевые слова: *задача типа Карлемана, односвязная область, контур, единичная окружность, полуплоскость, интеграл типа Коши, индекс, функция, ряды Фурье, интегральные уравнения, сингулярные коэффициенты.*

Пусть D^+ – односвязная область, ограниченная простой замкнутой кривой $\Gamma \in C'_\lambda$, $\lambda > \frac{1}{2}$; D^- – дополнение $D^+ + \Gamma$ до полной плоскости E. Пусть на Γ задана функция $a(t) \in C'_\lambda(\Gamma)$, $a'(t) \neq 0$, отображающая Γ на себя взаимно однозначно с сохранением направления обхода.

Рассматривается следующая краевая задача: найти функции $\varphi^{\pm}(t)$, аналитические, соответственно в D^+ и D^-, граничные значения которых $\varphi^+(t)$ и $\varphi^-(t)$ существуют, принадлежат $L_2(\Gamma)$ и удовлетворяют условию

$$\varphi^+[a(t)] = \frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot A(t) \cdot \frac{dF^-}{dt} + \frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot B(t) \cdot \frac{d\overline{F^-}}{dt} +$$

$$+ \frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot P(t) \cdot F^-(t) + \frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot D(t) \cdot \overline{F^-(t)} + C(t). \qquad (A_1^\alpha)$$

Обозначая $z\frac{dF^-}{dz} = \varphi^-(z)$, $\varphi^-(\infty) = 0$, получим следующую краевую задачу, эквивалентную задаче (A_1^α).

$$\varphi^+[a(t)] = \frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot \frac{A(t)}{t} \cdot \varphi^-(t) + \frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}} \cdot \frac{B(t)}{t} \cdot \overline{\varphi^-(t)} +$$

$$+\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot D(t)\cdot\overline{V(\varphi^-)}+\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot P(t)\cdot V(\varphi^-)+c(t)\,. \qquad (1)$$

Интерполяционный многочлен $\mathrm{T}(t)$ построим так, чтобы удовлетворял условию:

$$C^{(n)}(\eta_r)=\mathrm{T}^{(n)}(\eta_r),\ \ (n=1,2,3,...,d_r\,,\ r=1,2,3,...,R)\,. \qquad (2)$$

В силу (2), имеем

$$\varphi^+\left[a(t)\right]-\mathrm{T}(t)=\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot\frac{A(t)}{t}\cdot\varphi^-(t)+\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot\frac{B(t)}{t}\cdot\overline{\varphi^-(t)}+$$

$$+\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot D(t)\cdot\overline{V(\varphi^-)}+\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot P(t)\cdot V(\varphi^-)+c(t)-\mathrm{T}(t)\,; \qquad (3)$$

$$\varphi^+\left[a(t)\right]-\mathrm{T}(t)=\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot\frac{A(t)}{t}\cdot\varphi^-(t)+\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot\frac{B(t)}{t}\cdot\overline{\varphi^-(t)}+$$

$$+\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot D(t)\cdot\overline{V(\varphi^-)}+\frac{\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot P(t)\cdot V(\varphi^-)+\prod_{r=1}^{R}(t-\eta_r)^{d_r}\cdot c_1(t)$$

или

$$\varphi^+\left[a(t)\right]=\frac{A(t)}{t\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot\varphi^-(t)+\frac{B(t)}{t\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot\overline{\varphi^-(t)}+\frac{D(t)}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot\overline{V(\varphi^-)}+$$

$$+\frac{P(t)}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\cdot V(\varphi^-)+c_1(t)\,,$$

где
$$\varphi_1^+\left[a(t)\right]=\frac{\varphi^+\left[a(t)\right]-\mathrm{T}(t)}{\prod_{m=1}^{M}(t-\xi_m)^{q_m}}\,. \qquad (4)$$

Полагая в (4), имеем $\varphi^-(z)=\prod_{m=1}^{M}(z-\xi_m)^{q_m}\cdot z^{-q_m}\psi^-(t)\,,$

$$\overline{\varphi^-(z)}=\overline{\prod_{m=1}^{M}(z-\xi_m)^{q_m}\cdot z^{-q_m}}\cdot z^{-q_m}\cdot\overline{\psi^-(z)}=$$

$$= \prod_{m=1}^{M} (z-\xi_m)^{q_m} \exp\left(-2i\sum_{m=1}^{M} Q_m q_m\right) \cdot \overline{z^{-q_m}} \cdot \overline{\psi^-(z)}, \quad Q = \arg(t-\xi_m);$$

$$\varphi_1^+[a(t)] = \frac{a(t)}{t}\cdot\psi^-(t) + \frac{b(t)}{\bar{t}}\cdot\overline{\psi^-} + p(t)\cdot V(\psi^-) + q(t)\cdot\overline{V(\psi^-)} + C_1(t), \qquad (5)$$

где $a(t) = A(t),\ b(t) = \mathrm{B}(t)\cdot \exp\left(-2i\sum_{m=1}^{M} Q_m q_m\right)\cdot\overline{z^{-q}},\quad q(t) = D(t)$

сопряжённой к задаче (5), следовательно и к задаче $\left(A_1^{\alpha}\right)$ назовём следующего задачу:

$$\Omega^-(t) = \frac{a(t)}{t}\cdot a'(t)\cdot\Omega^+[a(t)] + \overline{\frac{b(t)}{\bar{t}}\cdot t'^2(S)\cdot a'(t)\cdot\Omega^+[a(t)]} -$$

$$-2V'[p(\tau)]\cdot a'(\tau)\cdot\Omega^+[a(\tau)] - \overline{2\cdot\overline{V'}[q(\tau)]\cdot\tau'^2\cdot a'(\tau)\cdot\Omega^+[a(\tau)]}, \qquad (6)$$

где $t = t(s)$ - уравнение контура Γ, отнесенное к дуге S,

$$V' = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\ln\left(1-\frac{t}{\tau}\right)}{t}\cdot p(\tau)\Omega^+[a(\tau)]a'(\tau)\,d\tau,$$

$$\overline{V'} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\ln\left(1-\frac{t}{\tau}\right)}{t}\cdot\overline{q(\tau)}\cdot\tau'^2(S)\cdot\Omega^+[a(\tau)]\cdot a'(\tau)\,d\tau.$$

Теорема 1. *Пусть* $a(t), a(t)\neq 0, b(t), p(t), q(t)$ *– непрерывные функции,* $c(t)\in L_2(\Gamma)$, $æ = Jnd_{\Gamma} a(t)$, l *и* l' *– числа линейно независимых* (*над полем вещественных чисел*) *решений однородной задачи* (A_1^{α}). *Тогда справедливы равенства* $l - l' = 2(æ-1),\ p = l'$.

Условия разрешимости данной задачи имеют вид:

$$Re\int_{\Gamma} c_1(t)\cdot\Omega_j^+[a(t)]\cdot\omega_j^+(t)\,dt = 0,\quad j = 1,2,\ldots,\ l' = p,$$

где Ω_j^+ *– решения сопряжённой задачи* (6).

Доказательство. Согласно [1], области D^+ и D^- можно конформно отобразить на две области D_1^+ и D_1^- с общей границе Γ_1, так, что функции $\varphi^+(z)$, $\varphi^-(z)$ перейдут в функции $\psi_1^+(z)$ и $\psi_1^-(z)$, определенные в D_1^+ и D_1^- соответственно, причём на Γ_1 будет выполнено краевое условие:

$$\varphi_1^+(t) = \frac{1}{t_1}a_1(t_1)\cdot\psi_1^-(t_1) + b_1(t_1)\cdot\overline{\psi_1^-(t_1)} +$$

$$+ p_1(t_1)\cdot V(\psi_1^-) + q_1(t_1)\cdot\overline{V(\psi_1^-)} + C_1(t). \qquad (7)$$

Функции $\omega^{\pm}(z)$, конформно отображающие $D^{\pm}$ на $D_1^{\pm}$, определяются как решение задачи Римана [1]:

$$\omega^{+}\left[a(t)\right]-\omega^{-}(t)=0,\ \ \omega^{-}(z)=z+\frac{C_1}{z}+\ldots,\quad z\to\infty.$$

Следовательно, $t_1=\omega^{-}(t)=\omega^{+}\left[a(t)\right]$, $a_1(t_1)=a\left[\delta^{-}(t_1)\right]$, $b_1(t_1)=b\left[\delta^{-}(t_1)\right]$, $c_1(t_1)=c\left[\delta^{-}(t_1)\right]$, где $\delta^{-}(t_1)$ обратная к $\omega^{-}(t)$ функция, $\delta^{-}\left[\omega^{-}(t)\right]\equiv t$ и $Jnd_{\Gamma_1}a_1(t_1)=Jnd_{\Gamma}a(t)=æ$.

При том же отображении областей $D^{\pm}$ на $D_1^{\pm}$ функции $\Omega^{\pm}(z)$ из (5) перейдут в функции $\Omega^{\pm}(t)$, которые, как нетрудно подчитать, на Γ_1, будут связаны соотношением

$$\Omega_1^{-}(t_1)=\frac{a_1(t_1)}{t_1}\cdot\Omega_1^{+}(t_1)+\overline{\frac{b_1(t)}{\bar{t}_1}t_1^{1^2}(S)\cdot\Omega_1^{+}(t_1)}+$$

$$+V'\left[p_1(\tau_1)\cdot\Omega_1^{+}(\tau_1)\right]+\overline{\bar{V}'\left[q_1(\tau_1)\cdot\tau_1'^{2}\Omega_1^{+}(t_1)\right]} \qquad (8)$$

Задача (8) является сопряжённой для задачи (7) на Γ_1, и обе они являются задачами без сдвига. Очевидно, что задачи (A_1^{α}) и (7) с одной стороны (6) и (8) с другой, эквивалентны. Поэтому достаточно доказать теорему 1 для задач (7) и (8), что мы и сделаем.

Полагая в (7)

$$\Psi_1^{-}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu(\tau_1)}{\tau_1-z}d\tau_1,$$

где $\Psi_1(z)=\begin{cases}\varphi'(z), & z\in D_1^{+}\\ \psi_1'(z), & z\in D_1^{-}\end{cases}$

по формуле Сохоцкого–Племеля, получим

$$\left(1+\frac{a_1}{t_1}\right)\mu+\frac{b_1}{\bar{t}_1}\overline{\mu}+(1-\frac{a_1}{t_1})S\mu+\frac{b_1}{\bar{t}_1}\overline{S\mu}+p_1(t_1)\cdot V\left[-\mu+S\mu\right]+$$

$$+q_1(t_1)\cdot\overline{V\left[-\mu+S\mu\right]}=2C_1(t_1). \qquad (9)$$

Это есть сингулярное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (7).

В равенстве (9) $S\mu=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\mu(\tau_1)}{\tau_1-t_1}d\tau_1$,

$$-p_1(t_1)\cdot V(-\mu+S\mu)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}p_1(t_1)\frac{-\mu(\tau_1)+\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\mu(\tau_2)}{\tau_2-\tau_1}d\tau_2}{\tau_1}\ln\left(1-\frac{\tau_1}{t_1}\right)d\tau_1=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}p_1(t_1)\frac{\mu(\tau_1)}{\tau_1}\ln\left(1-\frac{\tau_1}{t_1}\right)d\tau_1-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\left\{\frac{1}{\pi i}p_1(t_1)\int_{\Gamma_1}\frac{\ln\left(1-\frac{\tau_2}{t_1}\right)d\tau_2}{\tau_2(\tau_1-\tau_2)}\right\}\mu(\tau_1)d\tau_1\equiv K_1(\mu).$$

Здесь во втором члене τ_1 заменена на τ_2, а τ_2 на τ_1. Аналогично

$$\overline{\overline{q_1(t_1)}V(-\mu+S\mu)}\equiv\overline{K_2(\mu)}.$$

Союзным к уравнению (9) называется следующее уравнение:

$$\left(1+\frac{a_1}{t_1}\right)\nu+\overline{\frac{b_1}{t_1}\nu t'^2}-S\left[(1-\frac{a_1}{t_1})\nu\right]-\overline{S\left[\frac{b_1}{t_1}\nu\right]}+K_1'(\nu)+\overline{\overline{K}_2(\nu)}=0,\qquad(9^*)$$

где

$$K_1'(\nu)=-\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}p_1(\tau_1)\frac{-\nu(\tau_1)}{t_1}\ln\left(1-\frac{t_1}{\tau_1}\right)d\tau_1+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\nu(\tau_1)p_1(\tau_1)}{\tau_2}\cdot\ln\left(1-\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)d\tau_1\right]\cdot\frac{d\tau_2}{\tau_2-t_1}\right\}=$$

$$=2\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}p_1(\tau_1)\frac{\nu(\tau_1)}{t_1}\ln\left(1-\frac{t_1}{\tau_1}\right)d\tau_1\right\}=-2\nu'(p_1\nu).\qquad(10)$$

$$\overline{K_2'(\nu)}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\overline{q_1(\tau_1)}\cdot\overline{\frac{\nu(\tau_1)}{t_1}}\cdot\tau_1'^2(S)\cdot\ln\left(1-\frac{t_1}{\tau_1}\right)d\tau_1-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\left\{\frac{1}{\pi i}\overline{q_1(t_1)}\int_{\Gamma_1}\frac{\ln\left(1-\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)}{\tau_2}\cdot\frac{d\tau_2}{t_1-\tau_2}\right\}\cdot\overline{\tau'^2\cdot\nu(\tau_1)d\tau_1}=-2\overline{\nu'[q_1(\tau_1)\cdot\tau_1'^2\cdot\nu]}.$$

Покажем эквивалентность (9*) и (8). Положим, что

$$\Omega_1^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\beta_1\nu+\tau_1'^2\beta_2\nu}{\tau_1-z}\cdot d\tau_1-K_1'\nu-\overline{\overline{\kappa_2'}\nu}\ \text{ при }\ z\in D_1^+,$$

$$\Omega_1'^-(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\beta_1\nu+\tau_1'^2\beta_2\nu}{\tau_1-z}\cdot d\tau_1\ \text{ при }\ z\in D_1^-,$$

где $\alpha_1=1+\frac{a_1}{t},\ \alpha_2=\frac{b_1}{\tau_1},\ \beta_1=1-\frac{a_1}{t_1},\ \beta_2=-\frac{b_1}{\tau_1}.$

По формулам Сохоцкого–Племеля имеем

$$2\Omega_1^+(t)=\beta_1\nu+t_1'^2\,\beta_2\nu+S\left[\beta_1\nu+\beta_2\tau_1'^2\nu\right]-K_1'\nu-\overline{K_2'\nu}\ , \tag{11}$$

$$\Omega_1^+-\Omega_1^-=\beta_1\nu+t_1'^2\,\beta_2\nu-K_1'\nu-\overline{K_2'\nu}\ . \tag{12}$$

С помощью (11) уравнение (9^*) запишется следующим образом

$$\alpha_1\nu+t_1'^2\alpha_2\nu+\beta_1\nu+t_1'^2\beta_2\nu=2\Omega_1^+(t_1).$$

Подставляя в последнее значение α_1, α_2, β_1, β_2, получим:

$$V=\Omega_1^+(t_1) \tag{13}$$

Теперь, подставляя (13) в (12) и учитывая (10) и (11), получим:

$$\Omega_1^1(t_1)=\frac{a_1}{t_1}\Omega_1^+(t_1)-\frac{b_1}{t_1}t'^2\Omega_1^+(t_1)-2V'(p_1\Omega_1^+)-\overline{2\overline{V'}(q_1\tau_1'^2\Omega_1^+)}\ .$$

Для сингулярных интегральных уравнений (9) и (9*) результаты теоремы 1 доказаны [3]. Отсюда следует справедливость теоремы 1 для задачи (A_1^α).

II. Рассмотрим следующую задачу:

$$\varphi^+\left[a(t)\right]=a(t)\frac{d\varphi^-}{dt}+b(t)\overline{\frac{d\varphi^-}{dt}}+q(t)\,\overline{\varphi^-(t)}+c(t),\ \varphi^-(\infty)=0, \qquad (A_2^\alpha)$$

где $a(t),\ b(t),\ q(t)\in \mathrm{H}_\lambda(\Gamma),\ \lambda>\frac{1}{2},\ C(t)\in L_2(\Gamma).$

Вводя обозначения $z\dfrac{d\varphi^-}{dz}=\psi^-(z),\ \ \psi^-(\infty)=0,$ получим эквивалентную задачу

$$\varphi^+\left[a(t)\right]=a(t)\frac{1}{t}\psi^-(t)+\frac{b(t)}{\bar{t}}\cdot\overline{\psi^-(t)}+q(t)\overline{V(\psi^-)}+c(t),\ \psi^-(\infty)=0. \tag{14}$$

Пусть $c(t)\equiv 0$.

Задачу (A_2^α), определённую на произвольном контуре Γ, с помощью конформного отображения можно свести [1] к задаче такого же вида на окружности. Поэтому при исследовании задачи вида (A_2^α) будем считать, что Γ - окружность $|t|=1$.

Введём канонические функции [1] $\chi^+(t)$, $\chi^-(t)$, $z^+(t)$, $z^-(t)$ являющиеся решениями следующих задач Римана:

$$\chi^+\left[a(t)\right]=\left[a(t)\right]^{æ}\cdot a_1(t)\,\chi^-(t), \tag{15}$$

$$z^+(t)=t^{-æ}\cdot a_1(t)\,z^-(t), \tag{16}$$

где $a_1(t)=\dfrac{a(t)}{t}$, $æ=Jn\,d_\Gamma\,a(t)-1.$

1) Пусть $æ<0$. Умножив (14) на $\left[\alpha(t)\right]^{-æ}$ и учитывая (15), имеем:

$$\Phi^+\left[a(t)\right]=\Phi^-(t)+B(t)\overline{\Phi^-(t)}+\frac{q(t)}{\chi^+}\cdot\overline{V\Phi^-(\chi^-)}, \qquad (17)$$

где $\Phi^+(t)=\dfrac{\varphi^+(t)}{\chi^+(t)}\cdot t^{-æ}$, $\Phi^-(t)=\dfrac{\psi^-(t)}{\chi^-(t)}$, $B(t)=\dfrac{t\cdot b(t)\overline{\chi^-(t)}}{a_1(t)\chi^-(t)}$.

Введём две новые аналитические функции

$$\Omega^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\Phi^-(\tau)}{\tau-z}d\tau,\ \Omega^-(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\Phi^+(\tau)}{\tau-z}d\tau.$$

На основании формул Сохоцкого-Племеля и при условии, что произвольная комплексная функция была краевым значением аналитической функции, имеем на контуре

$$\Omega^+(t)=\frac{1}{2}\Phi^-(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\Phi^-(\tau)}{\tau-t}d\tau=0, \qquad (18)$$

$$\Omega^-(t)=-\frac{1}{2}\Phi^+(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\Phi^+(\tau)}{\tau-t}d\tau=0. \qquad (19)$$

Отсюда

$$\Omega^+(t)-\Omega^-\left[a(t)\right]=\frac{1}{2}\left\{\Phi^-(t)+\Phi^+\left[a(t)\right]+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\Phi^-(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\Phi^+(\tau)}{a-a(t)}d\tau\right\}=0.$$

Исключим отсюда $\Phi^+(t)$. Для этого, используя (4) во втором интеграле, проведём подстановку $\tau=\alpha(\tau_1)$, а затем переменную τ_1 обозначим снова через τ. В результате, для функции $\Phi^-(t)$ получим следующее уравнение:

$$\Phi^-(t)+\frac{B(t)\Phi^-(t)}{2}+\frac{q(t)}{2a_1(t)\chi^-}\overline{V(\Phi^-\chi^-)}-\frac{1}{2\pi i}\cdot$$

$$\cdot\int_\Gamma\frac{1}{\tau-t}\left[B(\tau)\overline{\Phi^-(\tau)}-\frac{q(\tau)}{a_1(\tau)\chi^-}\cdot\overline{V\left(\Phi^-\chi^-\right)}\right]d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left[\frac{1}{\tau-t}-\frac{a'(\tau)}{a(\tau)-a(t)}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\Phi^-(\tau)+B(\tau)\overline{\Phi^-(\tau)}+\frac{q(\tau)}{a_1(\tau)\chi^-}\cdot\overline{V(\Phi^-\chi^-)}\right]d\tau=0. \qquad (20)$$

Видно, что функция $\Phi^-(t)$, которая удовлетворяет условию (17) и условию аналитичности (18), удовлетворяет интегральному уравнению (20). Докажем обратное, что всякое решение интегрального уравнения является решением краевой задачи.

Обозначим

$$F(t)=\Phi^{-}(t)+\frac{B(t)\overline{\Phi^{-}(t)}}{2}+\frac{q(t)}{2a_1(t)\chi^{-}}\cdot\overline{V\left(\Phi^{-}\chi^{-}\right)}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{1}{\tau-t}\left[B(\tau)\overline{\Phi^{-}(\tau)}+\frac{q(\tau)}{\chi^{-}a_1}\overline{V\left(\Phi^{-}\chi^{-}\right)}\right]d\tau \qquad (21)$$

$$F(t)=\frac{B(t)\overline{\Phi^{-}(t)}}{2}+\frac{q(t)}{2a_1\chi^{-}}\overline{V\left(\Phi^{-}\chi^{-}\right)}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{1}{\tau-t}\left[B(\tau)\overline{\Phi^{-}(\tau)}+\frac{q(\tau)}{a_1\chi^{-}}\overline{V\left(\Phi^{-}\chi^{-}\right)}\right]d\tau. \qquad (22)$$

Тогда уравнение (20) относительно функции $F(t)$ и $F^{+}(t)$, примет вид:

$$F(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}K(t,\tau)F(\tau)d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}K(t,\tau)F^{+}(\tau)d\tau=0 \qquad (23)$$

где
$$K(t,\tau)=\frac{1}{\tau-t}-\frac{\alpha'(\tau)}{\tau(\tau)-\alpha(t)}. \qquad (24)$$

Уравнение (23) можно получить также, решая краевую задачу Римана [3],

$$\Phi_1^{+}\left[\alpha(t)\right]=F^{-}(t)+F^{+}(t), \qquad (25)$$

а для задачи Римана доказано, что для любого решения (23) будет $F(t)=F^{-}(t)$. Теперь из (21) видно, что решение $\Phi^{-}(t)$ интегрального уравнения (20) - есть предельное значение функции, аналитической в D^{-}.

Если через $R(t,\tau)$ обозначить резольвенту ядра $K(t,\tau)$, то решение уравнения (23), имеет вид:

$$F(t)=F^{-}(t)=\int_{\Gamma}R(t,\tau)F^{+}(\tau)d\tau \qquad (26)$$

В [18] доказано, что при $a(t)\in C'_{\lambda}$, $a'(t)\neq 0$, $|K(t,\tau)|<\mu|t-\tau|^{\lambda-1}$, поэтому $\int_{\Gamma}|K(t,\tau)|^2 d\sigma\le C_0<\infty$ при $\lambda>\frac{1}{2}$, а так же

$$\int_{\Gamma}|K(t,\tau)|^2 ds\le c_1<\infty,\ \tau=\tau(\sigma),\ t=t(s),\ c_0\ \text{и}\ c_1=const.$$

Следовательно $K(t,\tau)\in L_2(\Gamma\times\Gamma)$, $R(t,\tau)\in L_2(\Gamma\times\Gamma)$,

$$\int_{\Gamma}|R(t,\tau)|^2 d\sigma\le c'_0<\infty,\ \int_{\Gamma}|R(t,\tau)|^2 ds\le c''_0<\infty.$$

Поэтому $R(t,\tau)$ можно разложить в ряд Фурье, сходящиеся в среднем $L_2(\Gamma)$ по τ и равномерно относительно t:

$$R(t,\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_k(t)\tau^k.$$

Уравнение (20) с учётом (21), (22) и (26) перепишем так:

$$\Phi^-(t)+\frac{B(t)\overline{\Phi^-(t)}}{2}+\frac{q(t)}{2a_1\chi^-}\overline{V(\Phi^-\chi^-)}-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{B(\tau)\overline{\Phi^-(\tau)}}{\tau-t}dt-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{1}{\tau-t}\,\frac{q(t)}{a_1\chi^-}\overline{V(\Phi^-\chi)}d\tau+$$

$$+\int_\Gamma R^-(t,\tau)\left[B(\tau)\overline{\Phi^-(\tau)}+\frac{q_1}{a_1\chi^-}\,\overline{V(\Phi^-\chi^-)}\right]d\tau=0. \qquad (27)$$

Отметим, что для определения $F^-(t)$ и (26), имеют значение только члены вида $R_k\cdot\tau^k\equiv R^-(t),\quad k<0$.

Положим $B_1(t)=b(t)\dfrac{z^-(t)}{\chi^-(t)},\quad Q_1(t)=q(t)\dfrac{z^-(t)}{\chi^-(t)}.$

Разложим функции $B_1(t),\ Q_1(t),\ R^-(t,\tau)\cdot B_1(\tau),\ R^-(t,\tau)\cdot Q_1(\tau)$ в ряды Фурье:

$$B_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_kt^k,\ Q_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}q_kt^k,\ R^-(t,\tau)\cdot B_1(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}r_k^{(1)}(t)\cdot\tau^k,$$

$$R^-(t,\tau)\cdot Q_1(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}r_k^{(2)}(t)\cdot\tau^k. \qquad (28)$$

Введем обозначения:

$$\tilde{K}\left[\Phi^-(t)\right]=\frac{B_1(t)-\sum_{k=-N}^{N}b_kt^k}{2z^+(t)}\cdot t^{-æ+1}\cdot\overline{\chi^-}\cdot\overline{\Phi^-(t)}+\frac{Q_1(t)-\sum_{k=-N}^{N}q_kt^k}{2z^+(t)}\cdot t^{-æ}\cdot$$

$$\cdot V(\Phi^-\chi^-)-\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_\Gamma\frac{\left[B_1(\tau)-\sum_{k=-N}^{N}b_k\tau^k\right]}{z^+(\tau)(\tau-t)}\cdot\chi^-(\tau)\tau^{-æ+1}\cdot\overline{\Phi^-(\tau)}d\tau-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_\Gamma\frac{\left[Q_1(\tau)-\sum_{k=-N}^{N}q_k\tau^k\right]}{z^+(\tau)(\tau-t)}\cdot\tau^{-æ}\cdot\overline{V(\Phi^-\chi^-)}d\tau+\int_\Gamma\left[R^-(t,\tau)B_1(\tau)-\sum_{k=-N}^{N}r_k^{(1)}(t)\tau^k\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{\overline{\chi^-(\tau)}}{z^+(\tau)}\cdot\int_\Gamma\frac{\left[B_1(\tau)-\sum_{k=-N}^{N}b_k\tau^k\right]}{z^+(\tau)(\tau-t)}\cdot\tau^{-æ+1}\cdot\overline{\Phi^-(\tau)}d\tau+\int_\Gamma[R^-(t,\tau)Q_1(\tau)-$$

$$-\sum_{k=-N}^{N}r_k^{(2)}(t)\tau^k]\frac{1}{z^+(\tau)}\cdot\tau^{-æ}\cdot\overline{V(\Phi^-\chi^-)}d\tau.$$

Через N обозначим наименьший номер, для которого $\left\|\tilde{K}\right\|_{L_2}<1.$

В виду сходимости ряда $\sum_{k=-N}^{N} c_k t^k$ такой номер существует. Через m_1, n_1, m_2, n_2 обозначим индексы соответственно первых из коэффициентов b_{-N}, b_{-N+1}, b_{-1}; q_{-N}, q_{-N+1}, q_{-1}, $r_{-N}^{(1)}(t), r_{-N+1}^{(1)}(t),\ldots,r_{-1}^{(1)}(t)$ и $r_{-N}^{(2)}(t), r_{-N+1}^{(2)}(t),\ldots,r_{-1}^{(2)}(t)$, не равных нулю для всех обозначений *t*.

Обозначим

$$\mathrm{T}_1(t) = \sum_{k=-m_1}^{N} b_k t^k,\ \mathrm{T}_2(t) = \sum_{k=-n_1}^{N} q_k t^k,\ \mathrm{T}_3(t,\tau) = \sum_{k=-m_2}^{N} r_k^{(1)}(t)\tau^k,\ \mathrm{T}_4(t,\tau) = \sum_{k=-n_2}^{N} r_k^{(2)}(t)\tau^k.$$

Теперь перепишем уравнение (26) следующим образом:

$$\Phi^-(t) + \tilde{K}_1[\Phi^-(t)] + \frac{\mathrm{T}_1\overline{\chi^-}\cdot\overline{\Phi^-(t)}}{2z^+(t)}\cdot t^{-æ+1} + \frac{\mathrm{T}_2\overline{\chi^-}\cdot\overline{\Phi^-(t)}}{2z^+(t)}\cdot t^{-æ}\cdot\overline{V(\Phi^-\chi^-)} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mathrm{T}_3(\tau)\overline{\chi^-(\tau)}}{z^+(\tau)}\cdot t^{-æ+1}\,\overline{\Phi^-(\tau)}d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mathrm{T}_4(t,\tau)}{z^+(\tau)}\cdot\tau^{-æ}\cdot\overline{V(\Phi^-\chi^-)}d\tau = 0, \qquad (29)$$

где $\tilde{K}_1$, есть оператор $\tilde{K}$, в котором суммы $\sum_{-N}^{N}$ заменены соответственно, через $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3, \mathrm{T}_4$. Очевидно, что $\left\|\tilde{K}\right\|_{L_2} < 1$.

a) Пусть сначала $æ \le -n+1$, где $n = \max\{m_1; n_1; m_2 - 1; n_2\}$.

Тогда функции $\mathrm{T}_1(\tau)\tau^{-æ+1}\cdot\overline{\Phi^-(\tau)}$, $\mathrm{T}_2(\tau)\tau^{-æ}\cdot\overline{V(\Phi^-\chi^-)}$, $\mathrm{T}_3(t,\tau)\tau^{-æ+1}\cdot\overline{\Phi^-(\tau)}$, $\mathrm{T}_4(t,\tau)\tau^{-æ}\cdot\overline{V(\Phi^-\chi^-)}$ будут предельными значениями функций, аналитических в D^+. Поэтому шесть последних слагаемых в (29) обратятся в нуль. Следовательно, по принципу сжатых отображений уравнение (29) имеет нулевое решение, т.е. при $æ \le -n+1$.

b) Пусть $-n+1 < æ < 0$.

Функции $\Phi^-(t)$ в уравнение будем искать в виде

$$\Phi^-(t) = \frac{\beta_1}{t} + \cdots + \frac{\beta_{n+æ-1}}{t^{n+æ-1}} + \frac{\Phi_0^-(t)}{t^{n+æ-1}}.$$

Подставляя это значение $\Phi^-(t)$ в уравнение (29), получим:

$$\Phi_1^-(t) + \tilde{K}_1[\Phi_1^-(t)] = A_1(t)q_1 + \tilde{A}_2(t)\overline{q_1} + \cdots + A_{n+æ-1}(t)\cdot q_{n+æ-1} + \tilde{A}_{n+æ-1}\cdot q_{n+æ'-1}, \qquad (30)$$

где $\Phi_1^-(t) = \Phi_0^-(t)t^{-n-æ+1}$, $A_i(t)$ и $\tilde{A}_i(t)$ $(i = 1,2,\ldots,n+æ-1)$ легко выписываемые в явном виде известные функции. При каждом свободном члене уравнение (30) имеет единственное решение, т.е. всего $2(n+æ-1)$ - линейно независимых решений, которые определяются выбором значений q_i и $\overline{q_i}$.

Из этих функций только те $\Phi_1^-(t)$ будут решениями задачи (17), которые на бесконечно удалённой точке обращаются в нуль, не ниже $n+æ-1$ порядка. Выписывая соответствующие условия для $\Phi_1^-(t)$:

$$\int_\Gamma \Phi_1^-(t)t^k dt = 0, \quad k = 0,1,\ldots,n + æ - 2$$

мы получим однородную систему из $2(n+æ-1)$ уравнений для $2(n-æ-1)$ постоянных q_i и $\overline{q_i}$ $(i=1,2,\ldots,n+æ-1)$. Если r – ранг этой системы, то число решений задачи (17) равно $l=2(n+æ-1)-r$. Но только та пара $\left(\Phi^+(t),\ \Phi^-(t)\right)$ решений задачи (17) определяет решение задачи (14), а следовательно и однородной задачи (A_2^α), для которой $\Phi^+(z)$ имеет нуль порядка $-æ$ в точке $z=0$, т.е. для которой $\Phi^+(t)$ удовлетворяет условиям:

$$\int_\Gamma \Phi^+(t)t^{-k} dt = 0, \quad k = 1,2,\ldots, -æ.$$

Эти условия дают систему из $2|æ|$ уравнений с l_1 неизвестными. Если ρ - ранг этой системы, то $l=2(n+æ-1)-r-\rho$ и так как $0\le r\le 2(n+æ-1)$, $0\le\rho\le\min 2(l,|æ|)$, то $0\le l\le 2(n+æ-1)$.

c) Пусть $æ\ge 0$. Тогда, рассуждая аналогично тому, как это сделано выше при $æ<0$, получим, что $2æ\le l\le 2(n+2æ-1)$.

Итак, мы доказали, что для однородной задачи (A_2^α), верны следующие результаты:

1) $l=0$ при $æ\le -n+1$,

2) $0\le l\le 2(n+æ-1)$ при $-n+1<æ<0$,

3) $2æ\le l\le 2(n+2æ-1)$ при $æ\ge 0$.

Теперь, используя теорему 1, получим следующую теорему для задачи (A_2^α).

Теорема 2. *Пусть* $a(t),b(t),q(t)\in H_\lambda(\Gamma)$, $\lambda>\frac{1}{2}$, $c(t)\in L_2(\Gamma)$, $a(t)\ne 0$, $æ=Ind_\Gamma a(t)-1$, $n=\max\{m_1-1,\ n_1,\ m_2-1,\ n_2\}$, *где* m_1, m_2, n_1, n_2 - *определенные выше числ;* $a(t)\in C_\lambda^1$, $\lambda>\frac{1}{2}$ *отображает контур* Γ *в себя взаимно однозначно с сохранением направления контура,* $a'(t)\ne 0$. *Если* $\varphi^\pm(t)\in L_2(\Gamma)$ *решение задачи представимо интегралом типа Коши, то для задачи* (A_2^α), *справедливо*:

1) *при* $æ\le -n+1$, $l=0$, $p=2|æ|$;

2) *при* $-n+1<æ<0$, $0\le l\le 2(n+æ-1)$, $p=l-2æ$;

3) *при* $æ \geq 0,\ 2æ \leq l \leq 2(n+æ-1),\ p = l - 2æ$.

Литература

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. –М.: Наука, –1977. – 640 с.
2. Усманов Н. Особые случаи краевой задачи сопряжения аналитических функций с производными [текст] /Усманов Н.// Доклады Тадж. ССР.– 1974. - Т. XVII, - №7, - с.7–10.
3. Усманов Н., Кабиров А.Т. Общая краевая задача сопряжения с производными для круга в сингулярном случае //Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук.–2013. №1/1(102), - с. 60 – 67.
4. Усманов Н., Кабиров А.Т. О краевой задаче с производными типа Карлемана в сингулярном случае // Материалы международной научной конференции, посвященной 85–летию академика Михайлова Л.Г. – Душанбе: АН РТ, НУТ, 2013, - с.134 –137.
5. Усманов Н., Кабиров А.Т. Краевая задача сопряжения с производными для круга в сингулярном случае //Материалы республиканской научно-теоретич. конференции. г. Курган–Тюбе: КГУ, –2013, - с.117–122.
6. Усманов Н., Кабиров А.Т. Об одной сингулярной краевой задаче с производными со сдвигом //Материалы международной научной конференции “Актуальные проблемы развития образования и науки в современных условиях”. Душанбе, ГКУ. –2016, - с.75 – 83.

ДАР БОРАИ МАСЪАЛАИ КАНОРӢ БО ҲОСИЛАИ НАМУДИ КАРЛЕМАН ДАР ҲОЛАТИ СИНГУЛЯРӢ

Усмонов Н., Кобиров А.Т.

Донишгоҳи давлатии молия ва иқтисоди Тоҷикистон

Аннотатсия. *Дар ин мақола масъалаҳои канории намуди Карлеман дар ҳолати сингулярӣ баррасӣ шудаанд. Теоремаҳое исбот кара шуаанд, ки миқдори ҳалҳои хатгӣ новобастаи масъалаҳои канории якҷинса ва миқдори шартҳои ҳалшавандагии масъалаҳои канории гайриякҷинсаро муайян мекунанд.*

Калидвожаҳо: *масъалаи намуди Карлеман, соҳаи якалоқа, сарҳа, давраи воҳидӣ, нимҳамворӣ, интеграли намуди Коши, функсия, қатори Фуре, муодилаи интегралӣ, коэффитсиентҳои сингулярӣ.*

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH DERIVATIVES OF THE CARLEMANN TYPE

Usmanov N., Kabirov A. T.

Tajik State University of Finance and Economics

Annotation. *The paper considers boundary value problems of Carleman type in the singular case: Theorems are proved that determine the number of linearly independent solutions to homogeneous problems and the number of conditions for the solvability of inhomogeneous problems.*

Keywords: *Carleman type problem, simply connected domain, contour, unit circle, half-plane, Cauchy-type integral, index, function, Fourier series, integral equations, singular coefficients.*

Сведения об авторах: **Усманов Нурулло–** д.ф.м.н., профессор кафедры высшей математики. Таджикский государственный финансово-экономический университет.
Кабиров Абубакр Тиллоевич - соискатель кафедры высшей математики, Таджикский государственный финансово-экономический университет. Kabirov@fit.tj. Тел.: 777 07 19 05.

УДК 517.55

РЕШЕНИЕ ВНУТРЕННЕЙ СИНГУЛЯРНОЙ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВИДА ЗАДАЧИ КАРЛЕМАНА С НУЛЯМИ И ПОЛЮСАМИ СОПРЯЖЁННО - АНАЛИТИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

Усмонов Н., Шадманов М.У.

Таджикский государственный финансово - экономический университет

Аннотация. *В настоящей работе рассматривается решение внутренней сингулярной однородной краевой задачи вида задачи Карлемана с нулямы и полюсами сопряжённо - аналитического характера. Основная цель настаящего исследования заключается в решении вопроса, как меяются число линейно независимых решений от наличия нулей и полюсов сопряжённо аналитического характера у коэффициента задачи.*
Ключевые слова*: полюс, условия Гёльдера, сдвиг, сингулярные случаи, индекс, каноническая функция, однородная задача, внутренняя задача.*

Требуется найти функцию $\varphi^+(z)$, аналитическую во внутренней области D^+, которая ограничена простым замкнутым контуром типа Ляпунова Γ и по заданному краевому условию

$$\varphi^+[\alpha(t)] = \frac{\prod_{r=1}^{I}\left(\overline{t-\tau_r}\right)^{d_r}}{\prod_{n=1}^{N}(t-\xi_n)^{s_n}} G_1(t)\overline{\varphi^+(t)} \quad , \tag{1}$$

где для $\alpha(t)$ выполняются условия Карлемана

$$\alpha[(t)] = t \tag{2}$$

$$G_1(t), \alpha'(t) \in \Gamma,\ G_1(t) \neq 0,\ \alpha'(t) \neq 0.$$

Здесь τ_r, ξ_n - некоторые несовпадающие точки контура, d_r, s_n - натуральные числа и $æ = \frac{1}{2\pi}\{\arg G_1(t)\}_\Gamma$.

$$G_1[\alpha(t)]\,\overline{G_1(t)} = 1. \tag{3}$$

Введём обозначения $\sum_{r=1}^{I} d_r = d,\ \sum_{n=1}^{N} s_n = s.$

Решение данной задачи проводится в классе функций, ограниченных на контуре.

Очевидно следующие равенства

$$\prod_{r=1}^{I}\left(\overline{t-\tau_j}\right)^{d_r}=\prod_{r=1}^{I}\left(t-\tau_j\right)^{d_r}\cdot e^{-2i\theta_1 d_r},\quad \prod_{n=1}^{N}\left(\overline{t-\xi_n}\right)^{s_n}=\prod_{n=1}^{N}\left(t-\xi_n\right)^{s_n}\cdot e^{-2i\theta_2 s_n}, \tag{4}$$

где $\theta_1=\arg(t-\tau_j)$, $\theta_2=\arg(t-\xi_n)$.

При помощи равенства (4) перепишем (1) в следующем виде

$$\varphi^+[\alpha(t)]=\frac{\prod_{r=1}^{I}\left(t-\tau_j\right)^{d_r}}{\prod_{n=1}^{N}\left(t-\xi_n\right)^{s_n}}\cdot e^{2i(\theta_2 s_n-\theta_1 d_r)}\cdot G_1(t)\overline{\varphi^+(t)}$$

или

$$\varphi^+[\alpha(t)]=\frac{\prod_{r=1}^{I}\left(t-\tau_j\right)^{d_r}}{\prod_{n=1}^{N}\left(t-\xi_n\right)^{s_n}}\cdot G_2(t)\overline{\varphi^+(t)}, \tag{5}$$

где $G_2(t)=G_1(t)e^{2i(\theta_2 s_n-\theta_1 d_r)}$,

Отметим, что коэффициент $G_2(t)$ удовлетворяет условие

$G_2[\alpha(t)]\cdot\overline{G_2(t)}=1$

Краевое условие (5) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\varphi^+[\alpha(t)]}{\prod_{r=1}^{I}\left(t-\tau_r\right)^{d_r}}=G_2(t)\frac{\varphi^+(t)}{\prod_{n=1}^{N}\left(t-\xi_n\right)^{s_n}} \tag{6}$$

В силу ограниченности решения на контуре, имеем:

$$\varphi^+[\alpha(t)]=\prod_{r=1}^{I}\left(t-\tau_r\right)^{d_r}\varphi_1^+[\alpha(t)],$$

$$\overline{\varphi^+(t)}=\prod_{n=1}^{N}\left(t-\xi_n\right)^{s_n}\cdot\varphi_1^+(t). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), имеем:

$$\overline{\varphi_1^+}[\alpha(t)]=G_2(t)\overline{\varphi_1^+(t)} \tag{8}$$

Сначала исследуем случай, когда æ $=\frac{1}{2\pi}\{\arg G_2(t)\}_\Gamma=0$

Рассмотрим краевую задачу по скачку

$$\Gamma^+[\alpha(t)]-\overline{\Gamma^+(t)}=\ell nG_2(t), \tag{9}$$

где под $\ell nG_2(t)$ понимается однозначная функция, принадлежащая классу $\mathrm{H}(\Gamma)$.

Функция

$$\Gamma^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\gamma[\alpha(t)]}{\tau-z}d_r,$$

где $\gamma(t)$ - решение интегрального уравнения $(L_{-\gamma})(t)=\ell nG_2(t)$, является частным решением задачи (9).

Коэффициент $G_2(t)$ можно представить в виде

$$G_2(t)=\frac{\chi_0^+[\alpha(t)]}{\chi_0^-(t)},$$

где $\chi_0^+(z)=e^{\Gamma(z)}$. По этому, краевое условие (8), можно записать в виде

$$\frac{\Phi_1^+[\alpha(t)]}{\chi_0^+[\alpha(t)]}=\frac{\overline{\Phi_1^+(t)}}{\chi_0^-(t)}.$$

Очевидно, что функция

$$F^+(z)=\frac{\varphi_1^+(z)}{\chi_0^-(z)}$$

удовлетворяет условие

$$F^+[\alpha(t)]=\overline{F^+(t)}. \qquad (10)$$

Общим решением граничной задачи (10) является формула $F^+(z)=C$, где $C=const$.

Итак, функция $\varphi_1^+(z)=c_1e^{\Gamma^+(z)}$, где $C=const$, при $æ=0$ является общим решением задачи (1).

Определение 1. Частное решение задачи (8)

$$\chi_0^+(z)=e^{\Gamma^+(z)}$$

назовем фундаментальной функцией краевой задачи типа Карлемана.

Функция $\chi_0^+(z)$ является аналитической в D^+, отличной от нуля в $D^+\cup\Gamma^+$. Она удовлетворяет краевое условие (8) при $æ=0$, а предельные значения $\chi^+(t)\in H(\Gamma)$.

Перейдём к рассмотрению общего случая, когда число $æ=\frac{1}{2\pi}\{\arg G_2(t)\}$ является любым чётным числом.

Предположим, что точка $z=0$ принадлежит области D^+. Обозначим $æ=2m$.

Введём вспомогательную функцию

$$G_0(t)=\frac{t^m}{\alpha^m(t)}\cdot G_2(t).$$

Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\{\arg G_0(t)\}_\Gamma=\frac{1}{2\pi}\{\arg G(t)\}_\Gamma-2m,$$

$$G_0[\alpha(t)]=\frac{\overline{\alpha(t)^m}}{t^m}G[\alpha(t)]=\frac{\overline{\alpha(t)^m}}{t^m}\cdot\frac{1}{\overline{G(t)}}=\frac{1}{\overline{G_0(t)}}.$$

Функция $\chi_0^+(z)$ является аналитической в D^+, отличной от нуля в $D^+\in\Gamma^+$. Она удовлетворяет краевому условию (8) при $æ=0$, а предельные значения $\chi^+(t)\in H(\Gamma)$.

Перейдём к рассмотрению общего случая, когда число $æ = \frac{1}{2\pi}\{\arg G_2(t)\}$ является любым чётным числом.

Предположим, что точка $z = 0$ принадлежит области D^+. Обозначим $æ = 0$. Введём вспомогательную функцию

$$G_0(t) = \frac{t^m}{\alpha^m(t)} \cdot G_2(t).$$

Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\{arg G_0(t)\}_\Gamma = \frac{1}{2\pi}\{\arg G(t)\}_\Gamma - 2m,$$

$$G_0[\alpha(t)] = \frac{\overline{\alpha(t)^m}}{t^m} G[\alpha(t)] = \frac{\overline{\alpha(t)^m}}{t^m} \cdot \frac{1}{\overline{G(t)}} = \frac{1}{\overline{G_0(t)}}.$$

Поэтому, для краевой задачи типа задачи Карлемана с коэффициентом $G_0(t)$ существует, как показано, фундаментальная функция $\chi_0^+(z)$, аналитическая в D^+, отличная от нуля $D^+ \cup \Gamma$, имеющая на Γ предельное значение $\chi_0^+(z) \in H(\Gamma)$ и удовлетворяющая условию:

$$\chi_0^+[\alpha(t)] = G_0(t)\overline{\chi_0^+(t)}.$$

Эта функция строится с помощью формулы:

$$\chi_0^+(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\nu_0[\alpha(\tau)]}{\tau - z} d\tau\right\},$$

где ν_0 - решение уравнения $L_{+\nu_0} = \ell n G_0(t)$.

Определение 2. Функцию $\chi^+(z) = z^m \chi_0^+(z)$ назавем канонической функцией граничной задачи Карлемана.

Функция $\chi^+(z) = z^m \chi_0^+(z)$ удовлетворяет краевому условию (8) и имеет нулевой порядок всюду в области $D^+ \cup \Gamma$, за исключением нулевой точки $z = 0$, имеющей порядок m.

Введенная выше фундаментальная функция $\chi_0(z)$ является канонической функцией задачи типа задачи Карлемана с нулевым индексом коэффициента $G_2(t)$ $(m = 0)$.

В случае $m \geq 0$, каноническая функция является одним из решений граничной задачи (8). Из сказанного выше следует, что на контуре Γ справедливо следующее представление (факторизация) коэффициента задачи (8) :

$$G_2(t) = \frac{\chi^+[\alpha(t)]}{\chi^+(t)} \tag{11}$$

Подставляя выражение (10) в краевое условие (8) для обоих частей полученного равенства на $\chi^+[\alpha(t)]$, получим

$$\frac{\varphi_1^+[\alpha(t)]}{\alpha^m(t)\chi_0^+[\alpha(t)]}=\frac{\overline{\Phi_1^+(t)}}{t^m\chi_0^+(t)}. \tag{12}$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда $m>0$ и когда $m>0$.

а) Пусть $m>0$. Тогда , функция $\dfrac{\Phi^+(z)}{z^m\chi_0^+(z)}$, в общем, говоря, имеет в точке $z=0$ полюс порядка m и следовательно, допускает представление в виде

$$\frac{\varphi^+(z)}{z^m\chi_0^+(z)}=\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots+\frac{c_m}{z^m}+\psi^+(z), \tag{13}$$

где $\psi^+(z)$ - аналитическая функция в области D^+, $c_1,c_2,...,c_m$ - комплексные постоянные. Подставляя представление (13) в равенство (12), переходим к краевому условию для функции $\psi^+(z)$:

$$\psi^+[\alpha(t)]-\overline{\psi^+(t)}=\sum_{k=1}^{m}\left\{a_k\left[\frac{1}{t^{-k}}-\frac{1}{\alpha^k(t)}\right]+b_k\left[-\frac{1}{t^{-k}}-\frac{1}{\alpha^k(t)}\right]\right\}, \tag{14}$$

где $a_k=\operatorname{Re}c_k$, $b_k=\operatorname{Im}c_k$. Обозначим

$$\frac{1}{\overline{t^k}}-\frac{1}{\alpha_k(t)}=q_{2k-1},\ -\frac{1}{\overline{t^k}}-\frac{1}{\alpha^k(t)}=q_{2k}(t),\ \beta_{2k-1}=a_k,\ \beta_{2k}=b_k,\ k=1,2,...,m.$$

Краевое условие (14) принимает вид

$$\psi^+[\alpha(t)]-\overline{\psi^+\alpha(t)}=\sum_{j=1}^{æ}\beta_j q_j(t). \tag{15}$$

Правая часть (15) удовлетворяет тождеству $q[\alpha(t)]+\overline{q(t)}=0$ поскольку, как легко проверить, указанному тождеству удовлетворяет каждая из функций $q_j(t),\ j=1,2,...,2m$. Следовательно, соотношение (15) есть краевое условие решённой задачи типа задачи Карлемана по скачку. Общее решение этой задачи имеет вид

$$\psi^+(z)=\sum_{j=1}^{æ}\frac{\beta_j}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi_j[\alpha(\tau)]}{\tau-z}d\tau+\beta_0, \tag{16}$$

β_0 - произвольная действительная постоянная, $\varphi_j(t)$ - решения интегральных уравнений Фредгольма $(L+\varphi)(t)=q_j(t)$.

Введём функции $W_0(z)\equiv 1$,

$$W_{2k-1}(z)=\frac{1}{z^k}+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi_{2k-1}[\alpha(\tau)]}{\tau-z}d\tau$$

$$W_{2k}(z)=\frac{1}{z^k}+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi_{2k}[\alpha(\tau)]}{\tau-z}d\tau. \tag{17}$$

Система $\{W_j(z)\}$, $j=0,1,...,$ æ, есть система линейно независимых функций, каждая из которых удовлетворяет краевому условию $W^+[\alpha(t)]-\overline{W^+(t)}=0$.

Используя обозначения (17) и формулы (16), (17) получаем общее решение однородной задачи (8) в случае, когда

$$æ = 2m = \frac{1}{2\pi}\{\arg G(t)\}_\Gamma > 0$$

$$\varphi_1^+(z) = z^{\frac{æ}{2}}\chi_0^+\sum_{j=0}^{æ}\beta_j W_j(z). \qquad (18)$$

б) Пусть $m \le 0$. Тогда функция $\dfrac{\varphi^+(z)}{z^{\frac{æ}{2}}\chi_0^+(z)}$ является аналитической в D^+ и при $m = \dfrac{æ}{2} < 0$ обращается в нуль в начале координат.

Следовательно, к краевой задаче (12) при $m \le 0$ применима лемма, утверждающая (краевые задачи $\varphi_1^+[\alpha(t)] = \lambda\overline{\varphi_2^+(t)}$, $\lambda = \pm 1$ и не имеет в D^+ других решений, кроме постоянных), согласно которой имеем:

$$\frac{z^{\frac{æ}{2}}\varphi_1^+(z)}{\chi_0^+(z)} = c, \qquad (19)$$

c -действительная постоянная. Если $æ = 0$, то из (19), находим $\varphi_1^+(z) = c\chi_0^+(z)$, то есть получаем уже найденное выше общее решение однородной задачи (8) с равным нулю индексом коэффициента $G(t)$. Это решение очевидно, содержится и в формуле (18). Если $æ < 0$, то левая часть (19) при $z = 0$ обращается в нуль. Следовательно, $c = 0$ и $\Phi_1^+(z) \equiv 0$.

В результате исследований, получим вывод:
при $æ = 2m < 0$, однородная задача (8) не имеет нетривиальных решений.

В итоге, доказана следующая теорема:

Теорема. Если $æ = \dfrac{1}{2\pi}\{\arg G_2(t)\} = 2m$, тогда, число линейно независимых решений внутренней однородной краевой задачи вида Карлемана, вычисляется по формуле $\ell = \max(0, æ+1)$.

Все нетривиальные решения задачи могут быть найдены по следующей формуле:

$$\varphi(z) = \prod_{r=1}^{I}(z-\tau_r)^{dr}\cdot z^{\frac{æ}{2}}\chi_0^+(z)\sum_{j=0}^{æ}\beta_j W_j(z).$$

Литература

1. Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнения и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Изд-во: АН Тадж. ССР, Душанбе, 1963, - с. 183.

2. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. Москва, 1977, - с. 448.

ҲАЛЛИ МАСЪАЛАҲОИ КАНОРИИ ДОХИЛИИ СИНГУЛЯРИИ ЯКҶИНАСИ НАМУДИ КАРЛЕМАН БО КОЭФФИСИЕНТҲОИ НОЛ ҚУТБИИ АНАЛИТИКӢ ДОШТА

Усмонов Н., Шодмонов М.У.
Донишгоҳи давлатии молия ва иқтисоди Тоҷикистон

Аннотатсия. *Дар мақолаи мазкур ҳалли масъалаҳои канории якҷинсаи дохилии сингулярии намуди Карлеман бо нулҳо ва қутбҳое, ки характери аналитикӣ – ҳамроҳшуда доранд, тадқиқ карда мешавад. Мақсади асосии тадқиқот муайян намудани таъсири нулҳо ва қутбҳо ба шумораи ҳалҳои хаттӣ- новобаста мебошад.*
Калидвожаҳо: *қутб, шарти Гёлдер, ҷаҳиш, ҳолати сингулярӣ, индекс, функсияи каноникӣ, масъалаи якҷинса, масъалаи дохилӣ.*

SOLUTION OF THE SAME INTERNAL MATTERS, SINGULAR TYPE OF KARLEMAN WITH ZERO AND POLE OF CONJUGATE-ANALYTICAL CHARACTER

N. USMANOV, M. U. SHADMANOV
Tajik State University of Finance and Economics

Annotation. *The solution of the same internal matters, singular type of Karleman, coefficients and the integrated analytical pole is investigated in the article. The main objective of the study is to identify the effects of zeros and poles in the solution of the same matter.*
Keywords: *pole, the condition of Goulder, pound, singular state, zip code, canonical function, the same matter, internal mater.*

Сведения об авторах: **Усманов Нурулло** *– д.ф.м.н., профессор кафедры высшей математики. Таджикский государственный финансово-экономический университет.*
Шадманов Мирали Уракбайевич *- к.ф.-м.н., старший преподаватель кафедры высшей математики, Таджикский государственный финансово-экономический университет. Телефон: (+992) 777 07 18 65.*

УДК 54.064

ВАРИАЦИЯ СОДЕРЖАНИЯ ТЯЖЕЛЫХ МЕТАЛЛОВ (Pb, Zn и As) В ПРОБАХ ПОЧВ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЧАСТИ СОГДИЙСКОЙ ОБЛАСТИ

Абдуллаев С.Ф., Рахматов М.Н.

Физико-технический институт имени С.У. Умарова НАНТ[1]

Худжандский государственный университет имени академика Б.Гафурова[2]

Аннотация. *В статье представлены результаты вариации статистических характеристик содержания тяжелых металлов (Pb Zn и As) в пробах атмосферного аэрозоля и почв центральной части Согдийской области. Установлено, что в составе атмосферного аэрозоля в центральной части Согдийской области содержания указанных тяжелых металлов больше, чем в почве.*

Ключевые слова: *рентгенофлуоресцентный анализ, спектроскан-МАКС-G, пробы аэрозоля, пробы почв, свинец, цинк, мышьяк.*

Определение содержания тяжелых металлов в почвах и аэрозолях уже давно широко используется в геохимических исследованиях [1-5].

На современном этапе химико-геоэкологические исследования носят комплексный, системный характер, охватывающий различные стороны исследуемого процесса. При этом отмечается значительный рост количества информации, что существенно усложняет ее анализ. Так как атмосферный аэрозоль и почва описывается большим числом параметров и множеством внутренних взаимосвязей, то для его изучения часто используют метод наименьших квадратов (МНК) [3-6]. Статистическую обработку результатов проводили стандартными методами с использованием возможностей программы.

Целью настоящей работы было исследование тяжелых металлов (Pb, Zn и As) в пробах почв и сравнения с пробами аэрозоля отобранных в центральной части Согдийской области.

Описание мест отбора проб, включая координаты и время сбора, приведено в [5-8]. Отбор и подготовку проб для анализа проводили в соответствии с нормативными документами [10-12]. Определение содержания тяжелых металлов (Pb, Zn и As) в пробах проводилось рентгенфлуоресцентным методом на спектроскане МАКС-G. Управление процессом измерения и обработка полученной информации производилась с помощью компьютера с установленным программным обеспечением [9].

В центральной части Согдийской области в пробах атмосферного аэрозоля обнаружены более высокие концентрации тяжелых металлов что больше, чем в почве. Например, среднее содержание свинца в пробах аэрозоля (162.3 ppm) в 6 раз выше, чем в почве (см. рис. 1). Согласно [7, 13] свинец выделяется при

сжигании твёрдого и жидкого топлива и поступает в воздух с выхлопными газами автотранспорта, из осадков коммунальных и промышленных сточных вод, а также инсектициды, в состав которых он входит.

Источником свинца является цементное производство, воды (включая подземные), транспорт (за счёт износа тормоза и шин), сжигания: биомассы, нефти и угля, биологических материалов, растительности и пластики.

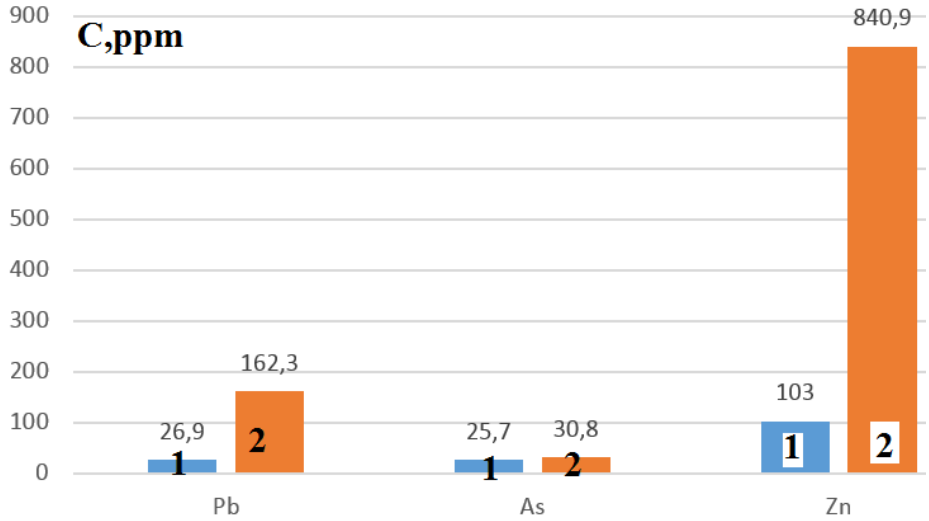


Рисунок 1. Распределение элементов в пробах почв (1) и аэрозоля (2).

Содержание мышьяка в составе аэрозоля (30.8 ppm) и почв (25.7 ppm) почти одинаково. Анализ литературных данных [13, 14] показывает, что в настоящее время более 300 арсенатов и минералов идентифицировано, закрепляющих мышьяк. Часть содержания мышьяка включается в промышленные циклы, и затем, благодаря растворению минералов, поступает в атмосферу и почву. Техногенными источниками поступления As в атмосферу являются медеплавильные цеха (40 %), ТЭС (20 %), сельское хозяйство (10 %). ТЭС является основным источником загрязнения атмосферы мышьяком. После сжигания углей As с частицами аэрозоля субмикронного (d<1 мкм) и супермикронного размера [2] выбрасывается в атмосферу. Источником мышьяка являются воды (включая подземные), сжигания: нефти и угля, биологических материалов и растительности.

Среднее содержание Zn (840.9 ppm) в пробах атмосферного аэрозоля (АА) в центральной части Согдийской области – в 8.16 раз выше, чем в почве. В центральной части Согдийской области основными источниками выбросов цинка, приводящих к опасному загрязнению атмосферы и почвы, являются выбросы автотранспорта, промышленные предприятия и поверхность открытых хвостохранилищ горнодобывающих предприятий региона, а также бытовые

отходы (например, оцинкованная жесть, хозяйственно-бытовая посуда). Также источником Zn в почвах служат почвообразующие породы.

Источником цинка является промышленность, воды (включая подземные), транспорт (за счёт износа тормозной системы и шин), сжигания: биомассы, нефти и угля, биологических материалов и пластики.

Результаты исследований, проведенных на территории центральной части Согдийской области на содержание тяжелых металлов (Pb, Zn и As) в пробах почв и атмосферного аэрозоля, представляют межгодовой ход в виде гистограммы (рис. 2). На рис. 2 приведено сравнение межгодового хода содержания ТМ в пробах почв и АА. Видно, что самая высокая средняя концентрация Pb в пробах атмосферного аэрозоля обнаружена в 2020 году (рис. 2а). Самая низкая средняя концентрация свинца наблюдалась в 2017 г (72.6 ppm). В пробах почв самое высокое содержание Pb выявлено в 2018 году. Среднее содержание Pb - в пробах АА (94.3 ppm) в 2013 году – в 3.2 раз выше, чем в пробах почв (50.9 ppm).

Северный Таджикистан по характеру антропогенного загрязнения в настоящее время относится к числу регионов, для которых уровень техногенной нагрузки определяется как геологическими особенностями, так и дальним трансграничным переносом, а также осадками коммунальных и промышленных сточных вод, в состав которых входит свинец.

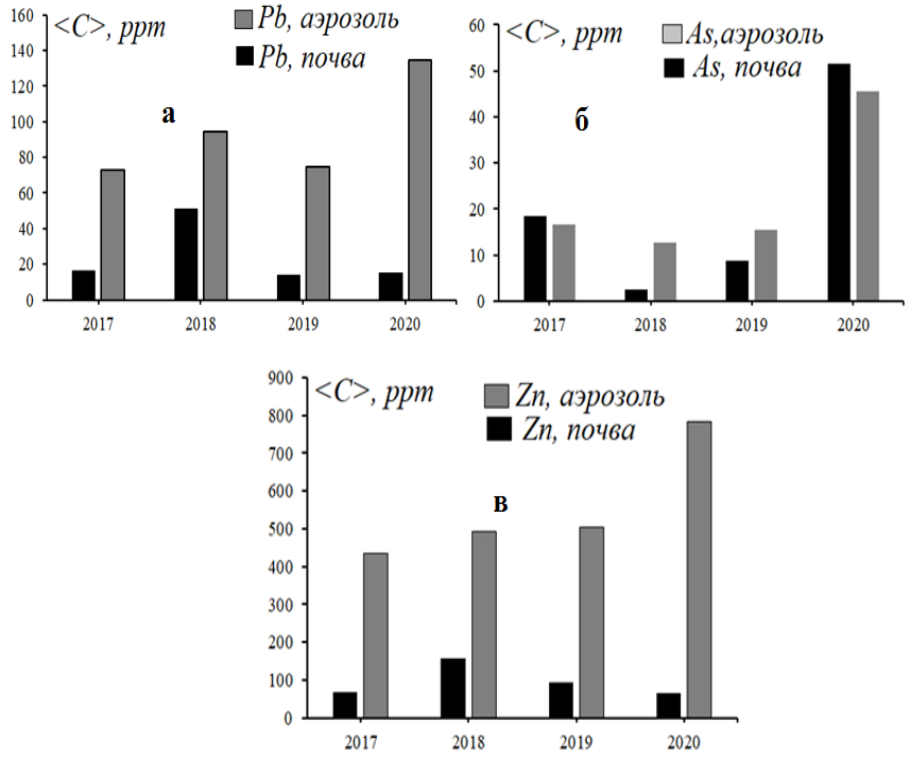


Рисунок 2. Межгодовой ход концентрации Pb (а), As (б) и Zn (в) в атмосферном аэрозоле и почвах Северного Таджикистана.

Межгодовая вариация содержания As в пробах почв и АА почти одинакова (рисунок 2б). По данным исследований самая высокая средняя концентрация мышьяка (45.64 ppm) в пробах АА отмечена в 2020 году. Максимальное среднее содержание мышьяка (51.64 ppm) в пробах почв зафиксировано в 2020 г., минимальное значение (2.63 ppm) – в 2018 г.

Межгодовой ход средних по центральной части Согдийской области концентраций Zn, исследованных в пробах пылевого аэрозоля и почв (рисунок 2в) показывает, что наибольшее содержание цинка в пробах атмосферного аэрозоля (783.26 ppm) – было обнаружено в 2020 г. Максимальное среднее содержание кобальта (156.9 ppm) в пробах почв зафиксировано в 2018 году.

Математическую обработку экспериментальных результатов проводили по следующим формулам:

Среднее значение $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n_i}$ где $\sum x_i -$ сумма отдельных результатов измерений; $n_i -$ число измерений. Среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}(x_i - \bar{x})^2}{(n-1)}},$$

где $\sum(x_i - \bar{x})^2 -$ сумма квадратов отклонений от среднего значения; *(n-1)*- число измерений, уменьшенное на единицу. Коэффициент вариации V = $\frac{\sigma}{\bar{x}}$ это отношение стандартного отклонения к среднему. Погрешность оценки среднего: $S_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, где σ – среднеквадратическое отклонение, $n -$ число измерений, геохимический индекс загрязнения (I=ln(2x/3x_{min})/0.693, отношение концентрации – (D=C_i/C_{min}), $\delta = (t_c \cdot \sigma/\sqrt{n}) -$ доверительный интервал, коэффициент Стьюдента t_c, который зависит от количества измерений и находится по таблице расчётов погрешности среднего выборочного значения.

Таблица 1. Вариационно-статистические данные содержания ТМ в пробах почв

Параметр	Pb	As	Zn
<C>	26.90	19.48	103.04
C_{max}	246.16	63.36	392.70
C_{min}	3.13	0.89	27.83
σ	30.33	14.34	44.96
V	1.13	0.74	0.44
S_n	1.12	0.53	1.67
I	2.52	3.86	1.30
D	78.67	71.01	14.11
t_c	3.57	3.57	3.57
δ	20.85	9.86	30.91

Выводы. Установлено, что в составе атмосферного аэрозоля в центральной части Согдийской области содержания ТМ (Pb, Zn и As) больше, чем в почве. Например, среднее содержание Pb в пробах аэрозоля (162.3 ppm) в 6 раз выше, среднее содержание Zn (840.9 ppm) – в 8.16 раз выше, среднее содержание As (30.8 ppm) – в 1.19 раза выше, чем в почве. Коэффициент корреляции этой зависимости соответствует r = 0.87. Установлено, что самая высокая средняя концентрация Pb в пробах атмосферного аэрозоля обнаружена в 2020 году. Самая низкая средняя концентрация свинца наблюдалась в 2017 г (72.6 ppm). В пробах почв самое высокое содержание Pb найдено в 2018 году. По данным исследований самая высокая средняя концентрация мышьяка (45.64 ppm) в пробах АА отмечена в 2020 году. Максимальное среднее содержание мышьяка (51.64 ppm) в пробах почв зафиксировано в 2020 г., минимальное значение (2.63 ppm) – в 2018 г. Максимальная средняя концентрация цинка в пробах почв отмечена в 2018 года (156.9 ppm). Самое высокое среднее содержание никеля в пробах аэрозоля отмечено в 2020 году (783.26 ppm).

Литература

1. Грин, Х. Аэрозоли - пыли, дымы и туманы, пер. с англ. / Х.Грин, В. Лейн // Химия - Л. -1969. - 427 с.
2. Кондратьев,К.Я. Влияние аэрозоля на перенос излучения: возможные климатические последствия / К.Я. Кондратьев, О.Б. Васильев, Л.С. Ивлев и др. //. - Л.: -Изд-во Ленинградский университет. - 1973. - 266 с.
3. Крамер, Г. Математические методы статистики. - М.: Мир, 1975. - 650 с.
4. Абдуллаев, С.Ф. Элементный состав почв и пылевого аэрозоля юго-центральной части Таджикистана. / С.Ф. Абдуллаев, В.А. Маслов, Б.И. Назаров, У. Мадвалиев, Т. Давлатшоев // Оптика атмосферы и океана. - 2015. - т. 28. - № 03. - С. 246-255.
5. Кожевникова М.Ф. Идентификация источников загрязнения: вычислительные методы / М.Ф. Кожевникова, В.В. Левенец, И.Л. Ролик // Вопросы атомной науки и техники. -2011,- Т.19. - №6. - С.149-156.
6. Рао, С. Р. Линейные статистики методы и их применение. М.: Наука. - 1968. – 550 с.
7. Назаров Б.И., Абдуллаев С.Ф., Маслов В.А. Атмосферный аэрозоль Центральной Азии. Душанбе: Дониш, 2017. 416 с. ISBN 978-99975-55-36-6.
8. Абдуллаев С.Ф., Маслов В.А., Расулзода Х.Х., Рахматов М.Н. // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2018. № 1. С. 77-89.
9. Рахматов М.Н., Абдуллаев С.Ф., Маслов В.А., Расулзода Х.Х. Элементный состав атмосферного аэрозоля и почв северного Таджикистана // Учёные записки ХГУ, № 3(46), 2018.С.56-62.
10. РД 52.04.186-89. Руководство по контролю атмосферы. Введение 1991-07-01. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 615 с.

11. ГОСТ 17.4.2.01-81. Охрана природы. Почвы. Охрана природы (ССОП). Номенклатура показателей санитарного состояния (с Изменением N 1). М.: Стандартинформ, - 2008. - 14с
12. ГОСТ 17.4.4.02-84. Охрана природы. Почвы. Охрана природы (ССОП). Почвы. Методы отбора и подготовки проб для химического, бактериологического, гельминтологического анализа. М.: Стандартинформ, -2008. – 18с.
13. Дабахов М. В. Экотоксикология и проблемы нормирования / М. В. Дабахов, Е. В. Дабахова, В. И. Титова. Н. Новгород: Изд-во ВВАГС. - 2005. -165 с.
14. Водяницкий Ю.Н., Ладонин Д.В., Савичев А.Т. Загрязнение почв тяжелыми металлами. // М.: -Изд-во Почвенный ин-т им. В.В. Докучаева РАСХН. - 2012. -306 с.

ТАҒЙРЁБИИ МЕТАЛЛҲОИ ВАЗНИН (Pb, Zn ва As) ДАР ТАРКИБИ НАМУНАҲОИ ХОКИ МИНТАҚАИ МАРКАЗИИ ВИЛОЯТИ СУҒД

Абдуллоев С.Ф.[1], Раҳматов М.Н.[2]
ИФТ ба номи С.У.Умарови АМИТ[1]
ДДХ ба номи акад. Бобоҷон Ғафуров[2]

Аннотатсия. *Дар мақола тағйирёбии характеристикаҳои статистикии мавҷудияти металлҳои вазнини дараҷаи хатарнокиашон 1-ум (Pb Zn ва As) дар намунаҳои аэрозоли атмосферӣ ва хокҳои қисмҳои марказии вилояти Суғд омӯхта шудаанд. Муқаррар карда шудааст, ки дар кисми марказии вилояти Суғд мавҷудияти металлҳои вазнини дараҷаи 1-уми хатарнокӣ дар таркиби аэрозоли атмосферӣ нисбат ба хок зиёдтар аст. Бо мақсади ҳосил кардани маълумоти саҳеҳ коркарди статистикии натиҷаҳои ченкунӣ гузаронида шудааст.*
Калидвожаҳо: *таҳлили флуоресценсияи рентгенӣ, спектроскан-MAKS-G, намунаҳои аэрозол, намунаҳои хок, сурб, руҳ, арсеник.*

VARIATION OF THE CONTENT OF HEAVY METALS (Pb, Zn and As) IN SOIL SAMPLES IN THE CENTRAL PART OF THE SOGD REGION

Abdullaev S.F., Rakhmatov M.N.
Umarov Physical Technical Institute NAST[1]
Khujand State University named after acad. Bobojon Gafurov[2]

Annotation.*The article studies variations in the statistical characteristics of the content of the 1st hazard class of heavy metals (Pb Zn and As) in samples of atmospheric aerosol and soils in the central part of the Sughd region. It was found that in the composition of atmospheric aerosol in the central part of the Sughd region, the content of the 1st hazard class of heavy metals is higher than in the soil. In order to obtain reliable data, statistical processing of the measurement results was carried out.*
Keywords: *X-ray fluorescence analysis, spectroscan-MAKS-G, aerosol samples, soil samples, lead, zinc, arsenic.*

Сведения об авторах**: Абдуллаев Сабур Фузайлович**, д.ф.-м.н., профессор, заведующий лабораторией физики атмосферы Физико-технического института им. С. У. Умарова НАНТ (Республика Таджикистан, г. Душанбе) Тел: (+992)934896014 E-mail: sabur.f.abdullaev@gmail.com

Рахматов Мухамади Нуридинович, преподаватель кафедры общей физики и твёрдого тела ХГУ имени академика Б.Гафурова, (РТ, г.Худжанд), тел: (+992)929431992 E-mail: muhamadi.rahmatov@yandex.ru

УДК 541.490+541.49

ИССЛЕДОВАНИЕ КАТАЛИТИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ ГИДРОКСОКОМПЛЕКСОВ ЖЕЛЕЗА С ЭНАНТИОМЕРАМИ ГЛУТАМИНОВОЙ КИСЛОТЫ В ПРОЦЕССЕ ОКИСЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКИ АКТИВНОГО СУБСТРАТА

Исмаилова М.А.[1], Камилов Х.Ч.[2]
Технологический университет Таджикистана[1]
Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе[2]

Аннотация. *Методом окислительного потенциала в водно-перхлоратных растворах глутаминовой кислоты установлено образование моноядерных, биядерных и трехядерных комплексов Fe(III) и Fe(II). Гетеровалентные соединения $Fe^{III}Fe^{II}L_2(OH)_x$ в растворах D– и L–глутаминовой кислоты являются катализатором окисления цистеина, причём каталитическая активность ионов железа в реакциях окисления L–цистеина молекулярным кислородом в присутствии D–глутаминовой кислоты больше, чем в присутствии L–энантомера.*

Ключевые слова: *каталитическая активность, комплексные соединения, глутаминовая кислота, цистеин, катализатор, субстрат.*

Координационные соединения ионов различных металлов с глутаминовой кислотой [1] обладают биологически активными свойствами.

Как известно, в состав белков находящихся в живых системах, входят оптически активные α-аминокислоты L–ряда, тогда как окисляемые субстраты (сахара) относятся к D–ряду [2, 3]. В связи с этим, изученный вопрос о наличии стереоспецифической активности аминокислот является очень важным. Учитывая вышеизложенное, представляется интересным исследование каталитической активности L – и D–аминокислот и поиск реакций, в которых L– и D–аминокислоты различались бы по каталитической активности.

Можно ожидать различие в каталитической активности ионов металлов с оптически активными α–аминокислотами в реакциях окисления оптически активных соединений (D– и L– субстратов) при условии, что как L– или D–субстрат, так и L– или D–α–аминокислота (катализатор) входят в координационную сферу иона металла.

Настоящая работа посвящена изучению процесса комлексообразования ионов железа разной степени окисления в водно-перхлоратных растворах глутаминовой кислоты методом окислительного потенциала [4, 5], а также

определению каталитического действия образующихся соединений в процессе окисления L-цистеина молекулярным кислородом, газометрическим методом [6].

Совместное рассмотрение экспериментальных зависимостей окислительного потенциала систем:

Fe(III) – Fe(II) – L-глутаминовая кислота – $Na(H)ClO_4$ – вода (1)

Fe(III) – Fe(II) – D-глутаминовая кислота – $Na(H)ClO_4$ – вода (2)

от pH, pC_{ox}, pC_{red} и pC_{HL}, согласно теории метода окислительного потенциала позволило заключить, что в зависимости от pH в растворах, содержащих различные оптические изомеры аминокислот, до pH<7.0, образуются идентичные по составу комплексные соединения Fe(III): $Fe^{III}L$, $Fe^{III}L_2$, $Fe_2^{III}L_4(OH)_x$, $Fe_3^{III}L_6(OH)_y$; Fe(II): $Fe^{II}L$, $Fe_2^{II}L_2(OH)_x$, в области pH 7.0–10.0 доминируют гетеровалентные соединения состава $Fe_2^{II}Fe^{III}L_2(OH)_x$. Область существования этих комплексов для систем с D – глутаминовой кислотой сдвинута в более щелочную область pH.

Кинетические исследования реакции окисления L–цистеина молекулярным кислородом в присутствии ионов железа(III) и D – и L – глутаминовых кислот показали, что максимальная каталитическая активность глутаминатных комплексов железа проявляется в области гетеровалентных комплексов, т.е. в интервале pH 7.0–10.0, причём образование этих комплексов с D–аминокислотой происходит в более щелочной области pH и согласуется с данными оксредметрических исследований. Каталитическая активность железа в реакциях окисления L–цистеина молекулярным кислородом в присутствии D–глутаминовой кислоты в области максимума каталитической активности заметно выше, чем в присутствии L–глутаминовой кислоты, что находится в соответствии с правилом «L – субстрат – D – катализатор» (или «L – катализатор – D – субстрат»), т.е. при окислении оптически активного субстрата (L – цистеин) более активной является энантиомерная по отношению к нему форма катализатора (D – катализатор).

Это явление, по видимому связано с тем, при вхождении в координационную сферу иона металла L – (или D –) субстрата и D – (или L –) катализатора получаются комплексы разного строения, повышение электронной плотности на ионе металла в связи с этим будет различным и, следовательно, должны различаться между собой скорости окисления L – и D – субстрата.

Кроме того, вхождение в координационную сферу иона металла катализатора, относящегося к D – ряду может препятствовать по стерическим соображениям вхождению субстрата D – ряда и способствовать вхождению в координационную сферу металла субстрата L – ряда.

Возможно также, что наличие лигандов (L – цистеин и – D – глутаминовая кислота) в противоположных энантиомерных формах в комплексе Fe(II, III) облегчает (при его участии) осуществление переноса электронов с цистеина на кислород.

Экспериментальная часть. Воду, служившую растворителем, подвергали специальной очистке от неорганических и органических примесей, обрабатывали активированным углем марки БАУ, фильтровали от угля и перегоняли. В качестве солей применяли перхлораты Fe(III) и Fe(II). Исходный эквимолярный раствор двух- и трёхвалентного железа готовили в $HClO_4$.

Для установления состава железоглутаматных комплексов использован оксредметрический метод [5]. Экспериментальные концентрационные зависимости окислительного потенциала (φ) системы железо(II) - железо(III) - D-, L-α-глутаминовые кислоты – вода сняты на установке [4] до pH=10. Изменение кислотности среды достигалось добавлением NaOH, $NaHCO_3$, $HClO_4$.

Опыты по окислению водного раствора цистеина молекулярным кислородом в присутствии ионов железа(III) и D-, L-α-глутаминовых кислот проведены в статической системе газометрическим методом [6]. Скорость окисления при разных значениях pH определялась по угловым коэффициентам кинетических кривых зависимости объёма поглощённого кислорода от времени.

НЕ ЗАВЕРШЕННАЯ СТАТЬЯ

Литература

1. Хьюз М. Неорганическая химия биологических процессов. М.: Мир, - 1983. – 444с.
2. Дюга Г., Пенни К. Биоорганическая химия. М.: Мир, - 1983. – 510с.
3. Исмаилова М.А., Координационные соединения железа с энантиомерами аспарагиновой кислоты./М.А. Исмаилова, Х.М. Якубов, Е.Я. Оффенгенден, А.Н. Астанина, Т.А. Кусаева, М.М. Рахимова. //Ж. общей химии, Т. 61, вып. 5. - 1991, - с. 1162-1166.
4. Якубов Х.М. Применение оксредметрии к изучению комплексообразования. Душанбе: изд-во АН Тадж ССР. – 1966. 131с.
5. Оксредметрия. /Под ред. Никольского и др.//Л-д.: - Химия 1975, 304с.
6. Астанина А.Н., Ларина Н.А., Масиси Веси, Руденко А.П.//Вест. МГУ, Сер.2 Химия. 1980. Т.2. №3. С 278-281.

ТАҲҚИҚИ ФАЪОЛИЯТИ КАТАЛИТИКИИ ГИДРОКСОКОМПЛЕКСҲОИ ОҲАН БО ЭНАНТИОМЕРҲОИ КИСЛОТАИ ГЛУТАМИНӢ ДАР РАВАНДИ ОКСИДШАВИИ СУБСТРАТИ АЗ ҶИҲАТИ ОПТИКӢ ФАЪОЛ

Исмоилова М.А.[1],Камилов Х.Ч.[2]

Донишгоҳи технологии Тоҷикистон[1]

Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар ш. Душанбе[2]

Аннотатсия. *Дар макола усули потенсиали оксидонӣ дар маҳлулҳои обии-перхлоратии кислотаи глутаминӣ ҳосилшавии комплексҳои моноядрой, биядрой ва сеядроии Fe(III) и Fe(II)муайян карда шудааст. Муайян карда шудааст, ки пайвастагии гетеровалентии $Fe^{III}Fe^{II}L_2(OH)_x$ дар маҳлулҳои D– ва L– кислотаи глутаминӣ катализатори оксидшавии систеин мебошад ва фаъолияти каталитикии ионҳои оҳан дар реаксияи оксидшавии L - систеин бо оксигени молекулӣ дар ҳузури кислотаи D – глутаминӣ нисбат ба ҳузури L – энантомер бештар мебошад.*

Калидвожаҳо: *фаъолияти каталитикӣ, пайвастаҳои комплексӣ, D–, L– кислотаи глутаминӣ, систеин,катализатор, субстрат.*

THE CATALYTIC ACTIVITY OF IRON HYDROXO-COMPLEXES WITH GLUTAMIC ACID ENANTIOMERS INVESTIGATION DURING THE OPTICALLY ACTIVE SUBSTRATE OXIDATION

Ismailova M. A.[1], Kamilov Kh.Ch. [2]
Technological University of Tajikistan[1]
Lomonosov Moscow State University in Dushanbe[2]

Annotation. *The formation of mononuclear, bionuclear and trionuclear Fe(III) and Fe(II) complexes was established by the method of oxidative potential in water-perchlorate solutions of glutamic acid. Heterovalent compounds $Fe^{III}Fe^{II}L_2(OH)_x$ in solutions of D - and L–glutamic acid are the cysteine oxidation catalyst, while the iron ions catalytic activity in the reactions of oxidation of L-cysteine with molecular oxygen in the presence of D-glutamic acid is greater than in the presence of L-enantomer.*

Keywords: *catalytic activity, complex compounds, glutamic acid, cysteine, catalyst, substrate.*

Сведения об авторах: **Исмаилова Масуда Ахмедовна** – к.х.н., доцент, Технологический университет Таджикистана, Республика Таджикистан, г.Душанбе, тел.: 234-56-72 E-mail: masuda_41@mail.ru.
Камилов Хуршед Чулибаевич – к.х.н., Филиал МГУ имени М.В.Ломоносова в городе Душанбе, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Бохтар 35/1, тел.: 935555369. E-mail: hurshedkamilov@rambler.ru

УДК 427.49

ПРОЦЕССЫ ИОНИЗАЦИИ ВАЛЕРИАНОВОЙ КИСЛОТЫ В ВОДНЫХ РАСТВОРАХ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ИОННЫХ СИЛАХ И ТЕМПЕРАТУРАХ

Камилов Х.Ч.[1], Исмаилова М.А.[2]
Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе[1]
Технологический университет Таджикистана[2]

Аннотация. *В статье приведены результаты исследования процесса ионизации валериановой кислоты при различных температурах в интервале ионных сил 0.1-1.0 моль/л и их термодинамические характеристики. По зависимости* pK_a *от ионной силы при разных температурах путём экстраполяции на нулевую ионную силу получены термодинамические константы ионизации* pK_a^T *валериановой кислоты. Рассчитаны значения термодинамических функций* ΔH° (ккал/моль), ΔG° (ккал/моль) *и* ΔS° (э.е.) *процесса ионизации валериановой кислоты при различных температурах и ионных силах.*
Ключевые слова: *ионизация, валериановая кислота, ионная сила, температура, термодинамические функции.*

Определение констант устойчивости в широком интервале температур и ионных сил для комплексных соединений трёхвалентного железа, образующихся в водных растворах валериановой кислоты с применением метода окислительного потенциала [1], предполагает знание констант ионизации этой кислоты в условиях, при которых исследуются процессы комлексообразования [2].

Настоящая работа посвящена определению величины констант ионизации валериановой кислоты в зависимости от температуры и ионной силы раствора.

Экспериментальная часть.

Диссоциация валериановой кислоты ($C_{HA} = 0{,}05 \div 0{,}1$ моль/л) исследовалась при температурах 298, 308, 318 и 328К в интервале ионных сил $0{,}1 \div 1{,}0$ моль/л ($NaClO_4$). Ионизация кислоты изучалась потенциометрическим методом. Способы титрования и расчёты проведены согласно источнику [3]. Значения pK_a кислоты с допустимой ошибкой $\pm$ 0.02 приведены в таблице 1.

Исследование процессов ионизации валериановой кислоты при пяти значениях ионной силы позволило нам проследить влияние ионной силы раствора на константу ионизации при различных концентрациях кислоты.

С увеличением ионной силы до 0.5М кислоты при постоянной температуре кислоты при всех изученных концентрациях уменьшается, а при дальнейшем повышении содержания фонового электролита до 1.0 М несколько возрастает.

Таблица 1. Значения pK_a валериановой кислоты при различных температурах и ионных силах

T,K / I, моль/л	C_{HA}, моль/л	298	308	318	328
0.05	0.01	4.80	4.84	4.88	4.95
	0.02	4.76	4.81	4.83	4.90
	0.05	4.69	4.71	4.75	4.80
	0.10	4.64	4.63	4.70	4.74
0.1	0.01	4.76	4.81	4.85	4.90
	0.02	4.71	4.76	4.81	4.83
	0.05	4.64	4.67	4.73	4.76
	0.10	4.60	4.63	4.67	4.70
0.2	0.01	4.70	4.76	4.80	4.86
	0.02	465	4.68	4.71	4.75
	0.05	4.63	4.65	4.67	4.71
	0.10	4.69	4.61	4.64	4.69
0.5	0.01	4.67	4.72	4.76	4.82
	0.02	4.62	4.65	4.70	4.75
	0.05	4.57	4.60	4.64	4.70
	0.10	4.55	4.57	4.61	4.67
1.0	0.01	4.75	4.82	4.88	4.90
	0.02	4.69	4.74	4.82	4.89
	0.05	4.61	4.66	4.73	4.76
	0.10	4.60	4.64	4.68	4.72

По зависимости pK_a при температурах 298, 308, 318 и 328К и $C_{HA} = 0{,}01M$ путём экстраполяции на нулевую ионную силу получены термодинамические константы ионизации pK_a^T валериановой кислоты. Полученные значения термодинамических констант находятся в хорошем согласии со значениями констант ионизации валериановой кислоты, вычисленными нами при $C_{HA} = 0{,}01M$ и $I = 0{,}05 \div 0{,}5M$ с использованием уравнения Дэвиса.

При повышении температуры pK_a валериановой кислоты при всех ионных силах увеличивается.

Таблица 2. Значения pK_a^T валериановой кислоты при различных температурах.

Т, °К	298	308	318	328
Графическая экстраполяция	4.83	4.88	4.93	4.99
По Дэвису	4.81	4.86	4.90	4.97

Значения ΔH^o ионизации валериановой кислоты для каждой температуры и ионной силы растворов, а изменение свободной энергии ΔG^o и энтропии ΔS^o вычислены по уравнениям (1) и (2) и представлены в таблице 3:

$$\Delta G^o = -RTln K_{уст} \quad (1)$$

$$\Delta G^o = \Delta H^o - T\Delta S^o \quad (2)$$

Таблица 3. Значения термодинамических функций ΔH^o (ккал/моль), ΔG^o (ккал/моль) и ΔS^o (э.е.) процесса ионизации валериановой кислоты при различных температурах и ионных силах

Т, °К	I, моль/л / т/д.ф.	0.05	0.1	0.2	0.5	1.0
298	ΔG^o	-1.5	-1.3	-1.2	-1.2	-1.1
	ΔH^o	-27	-26	-26	-26	-26
	ΔS^o	6.52	6.46	6.36	6,34	6.37
308	ΔG^o	-2.1	-2.1	-2.0	-2.0	-1.1
	ΔH^o	-28	-28	-28	-28	-28
	ΔS^o	6.79	6.75	6.63	6,62	6,78
318	ΔG^o	-2.3	-2.3	-2.3	-2.2	-1.7
	ΔH^o	-30	-28	-29	-29	-29
	ΔS^o	7.07	7.02	6.90	6.88	7,09
328	ΔG^o	-2.6	-2.5	-2.4	-2.4	-2.3
	ΔH^o	-31	-30	-30	-30	-31
	ΔS^o	7.40	7.33	7.24	7.20	7.41

Из полученных данных следует, что при всех значениях ионной силы в интервале 298-328К процесс ионизации валериановой кислоты протекает с выделением теплоты. Увеличение ионной силы приводит к некоторому уменьшению экзотермичности.

Выводы.

Изменение энтропии ионизации валериановой кислоты с ростом температуры становится более отрицательным для каждого значения ионной силы, а изменение свободной энергии данного процесса - более положительным. Возрастание ионной силы раствора валериановой кислоты до 0.1 М при постоянстве температуры практически не влияет на величину ΔS^o.

Такие изменения термодинамических характеристик процессов ионизации под действием температуры и ионной силы раствора, очевидно связаны с изменением структуры растворителя под действием ионов фона и температуры. Полученные отрицательные значения ΔS^o показывают, что с ростом температуры большее влияние имеет организующая роль ионов фона по отношению к молекулам воды, что приводит к упорядоченности структуры раствора валериановой кислоты. Уменьшение энтропии ионизации кислоты с повышением температуры также может быть связано с тем, что валериановая кислота находится в виде устойчивых димеров, которые не разрушаются с ростом температуры [4].

Литература

1. Никольский Б.П. Оксредметрия. /Никольский Б.П., Пальчевский В.В., Пендин А.А., Якубов Х.М.//Л-д.: Химия 1975. - С. 129-218.
2. Исмаилова М.А. Координационные соединения железа с анионами н-валериановой и изовалериановой кислот.// Исмаилова М.А., Камилов Х.Ч. //Труды ТУТ, - Вып.Х. - Ирфон. – 2004. - С. 134-139.
3. Альберт А., Сержент Е./ Константы ионизации кислот и оснований. Перевод с англ. Под ред. Б.А. Порай-Кошица.//М.-Л-д.: Химия. – 1984. – 179с.
4. Nash G.R., Monk C.B./J. Chem.Soc., 1957, №10, – p. 4274-4280.

РАВАНДҲОИ ИОНИЗАТСИЯИ КИСЛОТАИ ВАЛЕРАТ ДАР МАҲЛУЛҲОИ ОБӢ ДАР ҚУВВАҲОИ ИОНӢ ВА ҲАРОРАТҲОИ ГУНОГУН

Камилов Х.Ч.[1], Исмоилова М.А.[2]

Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар ш. Душанбе[1]

Донишгоҳи технологии Тоҷикистон[2]

Аннотатсия. *Дар мақола натиҷаи таҳқиқи ионизатсияи кислотаи валерат дар ҳароратҳои гуногун ва ҳудуди қувваи иони 0,1 -1,0 мол/л ва характеристикаҳои термодинамикии он оварда шудааст. Аз вобастагии* pK_a *ба қувва ионӣ дар ҳароратҳои гуногун дар натиҷаи экстраполятсияба қувваи иониии сифрӣ константаҳои термодинамикии ионизатсияи кислотаи валерат муайян карда шудаанд. Қимати функсияҳои термодинамикӣ* ΔH^o (ккал/мол), ΔG^o (ккал/мол) *и* ΔS^o (в.э.) *раванди ионизатсияи кислотаи валерат ҳисоб карда шудааст.*

Калидвожаҳо: *ионизатсия, кислотаи валерат, қувваи ионӣ, ҳарорат, функсияҳои термодинамикӣ.*

VALERIAN ACID IONIZATION PROCESSES IN AQUEOUS SOLUTIONS AT DIFFERENT IONIC FORCES AND TEMPERATURES

Kamilov Kh.Ch.[1], Ismailova M.A.[2]
Lomonosov Moscow State University in Dushanbe[1]
Technological University of Tajikistan[2]

Annotation. *The article presents the results of the ionization process of valerian acid investigation at different temperatures in the ionic forces range of 0.1-1.0 mol/l and their thermodynamic characteristics. The thermodynamic ionization constants of valerian acid were obtained by extrapolation to the zero ionic force based on the dependence of* pK_a^T *on the ionic force at different temperatures. The values of thermodynamic functions* $\Delta H^\circ\ (kcal/mol)$, $\Delta G^\circ\ (kcal/mol)$ *и* $\Delta S^\circ\ (E.E.)$ *of the ionization process valerenic acid at different temperatures and ionic strengths are calculated.*

Keywords: *ionization, n-valeric acid, ionic strength, temperature, thermodynamic functions.*

Сведения об авторах: **Камилов Хуршед Чулибаевич** – к.х.н., Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе, тел.: 935555369. E-mail: hurshedkamilov@rambler.ru.
Исмаилова Масуда Ахмедовна – к.х.н., доцент. Технологический университет Таджикистана, г.Душанбе, E-mail: masuda_41@mail.ru.

УДК 547.493

СИНТЕЗ АЛКИЛОВЫХ ЭФИРОВ 1,4-БЕНЗОДИОКСАН-6-СУЛЬФОКИСЛОТЫ

Ташбаев Г.А., Тохиров Д.Д., Рахмонов Р.О.
Институт химии имени В. И. Никитина НАНТ

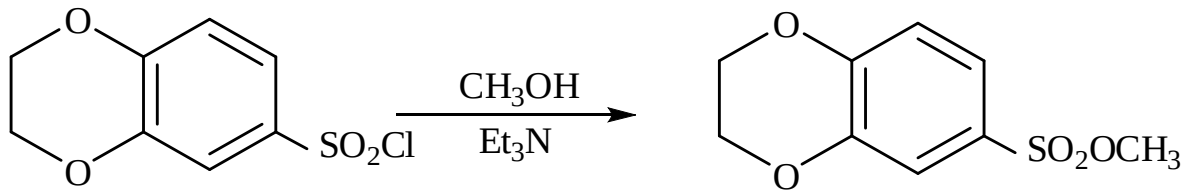
Аннотация. *В работе описаны взаимодействия 1,4-бензодиоксан-6-сульфохлорида с алканолами, синтезированы сульфонаты ряда 1,4-бензодиоксана.*
Ключевые слова: *1,4-бензодиоксан, 1,4-бензодиоксан-6-сульфохлорид, сульфонаты, алканолы, сульфонилирование.*

Химия 1,4-бензодиоксана интенсивно развивается и данному вопросу посвящены ряд публикаций, например, обзоры [1-3] и монография [4].

Нами были исследованы реакции Манниха со вторичными аминами [5, 6] и тиометилирование 1,4бензодиоксана [7], получены соответствующие амины и сульфиды, также исследованы реакции оксиметилирования 1,4 бензодиоксана с фирмальдегидом [8-10] альдегидами [11, 12] и кетонами [13, 14] алифатического и ароматического рядов, синтезированы соответствующие карбинолы. Кроме этого, исследовано взаимодействие 1,4-бензодоксан-6-сульфлхорида вторичными аминами и с высоким выходом синтезированы сульфонамиды данного ряда [15, 16].

Продолжая работу в данном направлении, целесообразно было исследовать ряд соединений производных 1.4-бензодокси-6-сульфохлорда с некоторыми органическими соединениями азота и кислорода.

Данная работа посвящена исследованию возможности взаимодействия 1,4-бензодиоксан-6-сульфохлорида с предельными спиртами. Реакция 1,4-бензодиоксан-6-сульфохлорид (1) с метанолом в присутствии триэтиламина с хорошим выходом образует метиловый эфир 1,4-бензодиоксан-6-сульфокислоты (**2**). Реакция проходит в соотношении реагирующих веществ 1:1 при температуре 10-15^{o}C, в течение часа.

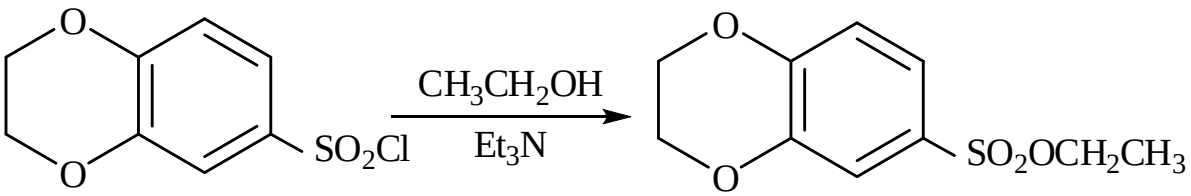


1 **2**

Структуру сульфоната **2** установили ИК- и ПМР-спектральным анализом. В спектре ИК сульфонада **2** имеются полосы поглощения в области 860, 890, 920 см$^{-1}$, подтверждающие трёхзамещенное бензольное кольцо. Полосы поглощения в области 1140, 1330 см$^{-1}$ - наличие сульфоногруппы и полосы поглощения в области 1030 см$^{-1}$ - наличие связи эфира. Кроме того, имеются полосы поглощения метиленовой в области 1465 см$^{-1}$ группы.

В ПМР спектре соединений **3** имеются химические сдвиги протонов метильной группы при 2.34 м.д., метиленовой группы - при 4.28 м.д., а ароматических протонов - при 6.76, 6.68 и 7.90 м.д.

Взаимодействие сульфохлорида **1** с абсалютным этиловым спиртом в присутствии основания-триэтиламина также легко происходит и с хорошим входом образует этиловый эфир 1,4-бензодиоксан-6-сульфокислоы (**3**).



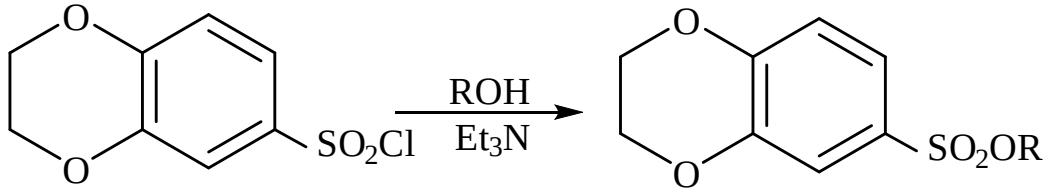
1 **3**

Структура сульфоната **3** установлена ИК- и ПМР-спектральным анализом. В спектре ИК сульфонада **3** имеются полосы поглощения в области 860, 890, 920 см$^{-1}$, подверждающие трехзамещенные бензольные кольца, полосы поглощения в области 1140, 1330 см$^{-1}$, наличие сульфоногруппы и полосы поглощения в

области 1030 $см^{-1}$ наличие связи эфира. Кроме того, имеются полосы поглощения метиленовой группы в области 1465 $см^{-1}$.

В ПМР спектре соединений **3** имеются химические сдвиги протонов метильной группы при 2.34 м.д., метиленовой группы - при 3.16 и 4.28 м. д., а ароматических протонов - при 6.76, 6.68, 7.90 м. д.

Также было исследовано взаимодействие сульфохлорид изопропила с бензиловыми спиртами, получены сответствуюшие эфиры 1,4-бензодиоксан-6-сульфокислоты (**4, 5**).



1 **4, 5**

R = $CH(CH_3)_2$ (**4**), $CH_2C_6H_5$ (**5**)

Структуры эфиров **4**, **5,** как и предыдущих соединений установлены методами ИК- и ПМР-спектральными анализами.

Таблица 1 - Свойства соединений 2-5

№	Вы-ход	Т. кип	Т. пл.	R_f	найдено			Брутто формулы	вычислено		
	%	°C	°C	бз-дн	C	H	S		C	H	S
2	87	78	-	0.38	46.84	4.42	13.88	$C_9H_{10}O_5S$	46.96	4.35	13.91
3	73	86	-	0.37	49.02	5.04	12.98	$C_{10}H_{12}O_5S$	49.18	4.92	13.11
4	89	94	-	0.40	51.04	5.36	12.47	$C_{11}H_{14}O_5S$	51.16	5.43	12.40
5	90	-	69-70	0.42	58.68	4.42	10.52	$C_{15}H_{14}O_5S$	58.82	4.57	10.46

№	ИК, λ, $см^{-1}$	ПМР, δ, м.д.
2	860, 890, 920 (аром), 1140, 1330 (SO_2), 1465 (CH_2), 1455 (CH_3)	2.34 (3H, CH_3); 4.28 (4H, CH_2); 6.68, 6.76, 6.90 (3H, CH)
3	860, 890, 920 (аром), 1140, 1330 (SO_2), 1465 (CH_2), 1455 (CH_3)	2.34 (3H, CH_3); 3.16, 4.28 (6H, CH_2); 6.68, 6.76, 6.90 (3H, CH)
4	850, 890, 910 (аром), 1140, 1330 (SO_2), 1465 (CH_2), 1455 (CH_3)	2.30 (3H, CH_3); 3.21, 4.28 (6H, CH_2); 6.68, 6.76, 6.90 (3H, CH)
5	770, 790, 850, 890, 910 (аром), 1140, 1330 (SO_2), 1465 (CH_2), 1455 (CH_3)	2.30 (3H, CH_3); 3.21, 4.28 (6H, CH_2); 6.68, 6.76, 6.90, 7.74, 7.86 (8H, CH)

Ход реакции и чистоту синтезированных соединений контролировали методом ТСХ на пластинке Silufol проявлением парами йода. Жидкие продукты очищали перегонкой, кристаллизацией из этанола. Выявлено, что полученные

соединения в воде нерастворимы, растворяются в этаноле, бензоле, эфире тетрагидрофуране и диоксане.

Литература

1. Даукшас ХГС. 1975, № 9, - с. 1155-1171.
2. Pilkington L., and Barker D - Synthesis and biology of 1,4-benzodioxane lignan natural products, Nat. Prod. Rep., 2015, **32**, 1369-1388.
3. Ahmed B., Habibullah, Khan S. – Organic Chem. An. Indian J., 2008, **4**, 65-72.
4. Ташбаев Г. А., Химия 1,4-бензодиоксана, Душанбе, Дониш, 2018, 168 с.
5. Ташбаев Г.А. , Турдиалив М. - Аминометилирование бензо-1,4-диоксана, Материалы международной конференции "Химия производных глицерина: синтез, свойства и аспекты их применения", Душанбе, 2011, с.25-26.
6. Ташбаев Г.А.,- Турдиалив М., Тухтасунов О. - Синтезы 6(N,N-диалкил)аминометилбензо-1,4диоксан. // Известия АН РТ. Таджикистан, отд. физ.-матем., хим, геол.и техн наук, 2014, - № 2, - с. 42-45.
7. Турдиалиев М. З., Ташбаев Г.А. - Синтез тио- и сульфометилировние 1,4-бензоди-оксана их биологичекая актиность, Материалы международной научно-практческой конференции Фундаментальные основы иновационного развития науки и образовния, Душанбе, 2020, - том. 3, - с. 470-472.
8. Ташбаев Г. А., Сафаров Д., Тохиров Д. Д. Синтез и исследование реакции этерификации 6-гидроксиметил-1,4-бензодиоксана, Международная конференция, «Инноационнок развитие в нефтегазой промыщлен-ности, современная энергетика и их актуальние проблемы», Ташкент, 2020, - с. 366-367.
9. Ташбаев Г..А., Д. Сафаров, Д. Д. Тохиров - Синтез и исследование реакции этерефикации 6-гидроксиметил-1,4-бензодиоксана, Актуальные вопросы органической химии и биотехнологии, Екатеринбург, Россия, 2020, 232-233.
10. Tashbaev G. A.,Safarov D., Abdullaev T. H., - The Study of the Reaction of Oxymethylation of 1,4-benzodioxane and further ication, Scientific Bulletin Series: Chemical Research, 2000, № 3, - p. 112-116.
11. Ташбаев Г. А., ТурдиалиевМ. З., Низомов П., Реакции 1,4-бензодиоксана с карбонильнылними соединениями, Перспективы использования природных соединений в сельском хояйстве.//Материалы научно-практической конференции. (г.Гулистан, Узбекистан), - 2018,- с.60-62.
12. Ташбаев Г.А., Турдиалив М., Амонова А.В. Оксиметилирование бензо-1,4-диоксана.// Доклады АН Р.Таджикистан 2013, - т.56, - №10, - с.791-795.
13. Ташбаев Г. А., Турдиалиев, М.З. Низомов П., Махмудов Э. Реакции 1,4-бензодиоксана с кетонами, XX Молодежная школа-конференция по органической химии 18-21 сентября, (г.Казань, РФ), - 2017, - с. 211.
14. Сафаров Д. Ташбаев Г. А - Исследование реакции 1,4-бензодиоксана с дикарбонильными соединениями.//Всероссийская конференция Марковниковские Чтения "Органическая химия: от Марковникова до наших дней" МГУ, (г.Москва, 17-20 января 2020г.), - с. 194.

15. Ташбаев Г. А., Тохиров Д. Д., Абдурахмонова У. Алимов А. Э - Синтез 1,4-бензодиоксан-6-сульфохлорида и исследование реакции с вторичными аминами. // Всероссийская конференция Марковниковские Чтения "Органическая химия: от Марковникова до наших дней" 17-20 января 2020, - с. 314.
16. Tashbaev G. A., Tohirov D. D., Abdurahkmonova U. K., Alimov A. E. - Synthesis of 1,4-benzo-dioxane-6-sulfochloride and comarastive stady of its reations with secondary amines.// Scientific Bulletin Series: Chemical Research, 2000, - № 3, - p. 117-122.

СИНТЕЗҲО ЭФИРҲОИ АЛКИЛЙ 1,4-БЕНЗОДИОКСАН-6-СУЛЬФОКИСЛОТА

Тошбаев Ғ.А., Тохиров Д. Д., Раҳмонов Р.О.
Институти кимиёи ба номи В. И. Никитин АИМТ

Аннотатсия. *Бо ҳамтаъсиркунии 1,4-бензодиоксан-6-сульфохлорид бо алканолҳо ва синтези сульфонатҳои қатори 1,4-бензодиоксан оварда шудааст.*
Калидвожаҳо: *1,4-бензодиоксан, 1,4-бензодиоксан-6-сульфохлорид, сульфонатҳо, алканолҳо, сульфонилонидан.*

SYNTHESIS OF ALKYLESTERIS OF THE 1,4-BENZODIOXANE-6-SULFO ACID_

Tashbatv G. A., Tohirov D. D., Rahmonov R. O.
V. I. Nikitin Institute of the Chemistry NAS Tajikistan

Annotation. Reactions of 1,4-benzodioxane-6-sulfachloryde with alcahols and Synthesis sulfonats of the 1,4-benzodioxane seriz were described.
Keywarts: *1,4-benzodioxane, 1,4-benzodioxane-6-sulfachloryde, sulfonats, alcahols, sulfonilation.*

Сведения об авторах: **Ташбаев Гуламжон Аскарович** - д.х.н., профессор, главный научный сотрудник лаборатории ХГС Института химии имени В. И. Никитина, E-mail: tgabek@yandex.ru.
Тохиров Д. Д.- лаборант Института химии имени В. И. Никитина, E-mail: jura@yandex.ru.
Рахмонов Р.О. заведующий лабораторией ХГС Института химии имени В. И. Никитина, E-mail: r-rahmonov@yandex.ru.

УДК 556.3: 551.435.36

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИАПАЗОНА ИЗМЕНЕНИЯ СТЕПЕНИ МИНЕРАЛИЗАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД В ОСНОВАНИИ ПЛОТИНЫ РОГУНСКОЙ ГЭС

Давлатшоев С.К. [1], Кобулиев З.В.[1], Сафаров М.М.[2]

Институт водных проблем, гидроэнергетики и экологии НАНТ[1]

Таджикский технический университет им. акад. М.С. Осими [2]

Аннотация. *При возведении плотины Рогунской ГЭС особое внимание необходимо уделить обеспечению защиты породы основания от размыва и растворения. Детальное изучение свойств грунтов основания и принятие мер по их закреплению, уменьшению градиентов напора соответствующими противофильтрационными устройствами может полностью исключить развитие растворения соли и выщелачивания гипса, следовательно, и опасность разрушения плотины. В связи с этим, требуются надежные методы для ведения мониторинга, позволяющие своевременно оценить эффективность противофильтрационных мероприятий и сохранность солевого пласта. В статье приводятся исследования по изучению диапазона изменения степени минерализации подземных вод в зоне оголовка солевого пласта для подготовки требований по созданию кондуктометрического прибора.*

Ключевые слова: *платина, карст, растворимые породы, солевой пласт, минерализация, пьезометрическая сеть, резистивиметрия, гидрогеохимия, фильтрация, модель минерализации.*

К настоящему времени накоплен огромный опыт и успешно ведётся строительство плотин с карстующимися карбонатными породами в основании плотин. Уникальной является Рогунская плотина, в основании которой залегает каменная соль [1-3]. Анализ литературных данных по более, чем 30 плотинам, содержащим в основании гипс, показывает, что возникающие проблемы не всегда находили удовлетворительное решение. В зарубежной практике известны случаи катастроф, аварий, отказа от строительства при обнаружении в разрезах основания плотины отложения гипса.

Безопасность эксплуатации плотин на растворимых породах во многом определяет обоснованный выбор мероприятий по защите пород от растворения, контроль за их работой, а также организацию наблюдений за развитием физико-химических процессов в основании плотины [4].

Проектом Рогунской ГЭС предусмотрено, что при возведении перемычки и переключения расхода реки Вахш, по строительным туннелям могут формироваться фильтрационные потоки вдоль солевого пласта. Учитывая пространственное положение и мощность солевого пласта в основании будущей плотины, в качестве сугубо временного мероприятия, до готовности основного комплекса защиты солевого пласта, было предложено создание специальной временной солевой завесы (ВСЗ).

Принцип работы такой завесы заключается в том, что вдоль солевого пласта, с обоих сторон, по длине защищаемого участка у основания перемычки устраиваются солевые скважины, с подачей в них строго дозированного концентрированного рассола. Постоянное возмещение бытового солевого пласта в основании перемычки создает устойчивую гидрогеохимическую среду и способствует сохранности солевого пласта.

Временная солевая завеса в виде двух рядов нагнетательных скважин выполнена вдоль левобережной части пласта соли. Рабочая часть скважин солевой завесы имеет диаметр 93 мм и длину 15 м, шаг между скважинами 6 м. Скважины заполнены песчаным материалом, внутри которого проходит подающая рассол перфорированная труба.

Рассол с содержанием 280 – 310 г/л для подачи в скважины солевой завесы готовится на растворном узле из привозной соли и, перейдя через систему фильтров и отстойников, поступает на распределительный узел, откуда самотёком по системе трубопроводов подводится к нагнетательным скважинам.

Были предусмотрены проектом основные требования к временной солевой завесы:

- нагнетаемый рассол должен иметь концентрацию не менее 250 г/л NaCl, 3-5 г/л $CaSO_4$, содержание извести не более 3 г/л, крупность нерастворимых частиц не более 25 мм;
- система солевых скважин должна обеспечить образование шлейфа рассола вокруг солевого пласта с подержанием в породном массиве концентрации не ниже естественных уровней.

В процессе эксплуатации сооружений временной солевой завесы контролировались следующие параметры:

- химический состав, концентрация, содержание взвеси и крупность нерастворимых частиц в приготовливаемом и закачиваемом в скважины рассоле;
- количество рассола, поглащаемого скважинами (приемистость скважин);
- уровни минерализации и химсостав подземных вод, формирующихся с обоих сторон солевого пласта;
- коррозионная стойкость материалов, применяемых в сооружениях солевой завесы.

Работа системы подачи рассола контролируется ежедневными измерениями поглощающий способности скважин, которые производятся на входе в рассолоподающий трубопровод. Кроме того, на узле распределения рассола, ежедневно фиксируется количество рассола, поданное в систему временной солевой завесы. Такой контроль требует новые методы и приборы, позволяющие осуществлять контроль в реальном масштабе времени.

С целью создания прибора кондуктометрического измерения для наблюдения за гидрогеохимическим режимом основания плотины на растворимых породах, необходимо исследовать диапазоны изменения температурного поля [5] и степени минерализации подземных минерализованных вод по стволу скважины [6], определить минимальное, максимальное значения названных параметров и подготовить техническое требование к разработке метода и прибора кондуктометрического измерения [7, 8].

Результаты наблюдений за поглощающей способностью скважин временной солевой завесы представлены в таблице 1.

Таблица 1 - Изменения расхода рассола в рассолоподающих трубках

Второе полугодие 1990 г.			Второе полугодие 1991 г.		
Дата измерения	Лежачий бок	Висячий бок	Дата измерения	Лежачий бок	Висячий бок
04.07.90	25.27	53.73	06.06.91	17.76	31.31
11.07.90	13.38	46.72	13.06.91	14.63	40.39
18.07.90	10.30	16.93	18.06.91	14.82	33.70
25.07.90	21.06	35.25	27.06.91	22.02	30.30
08.08.90	20.18	36.55	03.07.91	18.43	50.23
07.09.90	26.98	23.99	12.07.91	16.89	48.92
20.09.90	25.66	33.39	17.07.91	17.90	48.88
22.09.90	26.21	48.30	23.07.91	13.84	39.46
27.09.90	30.22	50.98	29.07.91	22.25	51.56
03.10.90	21.61	40.75	07.08.91	32.37	53.56
10.10.90	23.45	37.85	14.08.91	28.67	34.81
17.10.90	27.58	36.19	21.08.91	26.82	46.66
26.10.90	28.14	37.92	28.08.91	17.61	30.86
31.10.90	30.91	39.87	04.09.91	16.52	34.46
			11.09.91	21.57	36.96
			18.09.91	18.86	25.69
			25.09.91	55.80	33.87
			02.10.91	21.23	23.18
			23.10.91	21.45	32.82
			11.11.91	20.45	29.64
сум. Q	332.95	537.82	сум. Q	439.89	757.71

Суммарный расход рассола по обеим сторонам Ионахшского разлома подтверждает ранее установленную повышенную проницаемость пород висячего бока по сравнению с лежачим [9]. Поглощающая способность породы висячего крыла по отношению к породе лежачего крыла в 1.5 – 1.7 раза выше.

Пьезометрическая наблюдательная сеть на участке временной солевой завесы (300 м) была представлена 12 – ю створами по 1 или 3 пьезометра в каждом. Расстояние между створами принято в пределах 17 – 30 м; расстояние между пьезометрами в створе не превышает 5 м. Общее количество пьезометров, задействованных в исследованиях 28.

Целью специальных гидрогеохимических исследований в зоне пласта соли является оперативный контроль гидрогеохимического режима:

- уточнение модели распределения минерализации подземных вод на участке солевого пласта (изучение движения подземных фильтрационных потоков);
- изучение влияния техногенных воздействий на изменение подземных минерализованных вод;
- наблюдения за изменением поглощающей способности рассолоподающих скважин солевого экрана, позволяющие изучать эффективности солезащитных мероприятий.

Для изучения изменения минерализации в зоне оголовка солевого пласта был выбран метод резистивиметрии, который является наиболее эффективным и технологичным геофизическим методом. Он обладает высокой информативностью и возможностью изучения обводненной части пьезометрической скважины. Резистивиметрия основана на выявления гидрохимических аномалий, обусловленных сосредоточенными потоками фильтрирующихся русловых вод, направленных в обходные строительные туннели.

Резистивиметрические исследования в скважинах пьезометрической сети выполнялась с помощью переносной аппаратуры, специального трехэлектродного резистивиметра РСМ - 36. Отличительной особенностью данного резистивиметра является его широкий диапазон измеряемых удельных электрических сопртивлений электролитов от ультрапресных до рассолов.

Особенность методики проведения полевых работ заключалась в строгом соблюдении очередности выполнения выбранных методов. В первую очередь, с целью минимального искажения температурного поля, при спуске прибора в скважину, выполнялась термометрия с точечной регистрацией. Затем выполнялась резистивиметрия по той же схеме, но только в обводненном интервале пьезометров. В основном методика резистивиметрических исследований в скважинах носила традиционный характер и не отличалась от широко используемой в Институте Гидропроект.

Таким образим, было произведено 10 циклов резистивиметрических исследований 11 створам (№ 1, 2, 3, 4, $4^а$, 5, 6, $6^а$, 7, 8, 9). При обработке материалов было выявлено, что по некоторым пьезометрам не велись регулярные наблюдения. Причиной является камнепад в левобережном склоне, непогода и др. технические причины.

Обработка материалов произведена по следующим пьезометрам: цикл 5, 7, 10 – по 15 пьезометрам, цикл 6, 11, 12, 13 – по 12 пьезометрам, цикл 8, 9 – по 16 пьезометрам и цикл 14 – по 14 пьезометрам.

Для анализа временных изменений минерализации подземных вод в районе солевого пласта были исследованы изменения минерализации с глубиной по каждому из 28 - и пьезометров с указанием даты и номера цикла. Несмотря на вариации абсолютных значений, характер изменения минерализации с глубиной в целом сохраняется с начала и до конца исследований.

В результате проведенных исследований по определению предела изменения степени минерализация в пьезометрических скважинах выявлено: минимальное значение минерализации равное 6.2 г/л обнаруженно в П-29 8 цикле ($С_{мин}$= 6.2 г/л), а максимальное значение минерализации равное 370.5 г/л в $П-19^б$ в 10 цикле ($С_{макс}$= 370.5 г/л).

Таким образом, предел изменения степени минерализации во всех выше приведенных циклах следующий:

$$С_{мин}= 6.2 \text{ г/л}, С_{макс}= 370.5 \text{ г/л}.$$

Начиная с 5 цикла (август 1990 г.) отмечается плавное увеличение минерализации до января 1991 г., когда оно достигает 241.9 г/л, затем происходит спад до 184.1 г/л (июнь 1991 г.), на протяжении 11, 12, 13 циклов (март, май, июнь 1991 г.) и в 14 цикле (июль) происходит понижение до 122.2 г/л. Режимный характер работы стал носить с 5 - го цикла, средняя минерализация по этому циклу была 156 г/л.

Для того, чтобы иметь представление об изменении минерализации подземных вод по глубине в зоне залегания солевого пласта, рассмотрим результаты измерения 5 – го и 9 – го циклов. Эти циклы являются аномальными и характеризуются самыми низкими значениями минерализации ($С_{ср}$ (цикл 5) = 167.1 г/л, $С_{ср}$ (цикл 14) = 122.2 г/л,) и самым высоким значением минерализации ($С_{ср}$ (цикл 9) = 241.9 г/л,), отмеченными за весь период исследований.

Для оценки распространения солевого облака вокруг пласта соли были построены модели минерализации подземных вод по двум аномальным циклам (рис. 1 и 2). Цикл 9 (январь 1991) охватывает период времени, когда минерализация подземных вод отличается максимальными значениями ($С_{ср}$ = 241.9 г/л) и цикл 14 (июль 1991) - минимальными $С_{ср}$ = 122.2 г/л.

Модель минерализации представляет собой условный разрез, сформированный путем совмещения в некоторую заданную плоскость 12 створов. Началом координат совмещения служит точка пересечения оси оголовка соли и кровли солевого пласта.

Модель минерализации подземных вод, построенная таким образом, отражает все детальные особенности распределения солевого облака на участке солевой завесы.

Область высоких значений минерализации (С > 300 г/л), существующая около солевого пласта (цикл 9) не имеет чёткого контура. В висячем боку, примерно на глубине 10 м от кровли солевого пласта, контур зоны "разъеден" менее минерализованными водами, фильтрующихся по трещинам напластования сверху вниз.

Зона пониженных значений минерализации (лежачий бок Ионахшского разлома) имеет довольно причудливые очертания с большим количеством локальных участков, характеризующихся экстремальными значениями минерализации на общем фоне С = 200 г/л.

В цикле 14 зона пониженных значений минерализации несколько сужает свои очертания, опускается ниже на 1.6 м, по - сравнению с 9 циклом и приближается к высокоминерализованному околопластовому ореолу.

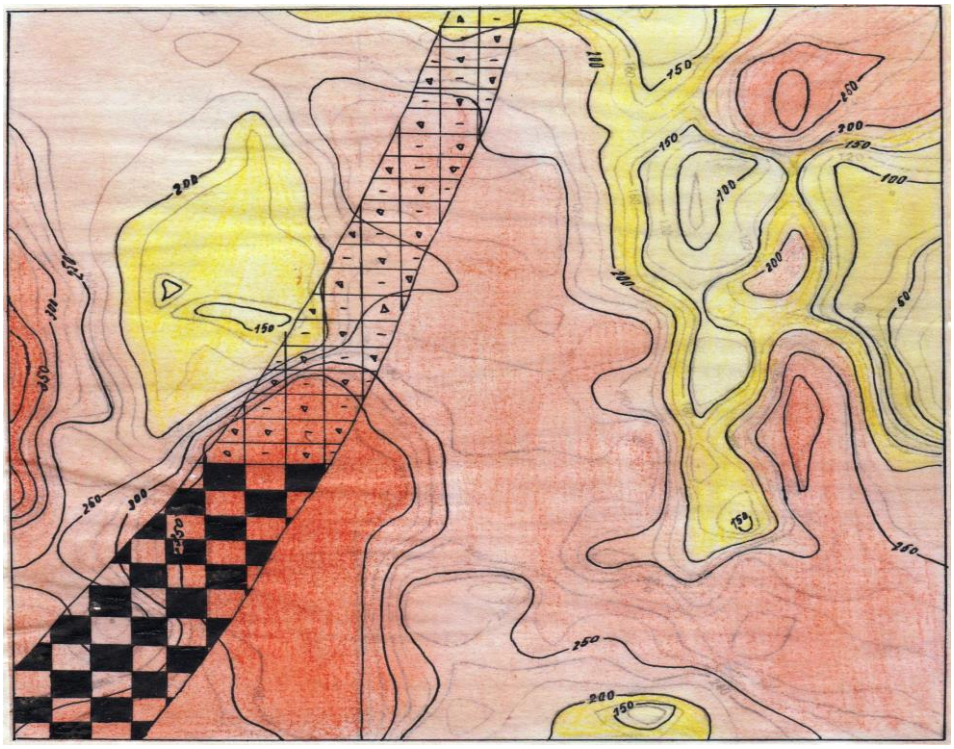


Рисунок 1 - Модель минерализации подземных вод на участке солевой завесы Рогунской ГЭС (масштаб 1:200). Цикл 9, 11 - 13 января 1991 г.

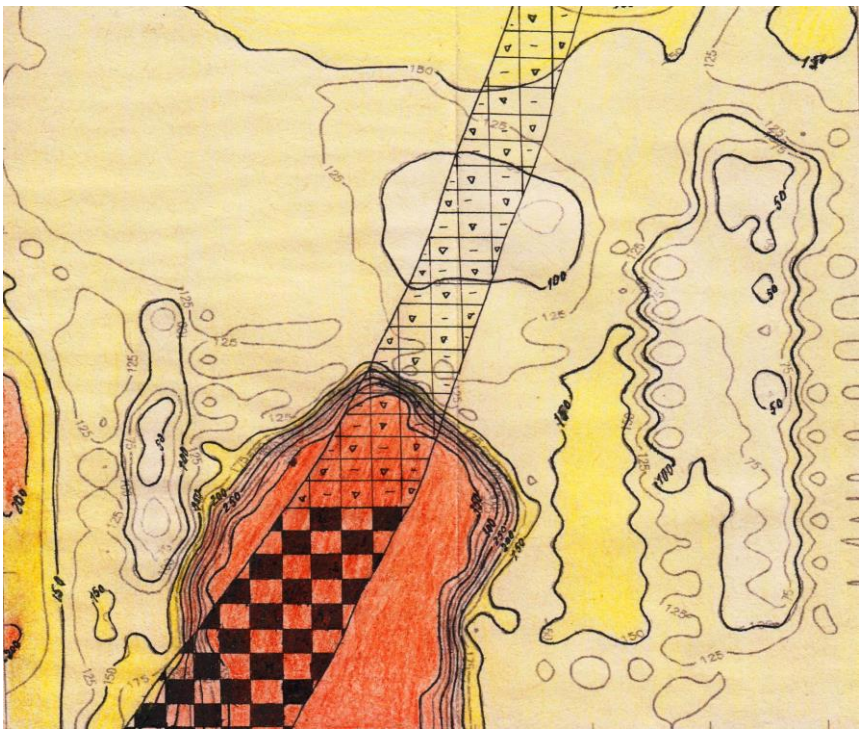


Рисунок 2 - Модель минерализации подземных вод на участке солевой завесы Рогунской ГЭС (масштаб 1:200). Цикл 14, 25 - 27 июля 1991 г.

Помимо движения фильтрующихся вод сверху вниз по трещинам напластования пород солевой завесы, отмечаются фильтрационные явления в зоне оголовка пласта соли в интервале глубин между пригрузочной бетонной плитой и цементационной завесой.

Литература

1. Гарелина С.А., Сафаров М.М., Давлатшоев С.К. Система мониторинга и защиты солевого пласта основания плотины Рогунской ГЭС. // В сборнике: Общенаучные проблемы инженерной подготовки кадров МЧС РФ. Сборник трудов секции №16 XXIX Международной научно-практической конференции. 2019. - С.19-23.
2. Давлатшоев С.К., Кобулиев З.В., Сафаров М.М. Кондуктометрический способ и устройства для мониторинга гидрогеохимического режима в основании плотины на легкорастворимых породах. // В сборнике: Современные методы и средства исследований теплофизических свойств веществ. Сборник трудов V Международной научно-технической конференции. 2019. - С.270-282.
3. Гарелина С.А., Давлатшоев С.К., Сафаров М.М. Кондуктометр для контроля гидрогеохимического режима в основании плотины. В сборнике: Общенаучные проблемы инженерной подготовки кадров МЧС РФ. // Сборник трудов XXVIII Международной научно-практической конференции. 2018. С.23-26.
4. Сафаров М.М., Кобулиев З.В., Давлатшоев С.К. Способ и устройства для гидрогеохимического мониторинга основании плотины на водорастворимых

породах. // В сборнике: Вопросы физической и коллоидной химии. Материалы IV Международной конференции, посвященной памяти докторов химических наук, профессоров Хамида Мухсиновича Якубова и Зухуриддина Нуриддиновича Юсуфова. 2019. - С.348-353.
5. Давлатшоев С.К., Кобулиев З.В., Сафаров М.М. Измерения диапазон изменения температурного поля во времени в основании плотины Рогунской ГЭС. В сборнике: Современные методы и средства исследований теплофизических свойств веществ. // Сборник трудов V Международной научно-технической конференции. 2019. - С.293-301.
6. Давлатшоев С.К., Кобулиев З.В., Сафаров М.М. Измерения диапазон изменения степени минерализации подземных вод в основании плотины Рогунской ГЭС. // В сборнике: Современные методы и средства исследований теплофизических свойств веществ. Сборник трудов V Международной научно-технической конференции. 2019. - С.302-309.
7. Давлатшоев С.К., Сафаров М.М. Кондуктометрический способ и аппаратура измерения уровня минерализации в пьезометрических сетях. // Вестник технологического университета, Казань, №18, Т. 20, 2017. - С. 45-52.
8. Сафаров М.М., Давлатшоев С.К., Исследование концентрации подземных вод экспресс – кондуктометрическим методом.// В сборнике: энергосбережение и эффективность в технических системах. Материалы V Международной научно – технической конференции студентов, молодых ученных и специалистов. 2018. - С. 362 – 362.
9. Давлатшоев С.К., Сафаров М.М., Леонидова Н.В. Исследование водопроницаемости породы в участке солевого пласта в основании плотины Рогунской ГЭС. // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. Душанбе, №1, 2008. - С.58-64.

ТАДҚИҚИ ҲУДУДИ ТАҒЙИРЁБИИ ДАРАҶАИ МАҲЛУЛНОКИИ ОБҲОИ ЗЕРИЗАМИН ДАР ЗЕРИ САРБАНДИ НБО-И РОҒУН

ДавлатшоевС.К. [1], Кобулиев З.В.[1], Сафаров М.М.[2]
Институти масъалаҳои об, гидроэнергетика ва экологияи АМИТ[1]
Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар ш. Душанбе[2]

Аннотатсия. *Ҳангоми бардоштани сарбанди НБО-и Рогун ба шусташавӣ ва маҳлулшавии ҷисмҳои маҳлулшавандаи зери сарбанд диққати махсус додан лозим мешавад. Омӯзиши муфассали хосиятҳои ҷинсҳои зерасоси сарбанд ва қабули ҳалномаҳои муҳандиси оид ба мустаҳакамкунӣ, паст намудани градиенти фишори об бо дастгоҳҳ зиддиполоиши, имкон медиҳад, ки маҳлулшавии намак ва гипс боздошта шуда, таҳдиди харобшавии сврбанд бартараф карда шавад. Вобаста ба ин, ба истифодаи усулҳои эътимодноки пешбурди мониторинг зарурат пайдо мешавад, ки сари вақт самаранокии маърака муҳандисии зиддиполоиши ва ҳимояи қабати намак, арзёби карда шавад. Дар мақола таҳқиқ ва омӯзиши ҳудуди тағйирёбии дараҷаи маҳлулнокии обҳои зеризаминӣ дар минтақаи қабати намак ва тайёр намудани талабот барои сохтани таҷҳизоти кондуктометрӣ оварда шудааст.*
Калидвожаҳо: *платина, карст, ҷинсҳои маҳлулшаванда, қабати намак, маъданнокӣ, шабакаи пьезометрӣ, резистивиметрӣ, гидрогеохимия, фильтрация, модели маъданнокӣ.*

INVESTIGATION OF THE RANGE OF CHANGE IN THE EXTENT OF MINERALIZATION OF UNDERGROUND WATER AT THE BASE OF THE DAMS OF ROGUN HPP

S. K. Davlatshoev[1], Z.V. Kobuliev[1], M.M. Safarov[2]
Institute of water problems, hydropower engineering and ecology TNAS[1]
Lomonosov Moscow State University in Dushanbe[2]

Abstract. *During the construction of the dam of the Rogun HPP, special attention should be paid to ensuring the protection of the foundation rock from erosion and dissolution. A detailed study of the properties of the foundation soils and taking measures for their consolidation, reduction of pressure gradients with appropriate impervious devices can completely exclude the development of salt dissolution and leaching of gypsum, hence, the danger of dam destruction. In this regard, reliable monitoring methods are required, allowing timely assessment of the effectiveness of anti-filtration measures and the safety of the salt layer. The article provides research to study the range of changes in the extent of mineralization of groundwater in the area of the head of a salt layer, to prepare a requirement for the creation of a conductometric instrument.*
Keywords: *dam, karst, soluble rocks, salt layer, mineralization, piezometric network, resistivity measurement, hydrogeochemistry, filtration, mineralization model.*

Сведения об авторах. **Саломат Каноатшоевич Давлатшоев** – к. т. н., заведущий лабораторией «Энергетика, энерго- и ресурсосбережения» ИВП,ГЭиЭ НАНТ, г. Душанбе, salomatda@list.ru
Махмадали Махмадиевич Сафаров – д.т.н., профессор, Таджикский технический университет им. акад. М.С. Осими в г. Душанбе, mahmad1@list.ru

УДК 624.131

ВЛИЯНИЕ РЕЖИМА НАГРУЖЕНИЯ НА ПОКАЗАТЕЛИ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕЗУ ЛЁССОВЫХ ГРУНТОВ

Магдиев М.М.
Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе

Аннотация. *В работе представлены новые результаты экспериментальных исследований сопротивления срезу лессовых грунтов верхней части разреза стратотипа верхнечетвертичного душанбинского комплекса в районе Мирзобек города Душанбе при статическом и кинематическом режиме нагружения. В работе также приводятся полученные результаты о составе, строении и физических свойств данных лессовых грунтов.*
Ключевые слова: *сопротивление срезу грунтов, статический режим, кинематический режим, сцепления, угол внутреннего трения.*

Сопротивление сдвигу связных грунтов имеет сложную природу и определяется как внутренними, так и внешними факторами [1]. По закону Кулона разрушение или сдвиг грунтов происходит при определенном соотношении нормальных и касательных напряжений, действующих на площадку сдвига. Кривая предельных сопротивлений сдвигу для сыпучих грунтов принимается прямой, проходящей через начало координат, т.е. $\boldsymbol{\tau}_{\text{пред.}} =$

$\boldsymbol{\sigma tg\varphi}$, где σ – нормальное напряжение на площадке сдвига, φ – угол наклона прямой к оси нормальных напряжений. Так как сопротивление сыпучих грунтов сдвигу определяется их трением, то угол φ принято называть углом внутреннего трения [2].

Повышение эффективности и качества строительства в значительной степени зависит от правильной оценки свойств грунтовых оснований и выбора фундаментов зданий и сооружений. Особые трудности возникают при проектировании зданий и сооружений на лёссовых грунтах, которые на территории Таджикистана занимают около 70% площади. Данное исследование может повысить точность и достоверность оценки физико – механических характеристик лёссовых грунтов.

Для исследования были отобраны грунты из верхней части разреза стратотипа верхнечетвертичного душанбинского комплекса района Мирзобек города Душанбе. Данная территория сложена толщей глинистых грунтов аллювиально-пролювиального происхождения позднечетвертичного возраста (apQ_{III}), представленных лессовыми грунтами мощностью от 30м до 150м [3], местами перекрытых с поверхности насыпными грунтами мощностью до 4,5 м. Под лессовыми отложениями находятся аллювиальные пески, галечники, валуны. В геоморфологическом отношении исследуемый участок расположен на левой надпойменной террасе реки Душанбинка. Горизонт естественных подземных вод в районе исследований залегает на значительных глубинах (150-200 м). Наблюдаются верховодки, основным источником питания которых являются техногенные воды: утечки из водонесущих коммуникаций п.Шахмансур, института химии, скопления атмосферных осадков вдоль автодороги по ул.Айни, в открытых выемках и котлованах. Просадочные явления развиты повсеместно на участках, где происходит интенсивное замачивание лёссовидных грунтов [4].

Нами были исследованы 4 образца (монолита) лёссовых грунтов размером 20х20х20 см (по ГОСТ 12071-2014) [5], отобранных из зачищенных стенок открытого обнажения (разреза лёссовых грунтов) с глубин 2.6, 3.7, 4.6 и 6.5 м. Мощность почвенно-растительного слоя составляет 10-15 см, слоистость толщи не наблюдается. Лабораторные испытания выполнены на основе соответствующих нормативных документов, методических рекомендациях и интернет-ресурсах для определения состава, свойств и строения исследуемых грунтов.

Результаты исследований. Естественная влажность исследуемых лессовых грунтов колеблется от 4.0 до 14.1%, а гигроскопическая - практически не меняется и имеет значения от 1.1 до 1.3%. Выявлена следующая закономерность – уменьшение влажности по глубине, которая может быть обусловлена тем, что

при выпадении атмосферных осадков, влага не просачивается до тех глубин, на которых наблюдается малая влажность. Также по данным наших исследований уровень грунтовых вод расположен достаточно глубоко, т.к. в противном случае влажность образцов с наибольшей глубиной имела бы высокие значения.

Нижний предел пластичности изменяется от 21.0 до 22.8%, верхний предел от 29.5 до 31.5%. Для рассчитанных чисел пластичности и показателя текучести, грунты попали в диапазоны $7 \leq I_p < 17$ и $I_L < 0$ по ГОСТ 25100-2011 [6](табл. 1) и относятся к твёрдым суглинкам.

Значения плотности грунта в ненарушенном сложении находятся в интервале от 1.65 до 1.91 г/см^3, плотность скелета грунта меняется от 1.45 до 1.84 г/см^3, а плотность твердых частиц колеблется от 2.70 до 2.73 г/см^3 (табл. 2). Среднее значение плотности твёрдых частиц достигает 2.71 г/см^3. Все полученные значения плотностей равны значениям, приведенным в литературе.

Таблица 1. Показатели пластичности суглинков верхнечетвертичного душанбинского комплекса

Глубина отбора образцов H, м	Нижний предел пластичности W_L, %	Верхний предел пластичности W_p, %	Число пластичности I_p, %	Показатель консистенции I_L, д.е.
2.6	21.0	29.5	8.4	-0.82
3.7	22.8	30.3	7.5	-1.42
4.6	21.1	31.5	10.3	-1.50
6.5	21.8	29.3	7.5	-2.39

Таблица 2. Показатели плотности суглинков верхнечетвертичного душанбинского комплекса

Глубина отбора образца H, м	Плотность грунта ρ, г/см^3	Плотность скелета грунта ρ_d, г/см^3	Плотность твердых частиц ρ_s, г/см^3
2.5	1.65	1.45	2.73
3.7	1.68	1.50	2.70
4.6	1.77	1.68	2.70
6.5	1.91	1.84	2.72

Показатели плотности (табл. 2) показывают увеличение плотности грунтов по глубине. Причиной этому является закрытие пор, т.е. уменьшение пористости, которая в свою очередь происходит за счет давления со стороны вышележащих пород, так называемое геостатическое (литостатическое) давление. Так как плотность скелета сухого грунта вычислялась расчётным путем по величине плотности грунта и его влажности, то с уверенностью можно

сказать, что все закономерности и выводы, которые были сделаны в ходе исследования относительно плотности и влажности, при рассмотрении плотности скелета грунта уместны. Как и в случае с плотностью скелета грунта, пористость и коэффициент пористости вычислялись расчётным способом по формулам, т.е. по значениям плотности скелета грунта и плотности твёрдых частиц. Пористость грунта варьирует от 33 до 47%, а коэффициент пористости от 0.484 – 0.881 (табл. 3).

Таблица 3. Показатели пористости суглинков верхнечетвертичного душанбинского комплекса

Глубина отбора образца *H*, м	Пористость *n*, %	Коэффициент пористости *e*, д.ед
2.6	47	0.881
3.7	45	0.818
4.6	38	0.627
6.5	33	0.484

Проведенные исследования грунтов направлены на определение прочностных свойств: значения прочности на сдвиг – сцепления и угла внутреннего трения. Эти две характеристики вычислялись по ГОСТ 12248-2010 и ГОСТ 12248.1 [7, 8] обработкой экспериментальных точек $\tau=f(\sigma)$ методом наименьших квадратов. Результаты испытаний представлены в таблицах 4 и 5.

Таблица 4. Значения сцепления суглинков верхнечетвертичного душанбинского комплекса

Глубина отбора образцов, м	Влажность, %	Величина сцепления, кПа		
		при кинематике	при кинематике (повтор)	при статике
2.6	14.1	28	0	47
3.7	12.1	44	0	68
4.6	5.6	64	0	76
6.5	4.0	88	8	92

Таблица 5. Значения угла внутреннего трения суглинков верхнечетвертичного душанбинского комплекса

Глубина отбора образцов, м	Влажность, %	Величина угла внутреннего трения, град.		
		при кинематике	при кинематике (повтор)	при статике
2.6	14.1	26	35	20

3.7	12.1	24	37	18
4.6	5.6	30	34	25
6.5	4.0	32	36	21

Выводы:

- с увеличением глубины залегания пород, значения сцепления и угла внутреннего трения в основном увеличиваются, что является логичным, поскольку плотность с глубиной увеличивается, а влажность соответственно уменьшается. Вопросы вызывают только образец №1 при статическом режиме нагружения, где наблюдается максимальное значения сцепления и образец №3 при статическом режиме нагружения, где наблюдается максимальное значение угла внутреннего трения. Возможно, такое высокое значение сцепления у образца №1 связано с включениями, а угла внутреннего трения образца №3 с высоким содержанием песчаных частиц, т.к. у образца №3 содержание песчаных частиц достигает 19% (рис. 1 и 2);
- при повторном кинематическом режиме нагружения грунтов по уже сформированной поверхности скола, можно утверждать, что сцепление падает до нуля (образцы № 1-3) или составляет единицы (образец №4);
- при сравнении полученных значений сцепления и угла внутреннего трения разных режимов нагружения «кинематический» и «статический», можно видеть, что значения сцепления, полученные в результате статического режима нагружения выше, чем в кинематическом, а значения угла внутреннего трения наоборот ниже. Данное явление весьма затруднительно поддается анализу.

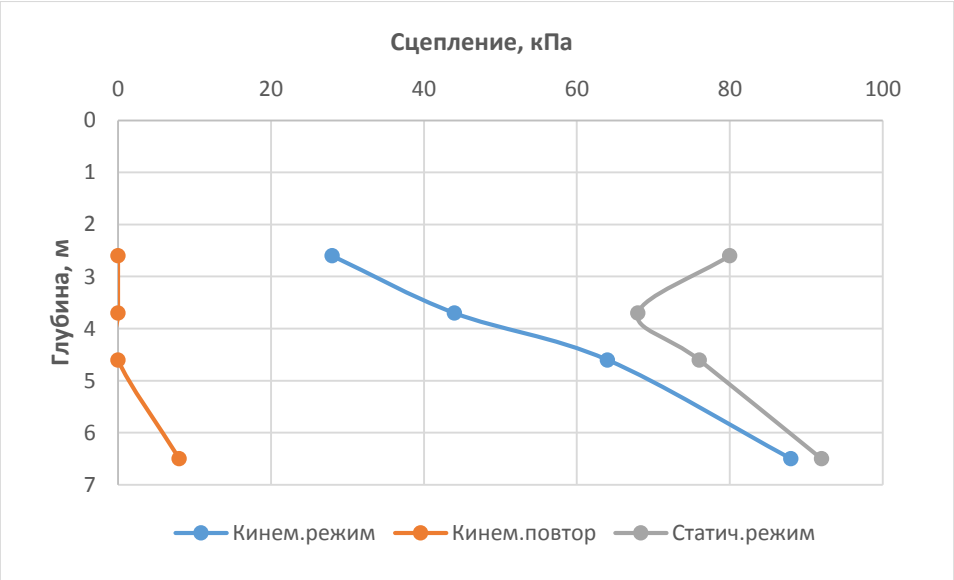


Рисунок 1. Изменение сцепления суглинков верхнечетвертичного душанбинского комплекса по глубине отбора образцов

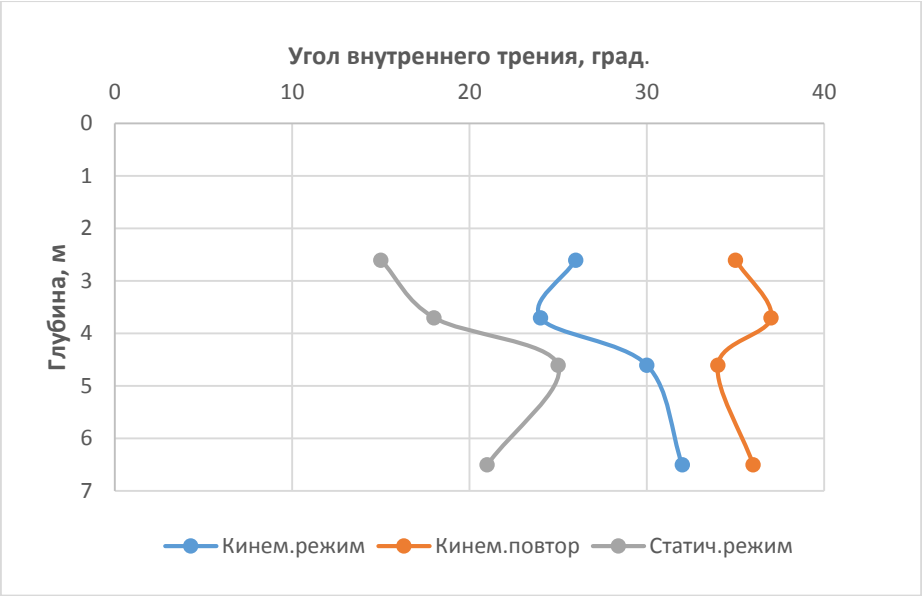


Рисунок 2. Изменение угла внутреннего трения суглинков верхнечетвертичного душанбинского комплекса по глубине отбора образцов

Возможно, такие высокие значения сцепления при статическом режиме нагружения связаны с тем, что при данном режиме для перехода в следующую ступень касательной нагрузки проходит определенное время (до условной стабилизации), за это время приложенная нормальная нагрузка слегка уплотняет исследуемый грунт. Также необходимо учитывать то, что при определении свойств (физические, физико-механические) одного и того же грунта (нескольких колец) получаемые результаты могут немного отличаться друг от друга из-за некоторой неоднородности грунта, например, пор повышенного размера, технических пределов аппаратуры и других факторов.

Литература

1. Сергеев Е.М. Грунтоведение. М.: Изд-во МГУ, 1983. - 392с.
2. Лабораторный практикум по грунтоведению: Учебное пособие. Под ред. В.А. Королева, В.Н. Широкова и В.В. Шаниной. Душанбе: Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова, 2019. - 240с.
3. Трофимов В.Т., Балыкова С.Д. Болиховская Н.С. и др. Лёссовый покров Земли и его свойства. М.: Изд-во МГУ, 2001. - 464с.
4. Технический отчет об инженерно – геологических условиях по объекту: «Индивидуальная застройка «Восточных холмов» г. Душанбе». 2004. Архив АООТ «САНИИОСП».

Нормативные документы:

5. ГОСТ 12071-2014. Грунты. Отбор, упаковка, транспортировка и хранение образцов.
6. ГОСТ 12248.1. Грунты. Определение характеристик прочности методом одноплоскостного среза.

7. ГОСТ 12248-2010. Грунты. Методы лабораторного определения характеристик прочности и деформируемости.
8. ГОСТ 25100-2011. Грунты. Классификация.

ТАЪСИРИ РЕЖИМИ БОРКУНӢ БА НИШОНДИҲАНДАҲОИ МУҚОВИМАТ БА БУРРИШИ ХОКҲОИ ЛЁСС

Магдиев М.М.
Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар ш. Душанбе

Аннотатсия. *Дар мақола натиҷаҳои нави таҳқиқоти таҷрибавии муқовимати буррии хокҳои лёсс дар қисми болоии стратотипи комплекси боломавқеъи чорякии Душанбе дар минтақаи Мирзобеки шаҳри Душанбе дар шароити боркунии статикӣ ва кинематикӣ оварда шудаанд. Инчунин маълумот оид ба таркиб, сохтор ва хусусиятҳои физикии ин хокҳои лёссӣ оварда шудаанд.*
Калидвожаҳо*: муқовимати буррии хокҳо, ҳолати статикӣ, режими кинематикӣ, пайвастшавӣ, кунҷи соиши дохилӣ.*

INFLUENCE OF THE LOADING MODE ON THE RESISTANCE INDICATORS OF THE CUT OF LOSS SOILS

Magdiev M.M.
Lomonosov Moscow State University in Dushanbe

Annotation. *The article presents the modern results of experimental studies of the shear resistance of loess soils in the upper part of the section of the stratotype of the Upper Quaternary Dushanbe complex in the Mirzobek area of the city of Dushanbe under static and kinematic loading conditions, and also provides the results obtained on the composition, structure and physical properties of these loess soils.*
Keywords: *shear resistance of soils, static mode, kinematic mode, adhesion, angle of internal friction.*

Сведения об авторах**. Магдиев Мухаммадамин Махмудович** – лаборант лаборатории геологии Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе. E-mail: muhammadamin.magdiev2512@gmail.com

УДК 624.131

ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОЧНОСТНЫХ СВОЙСТВ ГРУНТОВ ВЕРХНЕЙ ЧАСТИ РАЗРЕЗА СТРАТОТИПА ВЕРХНЕЧЕТВЕРТИЧНОГО ДУШАНБИНСКОГО КОМПЛЕКСА

Магдиев М.М.

Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе

Аннотация. *В данной статье приведены новые данные о составе, строении, состоянии и свойств грунтов верхней части разреза стратотипа верхнечетвертичного Душанбинского комплекса в районе Мирзобек города Душанбе. Проведен анализ полученных данных прочностных свойств данных грунтов.*

Ключевые слова: *грунты, лессовые породы, влажность, гранулометрический состав, сцепление, угол внутреннего трения, прибор АСИС.*

Грунты верхней части стратотипа верхнечетвертичного душанбинского комплекса представлены в основном лессовыми грунтами. Лессовые породы широко распространены на территории Таджикистана. В Республике все лессовые отложения имеют покровный характер: практически все равнины и долины покрыты лессами мощностью от нескольких метров до 50-100 м – на водоразделах, склонах и древних террасах долин. В связи с увеличением объемов строительства в Таджикистане необходимость изучения лессовых пород возрастает [1].

Сопротивление лессовых грунтов сдвигу обуславливается двумя причинами: *углом внутреннего трения (φ)* и *сцеплением (С)*. Параметры прочности (φ и С) используются в ходе инженерно-геологических исследований для: 1) оценки прочности грунта в данных условиях испытаний; 2) сравнительного анализа прочности различных грунтов; 3) расчётов предельной прочности и устойчивости грунтов; 4) расчетов давления грунтов на ограждения; 5) оценки устойчивости склонов и откосов [2].

Исследовались образцы лессов, отобранные 07.12.2019г. в восточной части города Душанбе в районе Мирзобека из стратотипа верхнечетвертичного Душанбинского комплекса лессов и лессовидных грунтов пролювиального генезиса (prQ_{IV}) с глубин 2.6, 3.7, 5.0 и 6.0 м в виде монолитов размером 20х20х20см. Место отбора - обнажение на крутом склоне.

Все лабораторные исследования проводились в лаборатории грунтоведения Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе до мая 2020 года, для испытаний грунтов на срез был использован комплекс АСИС. Все работы проводились по обычной методике, описанной в работе [3] в следующей последовательности: макроописание грунта; влажность при естественном сложении (We); плотность в природном сложении (ρ); плотность твёрдых частиц

(ρ_s); плотность скелета грунта (ρ_d); пластичность – верхний предел (W_L), нижний предел (Wp); число пластичности (Ip); показатель консистенции (I_L); пористость (n) и коэффициент пористости (e); гранулометрический состав; сопротивление грунта сдвигу.

Макроописание исследуемых образцов:

Предварительное название – лессовидные суглинки, при скатывании не дают ощущение однородной массы, а при скатывании в кольцо дают излом. Цвет образцов – светло-коричневый со светло-серыми включениями карбонатов, о чём свидетельствует бурная реакция с соляной кислотой (HCl). Микротекстура – массивная, однородная, без слоистости (слоистость не наблюдается по всему разрезу). Состояние грунта – среднее, плотное, твёрдое по консистенции и влажное. Макроструктура – шероховатый излом, макропоры ориентированные в 3 направлениях.

Влажность исследуемых грунтов уменьшается с глубиной в пределах от 13.3 до 7.6 % (табл. 1). Причина в том, что атмосферные осадки не доходят полностью до глубины залегания четвертого образца.

Таблица 1. Основные характеристики исследуемых грунтов

Номер образца, №	1	2	3	4
Глубина, h (м)	2.6	3.7	5.0	6.0
Естественная влажность, We (%)	13.3	12.5	8.8	7.6
Влажность после опыта, W (%)	27.1	30.4	27.3	30.0
Верхний предел пластичности, W (%)	30.5	30.1	29.7	30.1
Нижний предел пластичности, W (%)	22.9	21.9	18.6	22.3
Число пластичности, I_P (%)	7.6	8.2	11.1	7.8
Показатель консистенции I_L (д.ед.)	-1.3	-1.1	-0.9	-1.9
Название грунта по числу пластичности (по ГОСТ 25100-2011)	суглинок			
Консистенция грунта (по ГОСТ 25100-2011)	Твердая			
Плотность естественного грунта, ρ (г/см^3)	1.50	1.53	1.62	1.65
Плотность водонасыщенного грунта, ρ (г/см^3)	1.87	1.82	1.80	1.77
Плотность твердых частиц, ρ_s (г/см^3)	2,69			
Плотность скелета грунта, ρ_d (г/см^3)	1.45	1.47	1.58	1.62
Пористость, n(%)	46.3	45.3	41.5	40.0
Коэффициент пористости, e (д.ед.)	0.87	0.83	0.71	0.67

Влажность верхнего предела пластичности данных грунтов изменяется от 29.7 до 30.5 %, влажность нижнего предела пластичности от 18.6 до 22.9 %. Число пластичности находится в интервале 7.6-11.1 % и по ГОСТ 25100-2011 [4] грунт является суглинком легким ($7 \leq I_p < 12$). Показатель консистенции колеблется от -0.9 до -1.3 д.ед. и по ГОСТ 25100-2011 грунт твердый ($I_L < 0$) (табл.1).

Плотность грунтов зависит от их минерального состава, пористости и влажности. Плотность испытанных грунтов увеличивается с глубиной в пределах от 1.50 до 1.65 г/см^3 (табл. 1) в связи с тем, что с глубиной уменьшается пористость грунтов за счёт повышения давления от веса вышележащих толщ. Плотность скелета грунта зависит от минерального состава и пористости. Он увеличивается с глубиной от значений 1.45 до 1.62 г/см^3, т.к. пористость уменьшается. В ходе работы были определены и подсчитаны плотность твёрдой компоненты, среднее значение которого составило 2.69 г/см^3, что характерно для лессовых грунтов. Пористость с глубиной залегания лессовых грунтов уменьшается с 46.3 до 40.0 %. Коэффициент пористости также уменьшается с глубиной залегания лессовых грунтов от 0.87 до 0.67 (табл. 1).

Для определения гранулометрического состава ареометрическим методом были проанализированы все 4 образца. Результаты приведены в таблице 2 и на

Таблица 2. Результаты гранулометрического анализа изученных образцов

Глубина отбора образца, м	Содержание частиц по фракциям (мм), %								Название грунта по классификации В.В.Охотина	Название грунта по классификации ГОСТ 25100-2011 с учетом числа пластичности
	1,0-0,5	0,5-0,25	0,25-0,1	0,1-0,05	0,05-0,01	0,01-0,005	0,005-0,002	<0,002		
2.6	3.8	2.4	1	32.4	38.5	12.1	2.7	7.1	супесь тяжелая пылеватая	суглинок легкий пылеватый
3.7	1.4	0.7	0,3	27.1	38.6	17.6	5.5	8.8	супесь тяжелая пылеватая	суглинок легкий пылеватый
5.0	0	0.3	1	30.5	34.1	11.0	12.1	11	суглинок легкий пылеватый	суглинок легкий пылеватый
6.0	0.7	0.7	0,3	7.1	23.1	27.5	23.6	17	суглинок средний пылеватый	суглинок легкий пылеватый

рисунках 1 и 2 в виде интегральной кривой гранулометрического состава и гистограммы распределения частиц.

Исходя из данных гранулометрического анализа, можно сделать вывод, что во всех образцах преобладает пылеватая фракция (0.05-0.002 мм), содержание которой больше 50%. По классификации ГОСТ 25100-2011 исследуемые грунты являются суглинками легкими пылеватыми, т.к. полученные значения числа пластичности попадают в диапазон 7<Ip≤12 и содержание песчаных фракций (2-0.05 мм) <40.

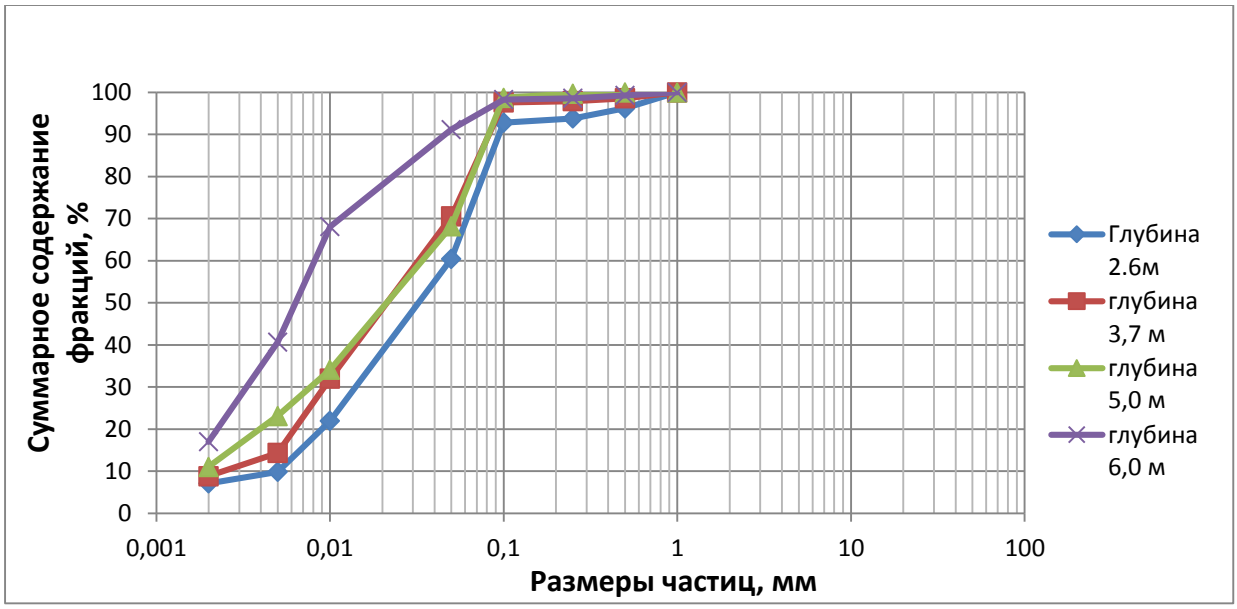


Рисунок 1. Интегральная кривая гранулометрического состава для всех образцов в полулогарифмическом масштабе

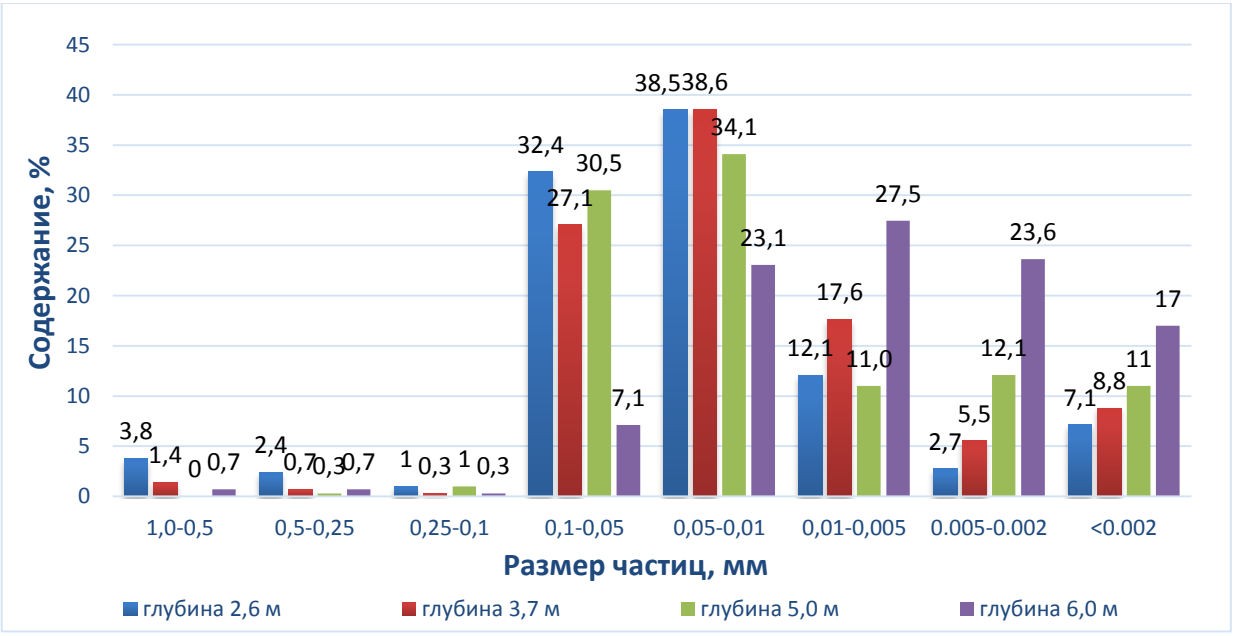


Рисунок 2. Гистограмма распределения частиц по размерам в исследуемых образцах

Результаты, полученные при изучении прочностных свойств грунтов (табл. 3, рис. 3) показывают, что сопротивление сдвигу лессовых грунтов уменьшается при водонасыщении. Сцепление после водонасыщения сильно уменьшается от 58 до 23 кПа и эти данные хорошо согласуются с общепринятыми в литературе. Сцепление в большей степени зависит от влажности грунта - при водонасыщении грунта вода проникает в макропоры и разрушает структурные связи породы, что приводит к ослаблению структурных связей между контактами частиц. При водонасыщенном состоянии лессовые грунты могут обладать текучей консистенцией и практически полностью снижать прочность грунта.

Таблица 3. Значения сцепления и угла внутреннего трения исследуемых образцов в естественном и водонасыщенном состояниях

	естественное состояние		водонасыщенное состояние	
Глубина, м	Сцепление, кПа	Угол внутреннего трения, град	Сцепление, кПа	Угол внутреннего трения, град
2.6	41.0	26.0	23.0	17.0
3.7	41.0	28.0	18.0	21.0
5.0	58.0	24.0	31.0	22.0
6.0	49.0	32.0	34.0	30.0

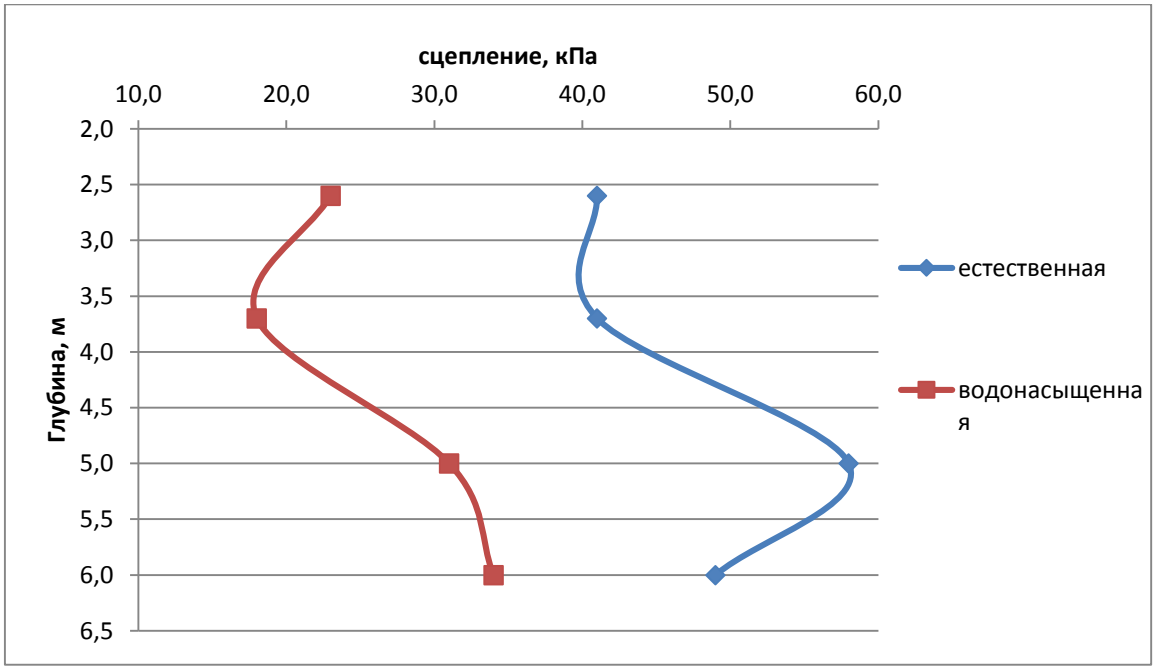


Рисунок 3. Зависимость сцепления верхнечетвертичных лессовых отложений в естественном и водонасыщенном состоянии от глубины залегания грунтов

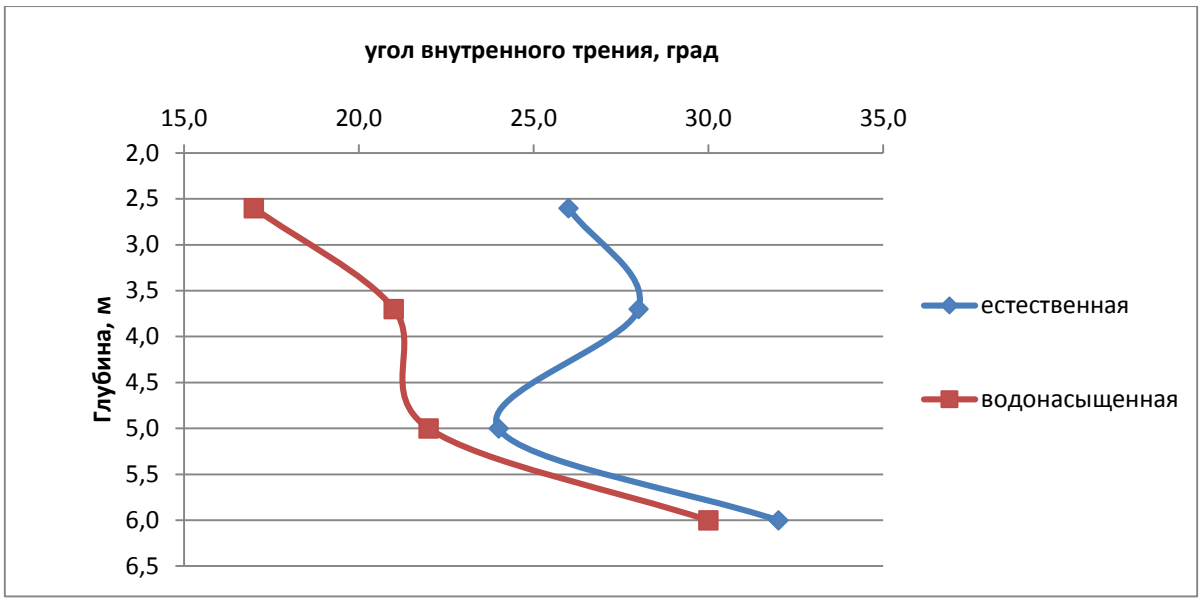


Рисунок 4. Зависимость угол внутреннего трения верхнечетвертичных лессовых отложений в естественном и водонасыщенном состоянии от глубины залегания грунтов.

Выводы

Полученные данные показывают, что на сопротивление сдвигу исследуемых образцов большое влияние оказывает водонасыщение. С ростом влажности исследуемых грунтов сцепление (*C)* и угол внутреннего трения (φ) закономерно снижаются за счёт ослабления структурных связей и смазывающего действия воды на контактах частиц. Уменьшение прочности лёссового грунта при водонасыщении происходит в основном в результате уменьшения сцепления между частицами.

В целом, чем больше значение влажности грунтов, тем грунты обладают наименьшей прочностью, то есть при малых сдвигающих нагрузках происходят незначительные деформации и легкое разрушение грунта. Другие свойства, которые влияют на прочностные характеристики изучаемых грунтов - это плотность, плотность скелета, плотность твёрдых частиц, пористость, коэффициент пористости и присутствие органики. В разрезе лёссовых толщ в сухом состоянии с глубиной плотность закономерно увеличивается и пористость уменьшается.

На сопротивление сдвигу лёссовых грунтов оказывают влияние ещё и структурно-текстурные особенности (тип структурных связей, дисперсность, пористость). Связные грунты с кристаллизационными структурными связями обладают более высокими значениями *C* и φ, чем грунты с коагуляционными связями. Влияние текстуры проявляется в анизотропии прочности по разным координатам (в грунтах с ориентированной текстурой сдвиг вдоль направления ориентации частиц происходит более легко, чем поперек их ориентации).

По данным лабораторных испытаний угол внутреннего трения (φ) при естественном сложении больше, чем при водонасыщенном состоянии. После водонасыщения угол внутреннего трения уменьшается на $2\text{-}10^0$. Значение φ в меньшей степени зависит от влажности (иногда практически не зависит) и в большей степени зависит от плотности, плотности скелета и пористости грунта. В данном случае (при водонасыщении) плотность увеличивается.

В целом, все полученные данные хорошо согласуются с общепринятыми в литературе.

Литература

1. Лессовые породы СССР. / Под ред. Б.М. Сергеева, А.К. Ларионова, Н.Н. Комиссаровой. М.: Недра. 1986, Т. 1.
2. Грунтоведение. / Под ред. Трофимова В.Т., Королева В.А. и др. 6-е изд. переработ. и доп. – М.: Изд-во МГУ 2005. - 1024 с.
3. Лабораторный практикум по грунтоведению под ред. В.А. Королёва, В.Н. Широкова и В.В. Шаниной. – Душанбе: Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова, 2019. - 240 с.
4. ГОСТ 25100-2011. Грунты. Классификация. М.: Издательство стандартов, 2012.

ТАВСИФИ ХУСУСИЯТҲОИ ХОКҲОИ ҚИСМИ БОЛОИИ СТРАТОТИПИ КОМПЛЕКСИ БОЛОМАВҚЕЪИ ЧОРЯКИИ ДУШАНБЕ

Магдиев М.М.

Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар ш. Душанбе

Аннотатсия. *Дар мақола маълумотҳои нав дар бораи таркиб, сохтор, ҳолат ва хосиятҳои хокҳои қисмати болоии стратотипи комплекси боломавқеъи чорякии Душанбе воқеъ дар минтақаи Мирзобеки шаҳри Душанбе оварда шудаанд. Маълумоти бадастомада дар бораи хосиятҳои мустаҳкамии ин хокҳо таҳдид ва тавсиф шудаанд.*

Калидвожаҳо: *хокҳо, ҷинсҳои лёссӣ, намӣ, тақсимоти андозаи зарраҳо, муттаҳидшавӣ, кунҷи соиши дохилӣ, дастгоҳи ASIS.*

CHARACTERISTICS OF THE STRENGTH PROPERTIES OF SOILS IN UPPER PART OF THE STRATOTYPE OF THE UPPER QUATERNARY DUSHANBE COMPLEX

Magdiev M.M.

Lomonosov Moscow State University in Dushanbe

Annotation. *This article presents the results obtained on the composition, structure, condition and properties of soils in the upper part of the stratotype section of the Upper Quaternary Dushanbe complex in the Mirzobek region of the city of Dushanbe. The analysis of the obtained data on the strength properties of these soils is carried out.*

Keywords: *soils, loess rocks, moisture, particle size distribution, clutch, internal friction angle, ASIS device.*

УДК 553.3/.9

ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТАМОРФИЧЕСКИХ ТОЛЩ ЮГО-ЗАПАДНОГО ПАМИРА КАК ИСТОЧНИКОВ АЛЮМОСОДЕРЖАЩЕГО СЫРЬЯ

Салихов Ф.С.[1], Мирзоев Б. [1], Пираков Г. [2]

Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе[1]

Главное управление геологии при Правительстве РТ[2]

Аннотация. *В работе приводится геологическая характеристика глиноземсодержащих метаморфических пород архейской шахдаринской серии на Юго-Западном Памире. Рассматриваются распространение, состав, строение, мощности пяти свит шахдаринской серии, как новых местных сырьевых источников алюмосодержащих минералов.*

Ключевые слова: *алюмосодержащие минералы, силлиманит, кианит, гнейс, мигматит, архей, шахдаринская серия.*

Введение

Освоение новых местных сырьевых источников алюмосодержащих минералов, проведение поисковых и изыскательских работ на этих проявлениях и месторождениях, так же как и последующая разработка способов обогащения таких минералов и их комплексное использование является инновационным научно-техническим решением задачи развития Республики Таджикистан. Проведение поисковых и изыскательских работ на данные виды полезных ископаемых невозможно без понимания закономерностей геологического строения и характеристик рудовмещающих толщ. На сегодняшний день перспективными видами сырья для получения глинозема в Республике Таджикистан являются: нефелиновые сиениты Турпи, сиалиты Зидди, алюмосодержащие минералы месторождения Курговат с большим запасом сырья [1]. Наряду с перечисленными месторождениями, большой практический интерес представляют глиноземсодержащие метаморфические породы архейской шахдаринской серии на Юго-Западном Памире.

Шахдаринская серия слагает северо-восточную территорию Юго-Западного Памира и в ее состав входят Хорогская, Шугнанская, Даршайская, Врангская, Дурумдаринская свиты. Серия сложена высокоглиноземистыми, гранат-амфиболовыми и пироксеновыми гнейсами, доломитовыми и магнезиальными мраморами, гнейсо-гранитами, мигматитами, гранулитами и метаморфизованными породами основного и ультраосновного составов [2].

Даршайская свита отличается наибольшей пестротой состава. В ней встречаются биотит-гранатовые гнейсы, мигматиты, высокоглиноземистые гнейсы с дистеном, силлиманитом, гранатом, кордиеритом, амфиболовые гнейсы и сланцы, амфиболиты и эклогитоподобные кальцифиры, мраморы,

скарны, пластообразные залежи аплитовидных гнейсогранитов, морфологически разнообразные мигматиты, милониты и бластомилониты. Наиболееинтересными образованиями являются пироксен-гранат-амфиболовые кристаллические сланцы м белые гранулиты саксонского типа. Последние это породы с мелкозернистой структурой и сланцеватой текстурой, состоящие преимущественно из ортоклаза и кварца с рассеянными зернами или кристаллами светлоокрашенного граната и иногда с небольшим количеством силлиманита, кианита, герцинита и авгита. Все перечисленные минералы, за исключением кварца являются алюмосодержащими минералами.

В шугнанской свите преобладают гранат-биотитовые гнейсы с высоким содержанием граната (до 50% объема пород). Нередки прослои гнейсов с дистеном и силлиманитом, роговой обманкой.

Врангская и дурумдаринская свиты отличаются чередованием многочисленных прослоев карбонатных пород среди гранат-биотитовых гнейсов. В составе дурумдаринской свиты значительная роль принадлежит биотит-амфиболовым гнейсам с незначительным присутствием гранатов. В чередовании с карбонатными породами встречаются биотитовые гнейсы (дистен, силлиманит) и морфологически разнообразные (очковые, линзово полосчатые, плойчатые) мигматиты. Таким образом, породы шахдаринской серии значительно состоят из милонитовых, бластомилонитовых разновидностей гнейсов.

Одним из перспекттивных проявлений алюмосодержащих пород считается проявление Бодомдара. Оно расположено в среднем течении р.Бодомдара (левый приток р.Шахдары) на северо-восточном склоне Ваханского (Шахдаринского) хребта. Абсолютные высотные отметки проявления 3200-3800м. Относительные превышения водоразделов над дгищами долин составляют 800-1000м. В геологическом строении проявления принимают участие глубоко метаморфизованные образования шахдаринской серии которая состоит из пяти свит, залегающие согласно друг на друга. На площади проявления присутствуют три нижние свиты серии: хорогская, даршайская и шугнанская [3-6].

Хорогская свита (AR?hr) развита довольно широко и состоит из зелиновато-черных амфиболовых и гранат-биотит амфиболовых гнейсов и кристаллических сланцев. В подчиненом количестве имеются прослои биотитов, гранит-биотитовых гнейсов. Мощность свиты по долине р. Горондара составляет 800-850 м.

Даршайская свита (AR?dr) в виде неширокой полосы прослеживается вдоль среднего течения реки Бодомдара. Сложена биотитовыми, биотит-гранатовыми, амфибол-гранат-биотитовыми гнейсами. Встречаются дистеновые (кианитовые)

и силлиманитовые разновидности гнейсов. Дистен и силлиманит присутствуют в небольших количествах. Мощность свиты 2000-2600 м.

Шугнанская свита(AR?sg) представлена как и предыдущая свита гранат-биотитовыми гнейсами с прослоями биотитовых гнейсов, мигматитов и мраморов. Особенностью свиты является преобладание гранатсодержащих гнейсов (гранат до 50-70 % объема породы), что отличает ее от других свит. Мощность свиты 1400-1500 м.

В тектоническом отношении проявление приурочено к моноклинальному крылу Гармчашминской антиклинали, породы имеют северо-восточное падение пород углом 25-30^{0}С и представлены складками течения, которые являются одной из особенностей глубоко метаморфизованных пород. Кроме того, в породах часто развиты структуры разлинзования (будинаж) явление довольно частое для ультраметаморфических пород. В результате предыдущих исследований [3, 4] выяснилось, что горизонты кианит- и силлиманитсодержащих гнейсов распространены довольно широко и встречаются по всему разрезу шахдаринской серии, но наиболее обогащенные горизонты сосредоточены в даршайской свите. Необходимо отметить, что присутствие кианита и силлиманита в разрезах толщ в зависимости от характера распределения минералов по разрезу использовались как минералогический признак при расчленении «немых» метаморфических образований на свиты.

Развитие гнейсов с силлиманитом в разрезе даршайской свите является её отличительной особенностью. Именно этот признак отличает её от других свит шахдаринской серии. При общей мощности в 2650 м на долю силлиманит-гранат-биотитовых, кианит-силлиманит-биотитовых, биотитовых с гранатом и других разновидностей биотитовых гнейсов и мигматитов приходятся 1150 м. При этом силлиманит-кианитовые гнейсы присутствуют в виде частых прослоев, хотя пачка, содержащие эти прослои, имеют мощность 370-460 м.

В гранат-биотитовых гнейсах силлиманит и кианит присутствуют в виде белых волокон фибролита и крупных (до 25-30 см длину) порфиробластов синего, зеленоватого кианита. В шлифе содержание фибролита составляет 5-10 % а кианита 5-15%. По данным Будановой К.Т. [2, 3] в долине р. Бодомдара 2/3 мощности (1800 м) даршайской свиты составляют силлиманитсодержащие гнейсы. Причем, мощности пачек с прослоями, содержащими силлиманит, составляют 500 м, 400 м и 300 м, а разрез свиты в верховьях р. Даршай наполовину (700 м) состоит из пачек с прослоями, содержащими силлиманит.

Выводы

Приведенные данные, характеризующие закономерности геологического строения рудовмещающих толщ, позволяют считать глиноземсодержащие метаморфические породы архейской шахдаринской серии Юго-Западного

Памира перспективным местным сырьевым источником алюмосодержащих минералов. Изучение указанных перспективных проявлений выполнялись только на уровне общей государственной геологической съёмки масштаба 1:200000 несколько десятилетий назад. Возможно, проводимые в настоящее время в Филиале МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе работы по госпроекту : «Физико-химические исследования и способы обогащения кианит-силлиманит содержащих пород для получения глинозема и других полезных компонентов» дадут основу для высокой технологической рентабельности получения глинозема и других полезных компонентов из местного сырья.

Литература

1. Ёров З.Ё., Вольнов Б.А. Полезные ископаемые и перспективы развития горнорудной промышленности Памира. Душанбе-Хорог. 2006г. - 154 с.
2. Буданова К.Т. Минералого-петрохимическая характеристика высокоглиноземистых пород восточной части Центрального Памира. // Изв. АН Респ. Таджикистан. Отд-ние наук о Земле. 1993г. № 1. - 29 с.
3. Буданова К.Т., Буданов В. И. Метамагматические формации Юго-Западного Памира . Под ред. Р. Б. Баратова. Душанбе: Дониш, 1983г. - с 276.
4. Соловейчик Б.Я. Материалы по геологии и петрографии «Южно-Памирской кристаллической толщи» центральной части Ваханского (Шахдаринского) хребта (Ю.З.Памир). Сталинабад.1945 г. - 103 с.
5. Лизун.В.М., Хафизов Х. Результаты поисковых работ на цветные камни бассейна р.Шахдара за 1980 год. Информационный геологический отчёт. Фонды ГУГ РТ. Душанбе.1981г. - 28 с.
6. Пираков Г. Результаты поисковых работ на камнесамоцветное сырье в пределах северного склона Ваханского хребта. Отчёт Вахагского поискового отряда Шахдаринской группы участков за 1997-2003 гг. Фонды ГУГ РТ. Душанбе. 2004г. - 99 с.

ТАВСИФОТИ ГЕОЛОГИИ ҚАБАТҲОИ МЕТАМОРФИИ ПОМИРИ ҶАНУБУ ҒАРБӢ ҲАМЧУН МАНБАИ АШЁИ ХОМИ АЛЮМИНИЙДОР

Салихов Ф.С.[1], Мирзоев Б. [1], Пираков Г. [2]
Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар ш. Душанбе[1]
Саридораи геология назди Ҳукумати Ҷумҳурии Тоҷикистон[2]

Аннотатсия. *Иқтибос аз тавсифи геологии глиноземсодержащих метаморфических хату архейской шахдаринской силсилаи дар ҷанубу Ғарбӣ Памире.*

Калидвожаҳо: *минералҳои алюминийдор, силлиманит, кианит, гнейс, мигматит, архей, серияи шахдара.*

GEOLOGICAL CHARACTERISTICS OF METAMORPHIC FORMATIONS OF THE SOUTH-WESTERN PAMIRS AS SOURCES OF ALUMINUM-CONTAINING RAW MATERIALS

Salikhov F.S. [1], Mirzoev B. [1], Pirakov G [2].

Lomonosov Moscow State University in Dushanbe[1]
Main Department of Geology under the Government of Tajikistan[2]

Annotation. *The geological characteristics of alumina-containing metamorphic rocks of the archean shahdara series in the South-Western Pamirs are presented. The distribution, composition, structure, power of five suites of Shahdara series considered as new local raw sources of aluminum-containing minerals.*
Keywords: *aluminum-containing minerals, sillimanite, kyanite, gneiss, migmatite, archaea, shahdara series.*

Сведения об авторах. **Салихов Фарид Салохиддинович** – к.г.-м.н., доцент, заведующий лабораторией геологии Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в Душанбе. E-mail: ffaarriidd@bk.ru
Мирзоев Баходур – к.х.н., старший научный сотрудник отдела науки и инноваций Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в Душанбе
Пираков Гулмахмад - старший геолог Южно-Таджикской поисково-съемочной экспедиции.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

В научном журнале «Вестник Филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе» печатаются статьи, содержащие результаты научных исследований по естественным, гуманитарным и экономическим наукам. При направлении статьи в редколлегию авторам необходимо соблюдать следующие правила: размер статьи не должен превышать 10 страниц компьютерного текста, включая текст, таблицы, библиографию, рисунки и тексты аннотаций на таджикском, русском и английском языках. Статья должна быть подготовлена в системе Microsoft Word, при этом одновременно с распечаткой статьи в 2-х экземплярах сдаются также соответствующие файлы (для каждой статьи на отдельном диске). Рукопись должна быть отпечатана на компьютере (шрифт Times New Roman 14, формат А4, интервал 1,5, поля: верхнее – 3 см, нижнее – 2,5 см, левое – 3 см, правое – 2см). Все листы статьи должны быть пронумерованы.

Текст статьи должен быть изложен кратко, тщательно отредактирован и подписан всеми авторами с указанием их фамилий, имен и отчеств, номера телефонов. Каждый экземпляр должен содержать: текст статьи, список литературы, тексты резюме на русском, таджикском и английском языках. В каждом резюме после заголовка статьи приводится название учреждения (-ий), в котором (-ых) выполнена данная работа. После каждого резюме отдельной строкой перечисляются ключевые слова на этих языках.

В верхнем правом углу первой страницы рукописи указывается раздел науки, которому соответствует статья, строкой ниже в левом углу страницы указывается индекс статьи по универсальной десятичной классификации (УДК). В центре следующей строки – инициалы и фамилия автора (-ов). Ниже приводится название статьи, затем указывается название организации. Ниже – краткая аннотация (на языке, на котором написана статья) с указанием конкретных результатов работы и вытекающих из них выводов, а также ключевые слова, наиболее полно отражающие область исследования и полученные в работе результаты (до 10 слов) через тире и адрес для корреспонденции (почтовый и электронный). Далее через строку следует основной текст. Сразу после текста статьи приводится список литературы (не более 10 названий) под заголовком «**Литература**» в порядке упоминания, тексты аннотаций и ключевые слова (например, на таджикском и английском языках, если статья написана на русском языке). Ссылки на цитируемую литературу даются в квадратных скобках, например [1].

Список литературы оформляется следующим образом: для книг – фамилия и инициалы автора (-ов), полное название книги, место издания, издательство, год

издания, том или выпуск, общее количество страниц. Для периодических изданий – фамилия и инициалы автора (-ов), название статьи, год издания, том, номер, первая и последняя страницы статьи.

Формулы и символы должны быть напечатаны на компьютере в одном стиле. Написание математических формул в виде рисунков не допускается. Следует избегать громоздких обозначений. Занумерованные формулы пишутся с красной строки, номер формулы в круглых скобках ставится у правого края. Нумеруются лишь те формулы, на которые имеются ссылки.

Сокращения должны быть расшифрованы, за исключением общепринятых.

В десятичных дробях после целой части числа ставится точка.

При упоминании в тексте иностранных фамилий в скобках необходимо давать их оригинальное написание.

Первое упоминание в статье названия вида животного или растения приводится по-русски и по латыни.

В тексте необходимо дать ссылки на все приводимые таблицы, рисунки и фотографии.

Научные статьи, представленные в редакцию журнала, должны иметь направление учреждения, в котором выполнялась данная работа, и экспертное заключение о возможности опубликования. При выполнении работы в нескольких учреждениях представляются направления из каждого учреждения. К статье должна быть приложена заверенная рецензия специалиста.

Редколлегия оставляет за собой право производить сокращения и редакционные изменения статьи. Статьи, не отвечающие настоящим правилам, редколлегией не принимаются.

ПОРЯДОК РЕЦЕНЗИРОВАНИЯ НАУЧНЫХ СТАТЕЙ, ПРЕДСТАВЛЯЕМЫХ В ЖУРНАЛ «ВЕСТНИК ФИЛИАЛА МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В ГОРОДЕ ДУШАНБЕ»

Статьи, поступающие в редакцию, проходят предварительную экспертизу (проводится членами редколлегии – специалистами по соответствующей отрасли науки) и принимаются в установленном порядке. Требования к оформлению оригинала статей приводятся в каждом номере журнала.

Если рукопись принята, то редакция сообщает автору замечания по содержанию и оформлению статьи, которые необходимо устранить до передачи текста на рецензирование.

Затем статьи рецензируются в обязательном порядке членами редколлегии журнала или экспертами соответствующей специальности (кандидатами и докторами наук).

Рецензия должна содержать обоснованное перечисление качеств статьи, в том числе научную новизну проблемы, её актуальность, фактологическую и историческую ценность, точность цитирования, стиль изложения, использование современных источников, а также мотивированное перечисление её недостатков. В заключении дается общая оценка статьи и рекомендации для редколлегии – опубликовать статью, опубликовать её после доработки, направить на дополнительную рецензию специалисту по определенной тематике или отклонить. Объем рецензии - не менее одной страницы текста. Статья, принятая к публикации, но нуждающаяся в доработке, направляется авторам с замечаниями рецензента и редактора. Авторы должны внести все необходимые исправления в окончательный вариант рукописи и вернуть в редакцию исправленный текст, а также его идентичный электронный вариант вместе с первоначальным вариантом рукописи. После доработки статья повторно рецензируется, и редколлегия принимает решение о ее публикации. Статья считается принятой к публикации при наличии положительной рецензии и если её поддержали члены редколлегии. Порядок и очередность публикации статьи определяется в зависимости от даты поступления её окончательного варианта. Рецензирование рукописи осуществляется конфиденциально. Разглашение конфиденциальных деталей рецензирования рукописи нарушает права автора. Рецензентам не разрешается снимать копии статей для своих нужд. Рецензенты, а также члены редколлегии не имеют права использовать в собственных интересах информацию, содержащуюся в рукописи, до её опубликования.

Главный редактор: Мирзоев С.Х., д.т.н., доцент.

Технический редактор: Рахмет-Заде Т. Н.

Муҳаррири техникӣ: Рахмет-Заде Т. Н.

Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова, 734003, г. Душанбе, ул. Бохтар, 35/1,
тел.: +992 (37) 221-99-41, 221-99-04, E-mail: info@msu.tj, сайт: http://www.msu.tj

Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов, 734003, ш. Душанбе, кӯч. Бохтар,
35/1, тел.: +992 (37) 221-99-41, 221-99-04, E-mail: info@msu.tj,
сайт: http://www.msu.tj

Подписано в печать 27.11.2020г.
Заказ 127. Тираж 200 экз.
Отпечатано в издательско-типографическом секторе Филиала МГУ
имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе
г. Душанбе, ул. Бохтар, 35/1