ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В Г. ДУШАНБЕ

ФИЛИАЛИ ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ МОСКВА БА НОМИ М.В. ЛОМОНОСОВ ДАР Ш. ДУШАНБЕ

В Е С Т Н И К

ФИЛИАЛА МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В Г. ДУШАНБЕ

(научный журнал)

СЕРИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

1(2) 2018

П А Ё М И

ФИЛИАЛИ ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ МОСКВА БА НОМИ М.В. ЛОМОНОСОВ ДАР Ш. ДУШАНБЕ

(маҷаллаи илмӣ)

БАХШИ ИЛМҲОИ ТАБИӢ

ДУШАНБЕ

ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В Г. ДУШАНБЕ

ФИЛИАЛИ ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ МОСКВА БА НОМИ М.В. ЛОМОНОСОВ ДАР Ш. ДУШАНБЕ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ОСНОВАН В 2016 ГОДУ.
МАҶАЛЛАИ ИЛМӢ СОЛИ 2016 ТАЪСИС ЁФТААСТ.

В журнале статьи печатаются на русском, таджикском и английском языках.
Дар маҷалла мақолаҳо бо забонҳои русӣ, тоҷикӣ ва англисӣ нашр мешаванд.

СОДЕРЖАНИЕ - МУНДАРИҶА

М А Т Е М А Т И К А И И Н Ф О Р М А Т И К А

Ф И З И К А И Т Е Х Н И К А

Х И М И Я И Г Е О Л О Г И Я

УДК 517.982.256+517.982.252

ЛОКАЛЬНО ЧЕБЫШЁВСКИЕ МНОЖЕСТВА В ПРОСТРАНСТВЕ ℓ_n^∞

Алимов А.Р.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

В работе обобщается двумерный результат А.А. Флерова о чебышёвсости локально чебышёвск из множеств. Показано, что в пространстве ℓ_n^∞ локально чебышёвская кривая является чебышёвским множеством различных задач граничного усреднения.

***Ключевые слова**: чебышёвское множество, локально чебышёвское множество, выпуклость по касательным направлениям.*

Ниже X — вещественное линейное нормированное пространство конечной размерности, $B(x,r)$ — замкнутый шар с центром x и радиусом r, $S(x,r)$ — сфера, $S = S(0,1)$. Множество M называется *чебышёвским множеством*, если оно есть множество существования и множество единственности, т.е. если для каждого $x \in X$ множество $P_M x$ ближайших элементов из M для x одноточечно.

Ниже мы исследуем чебышёвость локально чебышёвских множеств в пространстве ℓ_n^∞ с максимум-нормой.

Понятие *локально чебышёвского множества* было предложено М. В. Балашовым по аналогии с понятием локально выпуклого множества: множество $M \subset X$ называется *локально выпуклым* [5, §1.4] если для любой точки $y \in \overline{M}$ найдется номер $r = r(y) > 0$ такой, что множество $M \cap B(y,r)$ выпукло (см., например, [5, §1.10]). Хорошо известно, что связное локально выпуклое множество выпукло. Аналогично, множество $M \subset X$ называется *локально чебышёвским множеством* если для любой точки $y \in M$ найдется замкнутая окрестность $O(y)$ (с непустой внутренностью) точки y такая, что множество $M \cap O(y)$ является чебышёвским.

Понятно, что локально чебышёвское множество необходимо замкнуто и обладает чебышёвским слоем (возможно неравномерной величины). Также ясно, что в определении локально чебышёвского множества достаточно рассматривать только выпуклые окрестности (по крайней мере в случае рефлексивного пространства). Из соображений компактности в конечномерном

пространстве локально чебышёвское множество является множеством существования и P-конечно (т.е. для любого $x \in X$ множество ближайших точек $P_M x$ из M для x конечно).

Замечание 1.1. Наше определение локальной чебышёвости является более общим и естественным, чем определение Балашова—Флёрова [6], котором локальная чебышёвость множества определяется через его пересечения с шарами. Однако при этом этом кардинально сужается класс пространств, где могут существовать такие множества: если точка лежит внутри рассматриваемого множества, то определение Балашова-Флёрова влечет ощутимое ограничение на шар пространства — его строгую выпуклость [6, §4].

А.А.Флёров, используя понятие локально чебышёвского множества в терминах пересечения с шарами, установил, что в двумерном пространстве любое связное локально чебышёвское множество является чебышёвским. Требование связности множества не может быть снято [6]: двухточечное множество является локально чебышёвским, но не чебышёвским множеством. Элементарное доказательство результата А.А. Флёрова методами геометрической теории приближений в общем двумерном случае дано в [2].

Теорема А. *В двумерном банаховом пространстве связное локально компактное чебышёвское множество является чебышёвским.*

Ниже I — замкнутый промежуток на числовой прямой, т.е. множество вида $(-\infty, a]$, $[a, b]$, $[a, \infty)$ или $(-\infty, \infty)$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Кривая в пространстве X — это множество вида $M = \{\varphi(x) \in X \mid x \in I\}$, $\varphi(\cdot)$ — непрерывная функция на I. Мы предполагаем, что рассматриваемые кривые являются простыми (не имеют точек самопересечения).

В настоящей работе мы обобщаем теорему А на случай пространств ℓ_n^∞ произвольной размерности для случая локально чебышёвской кривой.

Теорема 1. *В пространстве ℓ_n^∞ локально чебышёвская кривая является чебышёвским множеством.*

При доказательстве теоремы А в [2] существенную роль играет понятие выпуклости множества по касательным направлениям единичной сферы и приводимая ниже теорема В. Напомним соответствующие определения из [4].

Для точки $y \in S$ через Λ_y обозначим множество предельных точек выражения $(y - z)/\|y - z\|$ при $z \to y$, $z \in S$ (т.е. Λ_y — *множество полукасательных направлений* к сфере S в точке y). Направление d называется *(глобально) касательным направлением* для сферы S, если для любой точки $y \in S$ условие опорности направления d в точке y влечет, что $d \in \Lambda_y$, т.е. направление d является касательным в точке y. К примеру, в

пространстве ℓ_n^∞, $n \geq 2$, касательными направлениями сферы являются только направления, параллельные ребрам единичного шара (куба). В пространстве ℓ_n^1, $n \geq 3$, касательных направлений к сфере нет.

Множество M называется *выпуклым по направлению* d, если из того, что $x, y \in M$, $(y - x) \| d$, вытекает, что $[x, y] \subset M$.

В работе [4] был установлен следующий результат.

Теорема B. *Если направление является касательным для единичной сферы конечномерного банахова пространства, то всякое чебышёвское множество выпукло в этом направлении.*

В теореме B важно, что направление, по которому исследуется выпуклость чебышёвского множества, является касательным для *всей* сферы. Можно легко построить пример трехмерного пространства (к примеру, $X = \ell^2(2) \oplus_1 \mathbb{R}$) и чебышёвского множества в нем, не выпуклого по направлению, являющемуся касательным к сфере в некоторой точке (но не во всех точках сферы, в которых оно является опорным). В двумерном же банаховом пространстве любое касательное направление в точке сферы является касательным направлением сферы. Более сильный вариант теоремы B для пространства ℓ_n^∞ содержится в теореме D.

Пусть $X = \ell_n^\infty$. Пусть также $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \leq dim X$.

Обозначим $cAff_k(X)$ — класс всех аффинных координатных подпространств из X конечной размерности k, т.е. подпространств вида $\{x \in \ell_n^\infty \mid x_{i_1} = c_1, \ldots, x_{i_k} = c_k\}$ для некоторого фиксированного набора индексов $i_1, \ldots, i_k$ и набора констант $c_1, \ldots, c_k$.

Далее, пусть $M \subset X$, $2 \leq k \leq n$, $P \in cAff_k(X)$, $Q \in cAff_{k-1}(P)$.

Следуя [1] будем говорить, что Q — *локально опорная гиперплоскость* к множеству M в подпространстве P (и записывать это как $Q \in locTan_P(M)$), если найдутся точка $x \in P \cap M$ и ее окрестность $O(x)$ в P такие, что Q является опорной гиперплоскостью к $M \cap O(x)$ в P. Утверждение, что Q — *опорная гиперплоскость* к множеству $M \cap P$ в подпространстве P будет пониматься обычным образом и записываться в виде $Q \in Tan_P(M)$. Следующий результат установлен в [1].

Теорема C. (характеризация чебышёвских множеств в ℓ_n^∞). *Множество $M \neq \varnothing$ является чебышёвским в ℓ_n^∞ тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия*:

а) множество M замкнуто;

b) множество $M \cap P$ связно для любых $k = 1,\ldots,n$ и $P \in cAff_k(\mathbb{R}^n)$;

c) для любых $k = 2,\ldots,n$, $P \in cAff_k(\mathbb{R}^n)$ и $Q \in cAff_{k-1}(P)$ из условия $Q \in locTan_P(M)$ вытекает, что $Q \in Tan_P(M)$ и пересечение $Q \cap M$ одноточечно.

С помощью теоремы С был получен следующий результат (см. [3]).

Теорема D. 1) *Чебышёвское множество в* ℓ_n^∞ *является экстремально чебышёвским. Иными словами, если* Π *— замкнутый промежуток в* ℓ_n^∞, $M \cap \Pi \neq \varnothing$, $M \cap ri\Pi = \varnothing$, *то пересечение* $M \cap \Pi$ *одноточечно.*

Как следствие, если P — координатное подпространство и $M \cap P \neq \varnothing$, то $M \cap P$ — чебышёвское множество в P.

В теореме D riA — относительная внутренность множества A, замкнутый промежуток Π — это пересечение экстремальных (координатных) гиперполос вида $\{x \in \ell_n^\infty \mid a \le f(x) \le b\}$, $-\infty \le a \le b \le +\infty$, $f \in extS^*$, порождаемых в исходном пространстве ℓ_n^∞ экстремальными функционалами из сопряженного пространства.

Замечание 2.2. Из теоремы D вытекает, что если M — локально чебышёвское множество в пространстве ℓ_n^∞, то M — локально чебышёвское множество в любой координатной плоскости $P \in cAff_k(\ell_n^\infty)$, $1 \le k \le n-1$.

Доказательство теоремы 1. Пусть M — чебышёвская кривая в ℓ_n^∞ и пусть $P \in cAff_{n-1}(\ell_n^\infty)$ - произвольная координатная гиперплоскость. Предположим, что пересечение $M \cap P$ непусто. Рассмотри два варианта: 1) пересечение $M \cap P$ несвязно и 2) связно.

Рассмотрим первый случай:

$M \cap P$ несвязно для некоторой координатной гиперплоскости P. (1)

Мы можем считать, что $x_1, x_2 \in M \cap P$, где $x_1 = \varphi(t_1)$, $x_2 = \varphi(t_2)$, $t_1, t_2 \in I$, считая при этом, что $\varphi(t) \notin P$ при $t \in (t_1, t_2)$. Пусть f — экстремальный функционал единичной нормы, задающий плоскость P, т.е. $P = \{x \mid f(x) = c\}$. Обозначим $\grave{u}(t) = f(\varphi(t))$. Непрерывная скалярная функция $\grave{u}(t) - c$ достигает своего максимального по модулю значения в точке $t_0 \in (t_1, t_2)$ на отрезке $[t_1, t_2]$. Без ограничения общности считаем, что $\grave{u}(t_0) > c$. Пусть $x_0 := \grave{u}(t_0)$. По условию найдется выпуклая телесная окрестность V точки $x_0 \in M$ такая, что $V \cap M$ — чебышёвское множество. По этой причине точка t_0 не может быть точкой нестрогого максимума. Хорошо известно (см., например, что [3]), что в ℓ_n^∞ любое чебышёвское множество монотонно линейно связно. Однако это

свойство не выполнено для множества $V \cap M$: кривая $f(\varphi(t))$, очевидно, не монотонна в окрестности точки t_0. Случай (1) невозможен.

Рассмотрим второй случай. По замечанию (2) M — локально чебышёвское множество в гиперплоскости P. Предположим, что $n \geq 3$ и $M \cap Q_\nu$ связно для любой координатной плоскости

$$Q_\nu \in cAff_\nu(P),\ 1 \leq \nu \leq n-2. \tag{2}$$

Тогда по теореме А $M \cap Q_2$ - чебышёвское множество в любой двумерной плоскости

$$Q_2 \in cAff_2(P). \tag{3}$$

Это с учетом теоремы D влечет, что M — чебышёвское множество в любой одномерной плоскости $Q_1 \in cAff_1(P)$. Пусть $3 < n-1$ и $Q_3 \in cAff_3(P)$ — произвольная координатная трехмерная плоскость в P. По теореме С M — чебышёвское множество в Q_3 (конечно, при условии, что пересечение $M \cap Q_3$ непусто). Аналогично, повышая размерность (при условии $4 < n-1$), используя индукцию по размерности ν плоскости $Q_\nu \in cAff_1(P)$, и снова применяя теорему С, получаем, что M — чебышёвское множество в Q_ν для любой плоскости $Q_\nu \in cAff_1(P)$ (при условии, что $M \cap Q_\nu \neq \varnothing$).

Остается рассмотреть случай, когда утверждение (3) не выполнено: $M \cap Q_\nu$ несвязно для некоторой координатной плоскости $Q_\nu \in cAff_\nu(P)$, $1 \leq \nu \leq n-2$. В этом случае легко видеть, что $M \cap P$ также несвязно, так как локально чебышёвская кривая не может содержаться (локально) в гиперплоскости, и мы имеем дело с уже разобранным выше случаем (1).

Теорема 1 доказана.

Направление d будем называать *гиперкасательным направлением* для единичной сферы S, если направление d параллельно некоторой гиперграни единичного шара.

При доказательстве теоремы 1 мы попутно установили следующее обобщение теоремы В.

Теорема 2. *Чебышёвская кривая в ℓ_n^∞ выпукла по любому гиперкасательному направлению к единичной сфере.*

Отметим, что произвольное чебышёвское множество в ℓ_n^∞ не обязано быть выпуклым по гиперкасательному направлению. Соответствующий пример легко построить в пространстве любой размерности $n \geq 3$. Это замечание показывает, что перенесение рассуждений из доказательства теоремы 1 на случай произвольных локально чебышёвских множеств проблематично. Вопрос

о чебышёвости произвольных связных локально чебышевских множеств в пространстве ℓ_n^∞, $n \geq 3$, остается открытым.

Литература

1. Алимов А.Р. Геометрическое строение чебышёвских множеств в ℓ_n^∞ // Функц. анализ и его прил. − 2005. − Т. 39. − С.1-10.
2. Alimov A.R. On approximative properties of locally Chebyshev sets // Proc. Inst. Math. Mech., Natl. Acad. Sci. Azerb. − 2018. − V. 44.
3. Алимов А.Р. Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения / А.Р.Алимов, И.Г.Царьков // УМН. −2016. −Т.1 (427). − С. 3-84.
4. Алимов А.Р. Выпуклость чебышёвских множеств по касательным направлениям / А.Р. Алимов, Е.В. Щепин // УМН. − 2018. − Т. 72. − №1.
5. Половинкин Е. С. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа / Е.С. Половинкин, М.В. Балашов // М., 2004.
6. Флеров А. А. Локально чебышевские множества на плоскости // Матем. Заметки. − 2015. −Т. 97. − № 1.− С. 142-149.

МАҶМӮЪҲОИ ЛОКАЛӢ ЧЕБИШЁВӢ ДАР ФАЗОИ ℓ_n^∞

Алимов А.Р.

Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В. Ломоносов

Дар кор натиҷаи дученакаи А.А. Флерова доир ба Чебишёвӣ будани маҷмӯъҳои локалӣ Чебишёвӣ умумӣ карда мешавад. Нишон дода шудааст, ки дар фазои ℓ_n^∞ хатҳои каҷи локалӣ Чебишёвӣ маҷмӯи Чебишёвии масъалаҳои гуногуни миёнакунонии сарҳадӣ мебошад.

Калидвожаҳо: *маҷмӯи Чебишёвӣ, маҷмӯи локалӣ Чебишёвӣ, барҷастагӣ аз рӯи самтҳои расандагӣ.*

LOCALLY CHEBYSHEVSK SETS IN ℓ_n^∞

Alimov A.R.

Lomonosov Moscow State University

We extend one two-dimensional result by A.A. Flerov on the Chebysev property of locally Chebyshev sets. A locally Chebyshev curve in the space ℓ_n^∞ is shown to be a Chebyshev set.

Key words*: Chebyshev set, locally Chebyshev set, convexity in tangent directions.*

Сведения об авторе. **Алексей Ростиславович Алимов**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории вычислительных методов

МГУ имени М.В. Ломоносова, 119991 Москва, Ленинские Горы, д.1, Механико-математический факультет. Тел. +7 (495) 939-5632. E-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru

УДК 517.968.2

О ПОЛИКЕРН-ФУНКЦИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ И ИХ СВЯЗЬ С СИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Джангибеков Г., Савлатов Ф.

Таджикский национальный университет

В статье даётся обзор работ по поликерн-функциям и поликерн-операторам Бергмана и их связи с сингулярными интегральными операторами по ограниченной области. Вводится понятие поликерн-функция полуцелого порядка через композиции сингулярных операторов с нечётной характеристикой. Изучается алгебра таких операторов.

Ключевые слова: *поликерн-функция, поликерн-оператор Бергмана, сингулярный интеграл, символ оператора, индекс оператора, нётеровость оператора.*

1. Керн-оператор Бергмана и его связь с сингулярными операторами

Пусть D - конечная область комплексной плоскости, содержащая внутри точку $z = 0$ и ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Г, $\{e_k(z)\}, k = 1,2,\dots$ - полная ортонормальная система аналитических в D функций, принадлежащих гильбертову пространству $L^2(D)$.

Керн-функция Бергмана $B(z,\overline{\zeta})$ области D имеет много эквивалентных определений, даваемых в различных терминах. Впервые эта функция была введен С. Бергманом [1, 2] и С. Бохнером [3] в связи с разложением

$$B(z,\overline{\zeta}) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k(z)\overline{e_k(\zeta)}.$$

В монографии Р. Куранта (см. [4], сс. 252, 254) приведено приложение М. Шиффера, где функция $B(z,\overline{\zeta})$ определяется через функции Грина $G(z,\zeta)$ области D по формуле

$$B(z,\overline{\zeta}) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 G(z,\zeta)}{\partial z \partial \overline{\zeta}} = \frac{1}{\pi}\frac{\omega\prime(z)\overline{\omega\prime(\zeta)}}{(1-\omega(z)\overline{\omega(\zeta)})^2}, \qquad (1)$$

где $\omega(z)$ - однолистное конформное отображение области D на единичный круг с центром в начале координат, $\omega(0) = 0$, штрих обозначает производную, а

черта над функцией – комплексное сопряжение. Эта формула позволяет ввести керн-оператор Бергмана

$$(Bf)(z) = \iint_D B(z,\overline{\zeta})f(\zeta)ds_\zeta. \qquad (2)$$

Оператор Бергмана B является ортогональным проектором пространства $L^2(D)$ на его замкнутое подпространство - пространство Бергмана $A_2(D)$, состоящее из всех функций, аналитических в области. Из свойства функции $B(z,\overline{\zeta})$ следует (см. [4]), что она является воспроизводящим ядром оператора B, то есть имеет место равенство

$$(f(z), \overline{B(z,\overline{\zeta})}) = \iint_D B(z,\overline{\zeta})f(\zeta)ds_\zeta = f(z). \qquad (3)$$

Формулы (2) и (3) позволяют получать многие свойства ядра $B(z,\overline{\zeta})$. В частности, отсюда следует, что в случае круговой области $D = \{z: |z| < 1\}$ функция $B(z,\overline{\zeta})$ примет вид

$$B(z,\overline{\zeta}) = \frac{1}{\pi(1 - z\overline{\zeta})^2}$$

и

$$||B(z_0,\overline{\zeta})||_{L^2(D)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}(1 - |z_0|^2)}.$$

Известно [2], что ряд задач для аналитических функций решается с помощью аппарата гильбертова пространства $A_2(D)$ с воспроизводящим ядром $B(z,\overline{\zeta})$.

Введем теперь действующие (и ограниченные) в пространстве $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$ двумерные сингулярные операторы

$$(Sf)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,ds_\zeta, \qquad z \in D,$$

$$(\overline{S}f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\zeta)}{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2}\,ds_\zeta, \qquad z \in D.$$

Тогда для керн-оператора Бергмана B имеет место представление (см. [5], [6])

$$B = I - S\overline{S} + T, \qquad (4)$$

где T - вполне непрерывный в $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$ оператор. Из равенства (4) следует, что оператор Бергмана B также ограничен в $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$.

Равенство (4) применялось многими авторами (см. работы [5]–[15]) при изучении различных алгебр, содержащих сингулярные операторы $S, \overline{S}$ и операторы Бергмана $B, \overline{B}$. Наиболее полное исследование таких операторов приведено в работе [15], где в пространстве

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f(z): |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-2/p}(D)} = ||F||_{L^p}\}$$

$(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ исследован оператор вида

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \quad & aI + bSK + cB + d\overline{B}K + eB + q\overline{B}K + \lambda SBK + \\ & + \mu\overline{B}SK + \nu SB\overline{S} + \gamma SB + \delta B\overline{S} + T, \end{aligned} \tag{5}$$

где $(Kf)(z) = \overline{f(z)}$, T - вполне непрерывный оператор и все коэффициенты при операторах в (5) непрерывные в $\overline{D}$ комплекснозначные функции.

Рассматривая вопрос разрешимости операторов вида (5), прежде всего заметим, что ограниченность сингулярного оператора S в весовом пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ следует из работы Е. Стейна [16] и в силу этого ограниченность оператора Бергмана B вытекает из равенства (4).

Лемма 1. *Интегральные операторы* B, SB, $\overline{B}S$, $SB\overline{S}$ *не являются вполне непрерывными операторами в пространстве* $L^p_{\beta-2/p}(D)$, *причем их ядра теряют непрерывность лишь при совпадении обеих переменных на границе* Γ.

Действительно, в силу воспроизводящего свойства ядра $B(z, \overline{\zeta})$ оператор B имеет бесконечное число собственных функций, соответствующих собственному значению 1, поэтому он не может быть вполне непрерывным оператором. Отсюда следует, что остальные операторы также не являются вполне непрерывными в $L^p_{\beta-2/p}(D)$. В самом деле, пусть, например, оператор SB вполне непрерывен в $L^p_{\beta-2/p}(D)$. Тогда $\overline{S}SB$ как композиция ограниченного оператора $\overline{S}$ и вполне непрерывного SB вполне непрерывен. Однако это противоречит тождеству $\overline{S}SB = (I - \overline{B} + T)B = B - \overline{B}B + TB = B + T$.

Что касается утверждения относительно особенностей ядер операторов SB, $\overline{B}S$ и $SB\overline{S}$, то в случае единичного круга эти композиции явно вычисляются (см. [15]), а в случае произвольной области D нужно использовать конформное отображение D на круг.

Рассмотрим теперь алгебру $\mathfrak{M}$, порожденную всеми действующими в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)(1<p<\infty, 0<\beta<2)$ операторами вида $\mathcal{A}$ из (5), где $T \in \mathfrak{F}$, а через $\mathfrak{F}$ обозначен идеал содержащих в $\mathfrak{M}$ вполне непрерывных операторов. Имеет место

Лемма 2. *Оператор $\mathcal{A}$, заданной формулой (5), является элементом алгебры $\mathfrak{M}$; и обратно, всякий оператор из алгебры $\mathfrak{M}$ представим в виде (5).*

Каждому оператору $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}$ сопоставим в качестве символа матрицу вида

$$\sigma_{\mathcal{A}}(z,t) = \begin{pmatrix} \Delta(z) & 0 \\ 0 & D(t) \end{pmatrix}, \quad \text{где } \Delta(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ \overline{b(z)} & \overline{a(z)} \end{pmatrix}, \qquad z \in \overline{D},$$

$$D(t) = \begin{pmatrix} a(t)+c(t) & \dfrac{e(z)}{a(t)+d(t)} & \dfrac{\delta(t)}{b(t)+\mu(t)} \\ \dfrac{}{q(z)} & & \\ \gamma(t) & b(t)+\lambda(t) & a(t)+\nu(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in \Gamma,$$

то есть матрица-функция $\sigma_{\mathcal{A}}(z,t)$ непрерывна на компакте $D \times \Gamma$. Множество определенных таким образом символов обозначим через $\mathfrak{N}$. Доказывается, что имеет место

Лемма 3. *Символ $\sigma_{\mathcal{A}}(z,t) \in \mathfrak{N}$ оператора $\mathcal{A}$ тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$.*

Далее по теореме С.Г.Михлина (см. [16] стр.121) имеем

Теорема 1. *Для того чтобы произвольный оператор $\mathcal{A}$ из алгебры $\mathcal{M}$ был нётеровым оператором в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)(1<p<\infty, 0<\beta<2)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$|a(z)| \neq |b(z)| \text{ при } z \in \overline{D}, \qquad \det D(t) \neq 0 \text{ при } t \in \Gamma.$$

При выполнении этих условий индекс оператора $\mathcal{A}$ равен

$$\varkappa = -\frac{1}{\pi}[argdetD(t)]|_{\Gamma}.$$

2. Композиция сингулярных интегральных операторов по ограниченной области D

Рассмотрим теперь в $D = \{z: |z| < 1\}$ следующий сингулярный интегральный оператор с простейшей характеристикой $e^{-in\theta}$ для любого целого числа n:

$$(S_n f)(z) = \frac{|n|}{2\pi i^{|n|}} \iint_D \frac{e^{-in\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \qquad (6)$$

где $z \in \overline{D},\ n \neq 0 -$ целое число, $\theta_1 = \arg(\zeta - z), z = x + iy,\ \zeta = \xi + i\eta -$ комплексные точки плоскости. Вычислим композицию $S_n S_{-n}$. Пусть $n > 0$.

$$(S_n S_{-n} f)(z) = \frac{n}{2\pi i^n} \iint_{|\zeta|<1} \frac{e^{-in\theta}}{|\zeta - z|^2} ds_\zeta \frac{n}{2\pi i^n} \iint_{|\sigma|<1} \frac{e^{in\theta_1}}{|\sigma - \zeta|^2} f(\sigma) ds_\sigma. \qquad (7)$$

Используя формулу дифференцирования интегралов со слабой особенностью (см. [17], стр.65) (в комплексном виде):

$$\frac{\partial}{\partial z} \iint_D \frac{u(z,\theta)}{|\zeta - z|} f(\zeta) ds_\zeta = \iint_D \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u(z,\theta)}{|\zeta - z|}\right) f(\zeta) ds_\zeta - f(z) \int_0^{2\pi} u(z,\theta) e^{-i\theta} d\theta \quad (8)$$

и имея ввиду, что

$$\frac{e^{-in\theta}}{|\zeta - z|^2} = \frac{\left(\frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{\zeta - z}\right)^{\frac{n}{2}}}{(\zeta - z)(\overline{\zeta} - \overline{z})} = \frac{1}{(\zeta - z)^{\frac{n}{2}+1} (\overline{\zeta} - \overline{z})^{-\frac{n}{2}+1}},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{-i(n-1)\theta}}{|\zeta - z|}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{(\zeta - z)^{\frac{n}{2}} (\overline{\zeta} - \overline{z})^{-\frac{n}{2}+1}}\right) = \frac{n}{2} \frac{1}{(\zeta - z)^{\frac{n}{2}+1} (\overline{\zeta} - \overline{z})^{-\frac{n}{2}+1}} = \frac{n}{2} \frac{e^{-in\theta}}{|\zeta - z|^2},$$

в формуле (7) имеем $u(\theta) = e^{-i(n-1)\theta}$ и $\int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta} e^{-i\theta_1} d\theta = 0$. В силу этого внешний интеграл в (7) запишем в виде

$$(S_n S_{-n} f)(z) = \frac{(-1)^n n}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{|\zeta|<1} \frac{e^{-i(n-1)\theta}}{|\zeta - z|^2} ds_\zeta \iint_{|\zeta|<1} \frac{e^{in\theta_1}}{|\sigma - \zeta|^2} f(\sigma) ds_\sigma.$$

Поменяв порядок интегрирование, получим

$$(S_n S_{-n} f)(z) = \frac{(-1)^n n}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{|\sigma|<1} f(\sigma) ds_\sigma \iint_{|\zeta|<1} \frac{e^{-i(n-1)\theta} e^{in\theta_1}}{|\zeta - z||\sigma - \zeta|^2} ds_\zeta =$$

$$= \frac{(-1)^n n}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{|\sigma|<1} f(\sigma) ds_\sigma \left(\iint_{|\zeta|<\infty} \frac{e^{-i(n-1)\theta} e^{in\theta_1}}{|\zeta - z||\sigma - \zeta|^2} ds_\zeta - \iint_{|\zeta|>1} \frac{e^{-i(n-1)\theta} e^{in\theta_1}}{|\zeta - z||\sigma - \zeta|^2} ds_\zeta \right).$$

Теперь положим

$$F(z) = \begin{cases} f(\sigma), & \text{если} \quad |\sigma| < 1, \\ 0, & \text{если} \quad |\sigma| > 1. \end{cases}$$

Тогда $S_n S_{-n}$ представим в виде

$$S_n S_{-n} = \frac{(-1)^n n}{2\pi^2}\frac{\partial}{\partial z}\iint_{|\sigma|<\infty} F(\sigma)ds_\sigma \iint_{|\zeta|<\infty} \frac{e^{-i(n-1)\theta}e^{in\theta_1}}{|\zeta-z||\sigma-\zeta|^2}ds_\zeta -$$

$$-\frac{(-1)^n n}{2\pi^2}\frac{\partial}{\partial z}\iint_{|\sigma|<1} f(\sigma)ds_\sigma \iint_{|\zeta|>1} \frac{e^{-i(n-1)\theta}e^{in\theta_1}}{|\zeta-z||\sigma-\zeta|^2}ds_\zeta.$$

Первое слагаемое представляет собой композицию операторов $S_n^{E_2}S_{-n}^{E_2}$ по всей комплексной плоскости E_2 и по формуле С.Г.Михлина (см.[17], сс. 74, 75)

$$(S_n^{E_2}S_{-n}^{E_2}F)(z) = F(z) = f(z).$$

В дальнейшем мы займемся вычислением второго слагаемого. Поскольку там во внутреннем интеграле $|z|<1, |\sigma|<1$, а интегрирование ведется по внешности единичного круга $|\zeta|>1$, то особенность во внутреннем интеграле лежит на границе области $|\zeta|=1$. Поэтому этот интеграл является обычным интегралом Лебега и можно дифференцировать под знаком интеграла, то есть

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{-i(n-1)\theta}e^{in\theta_1}}{|\zeta-z||\zeta-\sigma|^2} = \frac{n}{2}\frac{e^{-in\theta}e^{in\theta_1}}{|\zeta-z|^2|\zeta-\sigma|^2}.$$

В итоге имеем

$$(S_n S_{-n}f)(z) = f(z) - \frac{(-1)^n n^2}{4\pi^2}\iint_{|\sigma|<1} f(\sigma)ds_\sigma \iint_{|\zeta|>1} \frac{e^{-in\theta}e^{in\theta_1}}{|\zeta-z|^2|\sigma-\zeta|^2}ds_\zeta, |z|<1. \quad (9)$$

Введем обозначение

$$J_n(z,\sigma) = \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|>1}\frac{e^{-in\theta}e^{in\theta_1}}{|\zeta-z|^2|\sigma-\zeta|^2}ds_\zeta,\ \theta = \arg(\zeta-z),\ \theta_1 = \arg(\sigma-\zeta), |z|<1. \quad (10)$$

Займемся вычислением интеграла J_n. Для этого представим ядро интеграла в виде

$$\frac{e^{-in\theta}e^{in\theta_1}}{|\zeta-z|^2|\sigma-\zeta|^2} = \frac{\left(\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{\zeta-z}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\zeta-\sigma}{\overline{\zeta}-\overline{\sigma}}\right)^{\frac{n}{2}}}{|\zeta-z|^2|\sigma-\zeta|^2} = \frac{\left(\frac{\zeta-\sigma}{\zeta-z}\right)^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{\overline{\zeta}-\overline{\sigma}}\right)^{\frac{n}{2}-1}}{(\zeta-z)^2(\overline{\zeta}-\overline{\sigma})^2}.$$

Функция $\left(\frac{\zeta-\sigma}{\zeta-z}\right)^{\frac{n}{2}-1}$ - аналитична по ζ во внешности единичного круга $|\zeta|>1$ и на бесконечности равна 1 (выберем такую ветвь однозначной аналитической функции). Разложим эту функцию в степенной ряд в окрестности точки $\zeta=\infty$:

$$\left(\frac{\zeta-\sigma}{\zeta-z}\right)^{\frac{n}{2}-1}=\left(1-\frac{\sigma-z}{\zeta-z}\right)^{\frac{n}{2}-1}=\sum_{k=0}^{N}C_{\frac{n}{2}-1}^{k}(-1)^k\left(\frac{\sigma-z}{\zeta-z}\right)^k,$$

где $N=n/2-1$, если n - четное число и $N=\infty$, если n - нечетное число.

Аналогично имеем

$$\left(\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{\overline{\zeta}-\overline{\sigma}}\right)^{\frac{n}{2}-1}=\left(1+\frac{\overline{\sigma}-\overline{z}}{\overline{\zeta}-\overline{\sigma}}\right)^{\frac{n}{2}-1}=\sum_{l=0}^{N}C_{\frac{n}{2}-1}^{l}\left(\frac{\overline{\sigma}-\overline{z}}{\overline{\zeta}-\overline{\sigma}}\right)^l.$$

Тогда получим

$$J_n(z,\sigma)=\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|>1}\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{\frac{n}{2}-1}^{k}C_{\frac{n}{2}-1}^{l}(-1)^k\frac{(\sigma-z)^k(\overline{\sigma}-\overline{z})^l}{(\zeta-z)^{k+2}(\overline{\zeta}-\overline{\sigma})^{l+2}}ds_\zeta. \qquad (11)$$

Или же, поменяв порядок интегрирования и суммирования, имеем

$$J_n(z,\sigma)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{\frac{n}{2}-1}^{k}C_{\frac{n}{2}-1}^{l}(-1)^k(\sigma-z)^k(\overline{\sigma}-\overline{z})^l\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|>1}\frac{ds_\zeta}{(\zeta-z)^{k+2}(\overline{\zeta}-\overline{\sigma})^{l+2}}.$$

Далее вынесем производные по переменным z и $\overline{\zeta}$, и воспользуемся результатами композиции операторов $S\overline{S}$

$$J_n(z,\sigma)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{\frac{n}{2}-1}^{k}C_{\frac{n}{2}-1}^{l}(-1)^k\frac{(\sigma-z)^k(\overline{\sigma}-\overline{z})^l}{(k+1)!(l+1)!}\frac{\partial^{k+l+2}}{\partial z^{k+1}\partial\overline{\sigma}^{l+1}}\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|>1}\frac{ds_\zeta}{(\zeta-z)(\overline{\zeta}-\overline{\sigma})} \qquad (12)$$

и окончательно получим

$$J_n(z,\sigma)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{\frac{n}{2}-1}^{k}C_{\frac{n}{2}-1}^{l}(-1)^{k-1}\frac{(\sigma-z)^k(\overline{\sigma}-\overline{z})^l}{(k+1)!(l+1)!}\frac{\partial^{k+l+2}}{\partial z^{k+1}\partial\overline{\sigma}^{l+1}}\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{1-z\overline{\sigma}}{\sigma-z}\right|^2=$$

$$=\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{\frac{n}{2}-1}^{k}C_{\frac{n}{2}-1}^{l}(-1)^k\frac{(\sigma-z)^k(\overline{\sigma}-\overline{z})^l}{(k+1)!(l+1)!}\frac{\partial^{k+l+2}}{\partial z^{k+1}\partial\overline{\sigma}^{l+1}}G(z,\sigma), \qquad (13)$$

где $G(z,\sigma)$ - функция Грина для оператора Лапласа в области D:

$$G(z,\sigma)=\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{1-z\overline{\sigma}}{\sigma-z}\right|^2.$$

Лемма 4. *Пусть D - ограниченная односвязная область с границей Ляпунова Γ и $f(z)\in L^p(D), p>1$. Тогда имеет место формула*

$$(S_n S_{-n} f)(z) = f(z) - \iint_D B_n\left(z, \overline{\zeta}\right) f(\zeta) ds_\zeta, \quad z \in D, \tag{14}$$

где

$$B_n(z, \overline{\zeta}) = \frac{n^2}{4\pi} \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{N} (-1)^{k+n-1} C_{\frac{n}{2}-1}^{k} C_{\frac{n}{2}-1}^{l} \frac{(\zeta - z)^k (\overline{\zeta} - \overline{z})^l}{(k+1)!(l+1)!} \frac{\partial^{k+l+2} G(z,\zeta)}{\partial z^{k+1} \partial \overline{\zeta}^{l+1}}, \tag{15}$$

$n > 0$ - целое число; $N = m - 1$ если $n = 2m$ и $N = \infty$, если $n = 2m + 1$,

$$G(z, \sigma) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{1 - z\overline{\sigma}}{\sigma - z} \right|^2, \qquad C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1)}{k!}.$$

2.1. Преобразование ядра $B_n(z, \overline{\zeta})$. Случай $n = 2m$ и $D = \{z: |z| < 1\}$

В этом случае ядро $B_n(z, \overline{\zeta})$ примет вид

$$B_{2m}\left(z, \overline{\zeta}\right) =$$

$$= \frac{m^2}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{k-1} C_{m-1}^{k} C_{m-1}^{l} \frac{(\zeta - z)^k (\overline{\zeta} - \overline{z})^l}{(k+1)!\,(l+1)!} \frac{\partial^{k+l+2}}{\partial z^{k+1} \partial \overline{\zeta}^{l+1}} \ln \left| \frac{1 - z\overline{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2,$$

но

$$\frac{\partial^{k+l+2}}{\partial z^{k+1} \partial \overline{\zeta^{l+1}}} \ln \left| \frac{1 - z\overline{\zeta}}{\zeta - z} \right|^2 = -\frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \overline{\zeta^l}} \frac{1}{(1 - z\overline{\zeta})^2} = -\frac{\partial^k}{\partial z^k} \frac{(l+1)!\, z^l}{(1 - z\overline{\zeta})^{l+2}}.$$

Поэтому

$$B_{2m}(z, \overline{\zeta}) = \frac{m^2}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^k C_{m-1}^{k} C_{m-1}^{l} \frac{(\zeta - z)^k}{(k+1)!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \frac{z^l (\overline{\zeta} - \overline{z})^l}{(1 - z\overline{\zeta})^{l+2}} =$$

$$= \frac{m^2}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{m-1}^{k} \frac{(\zeta - z)^k}{(k+1)!} \frac{\partial^k}{\partial z^k} \sum_{l=0}^{m-1} C_{m-1}^{l} \frac{1}{(1 - z\overline{\zeta})^2} \left(-1 + \frac{1 - |z|^2}{1 - z\overline{\zeta}} \right)^l.$$

Так как

$$\sum_{l=0}^{m-1} C_{m-1}^{l} \left(-1 + \frac{1 - |z|^2}{1 - z\overline{\zeta}} \right)^l = \left(\frac{1 - |z|^2}{1 - z\overline{\zeta}} \right)^{m-1},$$

то имеем

$$B_{2m}(z,\overline{\zeta}) = \frac{m^2}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_{m-1}^k \frac{(\zeta-z)^k}{(k+1)!}\frac{\partial^k}{\partial z^k}[\frac{1}{(1-z\overline{\zeta})^2}(\frac{1-|z|^2}{1-z\overline{\zeta}})^{m-1}].$$

Имеет место тождество

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{m(1-|z|^2)^{m-1}}{(1-z\overline{\zeta})^{m+1}} =$$

$$= (k+1)!\sum_{l=0}^{k} C_m^{k+1}C_k^l(\overline{\zeta}-\overline{z})^{k-l}(1-|z|^2)^l\frac{(1-|z|^2)^{m-k-1}\overline{\zeta^l}}{(1-z\overline{\zeta})^{m+k+1}}. \qquad (16)$$

Поставив это значение в предыдущее равенство, получим

$$B_{2m}(z,\overline{\zeta}) =$$

$$= \frac{m}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_{m-1}^k\frac{(\zeta-z)^k}{(1-z\overline{\zeta})^{m+k+1}}\sum_{l=0}^{k} C_m^{k+1}C_k^l(\overline{\zeta}-\overline{z})^{k-l}\overline{\zeta^l}(1-|z|^2)^{m-1-k+l}.$$

Теперь заменим индекс сумирования $k = l+\nu$, где ν меняется от 0 до $m-1$, тогда l будет меняться от 0 до $m-1-\nu$:

$$B_{2m}(z,\overline{\zeta}) =$$

$$= \frac{m}{\pi}\sum_{\nu=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1-\nu}(-1)^{l+\nu}C_{m-1}^{l+\nu}\frac{(\zeta-z))^{l+\nu}}{(1-z\overline{\zeta})^{m+1+l+\nu}}C_m^{l+\nu+1}C_{l+\nu}^l(\overline{\zeta}-\overline{z})^\nu\overline{\zeta^l}(1-|z|^2)^{m-1-\nu} =$$

$$= \frac{m}{\pi}\sum_{\nu=0}^{m-1}(-1)^\nu C_m^{\nu+1}\frac{|\zeta-z|^{2\nu}(1-|z|^2)^{m-1-\nu}}{(1-z\overline{\zeta})^{m+1+\nu}}\sum_{l=0}^{m-1-\nu}(-1)^l C_{m-1}^{l+\nu}C_{l+\nu}^l(\frac{\overline{\zeta}(\zeta-z)}{1-z\overline{\zeta}})^l.$$

Так как $C_{m-1}^{l+\nu}C_{l+\nu}^l = C_{m-1-\nu}^l C_{m-1}^\nu$, то имеем

$$B_{2m}(z,\overline{\zeta}) =$$

$$= \frac{m}{\pi}\sum_{\nu=0}^{m-1}(-1)^\nu C_m^{\nu+1}C_{m-1}^\nu\frac{|\zeta-z|^{2\nu}(1-|z|^2)^{m-1-\nu}}{(1-z\overline{\zeta})^{m+1+\nu}}\sum_{l=0}^{m-1-\nu}(-1)^l C_{m-1-\nu}^l(\frac{\overline{\zeta}(\zeta-z)}{1-z\overline{\zeta}})^l$$

Внутренняя сумма равна

$$\sum_{l=0}^{m-1-\nu}(-1)^l C_{m-1-\nu}^l(\frac{\overline{\zeta}(\zeta-z)}{1-z\overline{\zeta}})^l = (\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\overline{\zeta}})^{m-1-\nu}.$$

Поэтому получим

$$B_{2m}(z,\overline{\zeta}) = \frac{m}{\pi}\sum_{\nu=0}^{m-1}(-1)^\nu C_m^{\nu+1}C_{m-1}^\nu\frac{|\zeta-z|^{2\nu}[(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)]^{m-1-\nu}}{(1-z\overline{\zeta})^{2m}}.$$

Заменив индекс суммирования $\nu+1$ на k и учитывая, что $C_{m-1}^{k-1}=\frac{k}{m}C_m^k$, окончательно получим явную формулу для ядра $B_{2m}(z,\overline{\zeta})$ интегрального оператора из правой части (13)

$$B_{2m}(z,\overline{\zeta})=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}k(C_m^k)^2\frac{|\zeta-z|^{2(k-1)}[(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)]^{m-k}}{(1-z\overline{\zeta})^{2m}}. \qquad (17)$$

Заметим, что непосредственными вычислениями можно показать, что в рассматриваемом случае ядро $B_{2m}(z,\overline{\zeta})$ можно представить в виде

$$B_{2m}(z,\overline{\zeta})=-\frac{1}{\pi((m-1)!)^2}\frac{\partial^{2m}}{\partial z^m\partial\overline{\zeta}^m}|\zeta-z|^{2(m-1)}\ln\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{\zeta-z}\right|^2, \qquad (18)$$

то есть функция $B_{2m}(z,\overline{\zeta})$ - представляется через $2m$ - ое производное от функции Грина для полигармонического уравнения (см. [18] стр. 225).

Формула (16) для ядра $B_{2m}(z,\overline{\zeta})$ была получена в работе [19], где доказано, что интегральный оператор

$$(B_{2m}f)(z)=\iint_D B_{2m}\left(z,\overline{\zeta}\right)f(\zeta)ds_\zeta \qquad (19)$$

имеет воспроизводящее свойство $(B_{2m}f)(z)=f(z)$ для полианалитических функций конечного порядка m, то есть для функций области D, таких, что представимы в виде

$$f(z)=h_0(z)+\overline{z}h_1(z)+\cdots+\overline{z}^{m-1}h_{m-1}(z),$$

где $h_0,h_1,\dots,h_{m-1}$ - аналитические в D функции. Поэтому функцию $B_{2m}(z,\overline{\zeta})$ будем называть поликерн-функцией Бергмана, а интегральный оператор B_{2m} из (18) - поликерн-оператором Бергмана.

Другим способом формула (16) для поликерн-функции $B_{2m}(z,\overline{\zeta})$ получена в работе А. Д. Кошелева [20], а именно указанный автор, вводя пространство $A_2^m(D)$ функций, полианалитических в D и принадлежащих $L^2(D)$ со скалярным произведением и нормой L^2, доказывает, что система многочленов $\{e_{kl}(z)\}_{k=0}^{\infty}$, $l=0,1,\dots,m-1$,

$$e_{kl}(z)=\sqrt{\frac{k+l+1}{\pi}}\frac{1}{(k+l)!}\frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k\overline{z}^l}(1-|z|^2)^{k+l}$$

является полной ортонормированной в $A_2^m(D)$ и ряд

$$B_{2m}(z,\overline{\zeta})=\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{\infty}e_{kl}(z)\overline{e_{kl}(\zeta)}$$

имеет сумму (16). Отметим, что поликерн-ядро $B_{2m}(z,\overline{\zeta})$ в случае многосвязной области введен А. Джураевым в [5] также с помощью композиции операторов $S_{2m}\overline{S}_{2m}$.

2.2. Сингулярные интегральные уравнения с чётными характеристиками и поликерн-операторами B_{2m}

Интегральные уравнения, содержащие сингулярные операторы с чётной характеристикой S_{2m} и поликерн-операторами B_{2m}, изучены в ряде работ (см. напр. [19], [21]-[23]). Так, в работах [19], [21] в пространствах $L^p_{\beta-2/p}(D)(1<p<\infty,0<\beta<2)$ изучается банахова алгебра $\mathfrak{M}$, порожденная всеми операторами вида

$$(Af)(z)\equiv a(z)f(z)+b(z)\big(S_{2m}\overline{f}\big)(z)+c(z)(B_{2m}f)(z)+(Tf)(z),z\in D,\ (20)$$

где $a(z),b(z),c(z)$ - комплекснозначные непрерывные в $\overline{D}=D\cup\Gamma$ функции, $T-$ вполне непрерывный в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ оператор. Доказывается, что алгебра $\mathfrak{M}$ совпадает с совокупностью всех операторов вида (20). Каждому оператору $A\in\mathfrak{M}$ сопоставляется в качестве символа матрица

$$\sigma_A(z,t)=\begin{pmatrix}a(z) & b(z) & 0\\ \overline{b(z)} & \overline{a(z)} & 0\\ 0 & 0 & a(t)+c(t)\end{pmatrix},\quad z\in\overline{D},\quad t\in\Gamma,$$

то есть матрица-функция $\sigma_A(z,t)$ непрерывна на компакте $\overline{D}\cup\Gamma$. Символы $\sigma_A(z,t)$ также составляют алгебру $\mathfrak{N}$. Имеет место

Теорема 2. *Для того чтобы произвольный оператор* $A \in \mathcal{M}$ *был н в пространстве* $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$det\sigma_A(z,t) \neq 0 \text{ для } \forall z \in \overline{D}, \qquad \forall t \in \Gamma.$$

Индекс нётерового оператора A алгебры $\mathcal{M}$ *подсчитывается по формуле*

$$\varkappa = -\frac{1}{\pi}\left[\arg\big(a(t) + c(t)\big)\right]\Big|_\Gamma.$$

Отметим, что в случае произвольной области D поликерн-оператор $B_{2m}(z,\overline{\zeta})$ наряду с формулой (15) можно определить по формуле

$$B_{2m}f = Bf + \sum_{k=1}^{m-1} S_k B\overline{S_k}, \quad \text{где} \quad \overline{S_k} = -S_{-k},$$

где B - керн-оператор Бергмана области D из (2) с ядром (1).

В работе [19] для характеристического оператора A из (20) при $T = 0$, постоянных коэффициентах a, b, c в единичном круге $D = \{z: |z| < 1\}$ при выполнении условий н $|a| \neq |b|$, $a + c \neq 0$ найден обратный оператор

$$A^{-1}f = \frac{1}{|a|^2 - |b|^2}\left\{\overline{a}f - bS_{2m}\overline{f} + \frac{c\overline{a} - |b|^2}{a + c}B_{2m}f\right\},$$

где поликерн-ядро $B_{2m}(z,\overline{\zeta})$ оператора B_{2m} явно определяется по формуле (17).

В работе [23] теорема 2 обобщена для оператора вида

$$A \equiv aI + bK + cS_{2m} + dS_{-2m}K + \Sigma_{n=1}^{m}(\nu_{-n}B_{-2n} + \nu_n B_n K) + T,$$

где I - единичный оператор, $Kf = \overline{f}$, а все коэффициенты при операторах непрерывные комплекснозначные функции в $\overline{D}$.

2.3. Преобразование ядра $B_n(z,\overline{\zeta})$. Случай $n=2m-1$ и $D=\{z:|z|<1\}$

Как следует из полученной выше формулы (15), в случае, когда $n=2m-1$ и $D=\{z:|z|<1\}$ ядро $B_n(z,\overline{\zeta})$ имеет вид

$$B_n\big(z,\overline{\zeta}\big)=$$

$$=\frac{n^2}{4\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{k+n-1}C_{\frac{n}{2}-1}^{k}C_{\frac{n}{2}-1}^{l}\frac{(\zeta-z)^k(\overline{\zeta}-\overline{z})^l}{(k+1)!\,(l+1)!}\frac{\partial^{k+l+2}}{\partial z^{k+1}\partial\overline{\zeta}^{l+1}}\ln\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{\zeta-z}\right|^2.$$

Выполнив операцию дифференцирования по переменной $\overline{\zeta}$, имеем

$$B_n\big(z,\overline{\zeta}\big)=\frac{n^2(-1)^n}{4\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kC_{\frac{n}{2}-1}^{k}\frac{(\zeta-z)^k}{(k+1)!}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\sum_{l=0}^{\infty}C_{\frac{n}{2}-1}^{l}\left(-1+\frac{1-|z|^2}{1-z\overline{\zeta}}\right)^l\frac{1}{(1-z\overline{\zeta})^2}. \tag{21}$$

Используя разложение $\sum_{l=0}^{\infty}C_\alpha^l(z-1)^l=z^\alpha,\quad C_\alpha^l=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-l+1)}{l!}$, во внутренней сумме имеем

$$\frac{1}{(1-z\overline{\zeta})^2}\sum_{l=0}^{\infty}C_{\frac{n}{2}-1}^{l}\left(-1+\frac{1-|z|^2}{1-z\overline{\zeta}}\right)^l=\frac{(1-|z|^2)^{\frac{n}{2}-1}}{(1-z\overline{\zeta})^{\frac{n}{2}+1}}.$$

Тогда получим

$$B_n(z,\overline{\zeta})=\frac{n^2(-1)^n}{4\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kC_{\frac{n}{2}-1}^{k}\frac{(\zeta-z)^k}{(k+1)!}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{(1-|z|^2)^{\frac{n}{2}-1}}{(1-z\overline{\zeta})^{\frac{n}{2}+1}}. \tag{22}$$

Посчитаем производную по переменной z:

$$I_n=\frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{(1-|z|^2)^\alpha}{(1-z\overline{\zeta})^{\alpha+2}}=\sum_{j=0}^{k}C_k^j\{(1-z\overline{\zeta})^{-(\alpha+2)}\}^{(j)}\{(1-|z|^2)^\alpha\}^{(k-j)}=$$

$$=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j(\alpha+2)(\alpha+3)\cdots(\alpha+1+j)\cdot\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+j+1)\times$$

$$\times\overline{\zeta}^j\overline{z}^{k-j}(1-z\overline{\zeta})^{-(\alpha+2+j)}(1-|z|^2)^{\alpha-k+j}.$$

Поскольку

$$(\alpha+1+j)(\alpha+j)\cdots(\alpha+2)\cdot\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+j+1)=\frac{(k+1)!}{\alpha+1}C_{\alpha+1+j}^{k+1},$$

то имеем

$$I_n=\frac{(k+1)!}{\alpha+1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^jC_{\alpha+1+j}^{k+1}\frac{\overline{\zeta}^j\overline{z}^{k-j}(1-|z|^2)^{\alpha-k+j}}{(1-z\overline{\zeta})^{\alpha+2+j}}=$$

$$=\frac{(k+1)!}{\alpha+1}\frac{(1-|z|^2)^{\alpha-k}}{(1-z\overline{\zeta})^{\alpha+2+k}}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^jC_{\alpha+1+j}^{k+1}\overline{\zeta}^j(1-|z|^2)^j\overline{z}^{k-j}(1-z\overline{\zeta})^{k-j}.$$

Выражение $(-1)^{k-j}\overline{z}^{k-j}(1-z\overline{\zeta})^{k-j}$ преобразуем следующим образом:

$$(-1)^{k-j}\overline{z}^{k-j}(1-z\overline{\zeta})^{k-j}=-[|z|^2\overline{\zeta}-\overline{z}]^{k-j}=-[|z|^2\overline{\zeta}-\overline{\zeta}+(\overline{\zeta}-\overline{z})]^{k-j}=$$

$$=-[(\overline{\zeta}-\overline{z})-\overline{\zeta}(1-|z|^2)]^{k-j}=\sum_{l=0}^{k-j}(-1)^{l-1}C_{k-j}^l(\overline{\zeta}-\overline{z})^{k-j-l}(1-|z|^2)^l\overline{\zeta}^l$$

и, вводя обозначение

$$A=\frac{(k+1)!}{\alpha+1}\frac{(1-|z|^2)^{\alpha-k}}{(1-z\overline{\zeta})^{\alpha+2+k}},$$

получим

$$I_n=A\cdot\sum_{j=0}^{k}C_k^jC_{\alpha+1+j}^{k+1}\sum_{l=0}^{k-j}(-1)^{l-1}C_{k-j}^l(\overline{\zeta}-\overline{z})^{k-j-l}(1-|z|^2)^{j+l}\overline{\zeta}^{j+l}.$$

Изменим индекс суммирования $l+j=\nu$, то есть $l=\nu-j$, тогда

$$I_n=A\cdot\sum_{\nu=0}^{k}\sum_{j=0}^{\nu}(-1)^{\nu-j-1}C_k^jC_{\alpha+1+j}^{k+1}C_{k-j}^{\nu-j}(\overline{\zeta}-\overline{z})^{k-\nu}\overline{\zeta}^{\nu}(1-|z|^2)^{\nu}.$$

Так как

$$C_{k-j}^{\nu-j}C_k^j=\frac{(k-j)!}{(k-\nu)!\,(\nu-j)!}\cdot\frac{k!}{j!\,(k-j)!}=\frac{\nu!}{j!\,(\nu-j)!}\cdot\frac{k!}{(k-\nu)!\,\nu!}=C_k^{\nu}C_{\nu}^j,$$

то

$$I_n = A \cdot \sum_{\nu=0}^{k} \sum_{j=0}^{\nu} (-1)^{\nu-j-1} C_k^{\nu} C_{\alpha+1+j}^{k+1} C_{\nu}^{j} (\overline{\zeta} - \overline{z})^{k-\nu} \overline{\zeta}^{\nu} (1 - |z|^2)^{\nu} =$$

$$= A \cdot \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu-1} C_k^{\nu} (\overline{\zeta} - \overline{z})^{k-\nu} \overline{\zeta}^{\nu} (1 - |z|^2)^{\nu} \sum_{j=0}^{\nu} (-1)^{j} C_{\nu}^{j} C_{\alpha+1+j}^{k+1}.$$

Приняв во внимание тождество $\sum_{j=0}^{\nu} (-1)^j C_{\nu}^{j} C_{\alpha+1+j}^{k+1} = (-1)^{\nu} C_{\alpha+1}^{k+1-\nu}$, получим

$$I_n = -\frac{(k+1)!}{\alpha+1} \frac{(1-|z|^2)^{\alpha-k}}{(1-z\overline{\zeta})^{\alpha+2+k}} \cdot \sum_{\nu=0}^{k} C_k^{\nu} C_{\alpha+1}^{k+1-\nu} (\overline{\zeta} - \overline{z})^{k-\nu} \overline{\zeta}^{\nu} (1 - |z|^2)^{\nu}. \quad (23)$$

Поставив это значение в (22) и учитывая, что $\alpha = \frac{n}{2} - 1$, получим

$$B_n(z, \overline{\zeta}) =$$

$$\frac{n(-1)^n}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-1} C_{\frac{n}{2}-1}^{k} C_k^{l} C_{\frac{n}{2}}^{k+1-l} (\zeta - z)^k (\overline{\zeta} - \overline{z})^{k-l} \frac{(1-|z|^2)^{\frac{n}{2}-1-k+l} \overline{\zeta}^{l}}{(1-z\overline{\zeta})^{\frac{n}{2}+1+k}}.$$

Изменим индекс суммирования $k - l = \nu$, то есть имеем

$$B_n(z, \overline{\zeta}) = \frac{n(-1)^n}{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu-1} C_{\frac{n}{2}}^{\nu+1} \frac{|\zeta - z|^{2\nu} (1-|z|^2)^{\frac{n}{2}-1-\nu}}{(1-z\overline{\zeta})^{\frac{n}{2}+1+\nu}} \times$$
$$\times \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l} C_{\frac{n}{2}+1}^{l+\nu} C_{l+\nu}^{l} \left(\frac{\overline{\zeta}(\zeta - z)}{1 - z\overline{\zeta}}\right)^{l}. \quad (24)$$

Поскольку $C_{\frac{n}{2}+1}^{l+\nu} C_{l+\nu}^{l} = C_{\frac{n}{2}-1}^{\nu} C_{\frac{n}{2}-1-\nu}^{l}$, то внутренняя сумма в (24) примет вид

$$\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l} C_{\frac{n}{2}+1}^{l+\nu} C_{l+\nu}^{l} \left(\frac{\overline{\zeta}(\zeta - z)}{1 - z\overline{\zeta}}\right)^{l} = C_{\frac{n}{2}-1}^{\nu} \sum_{l=0}^{\infty} C_{\frac{n}{2}-1-\nu}^{l} \left(-1 + \frac{1 - |\zeta|^2}{1 - z\overline{\zeta}}\right)^{l} =$$
$$= C_{\frac{n}{2}-1}^{\nu} \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - z\overline{\zeta}}\right)^{\frac{n}{2}-1-\nu}.$$

Поставив это значение в (24) и учитывая, что $\frac{n}{2} C_{\frac{n}{2}-1}^{\nu} = (\nu + 1) C_{\frac{n}{2}}^{\nu+1}$, получим

$$B_n(z,\overline{\zeta}) = \frac{(-1)^n}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu-1}(\nu+1)(C_{\frac{n}{2}}^{\nu+1})^2\frac{|\zeta-z|^{2\nu}[(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)]^{\frac{n}{2}-1-\nu}}{(1-z\overline{\zeta})^n}.$$

Если заменить $\nu+1=k$, где k изменяется от 1 до ∞, то окончательно при $n=2m+1$ получим

$$B_n(z,\overline{\zeta}) = \frac{1}{\pi(1-z\overline{\zeta})^n}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k(C_{\frac{n}{2}}^{k})^2|\zeta-z|^{2(k-1)}[(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)]^{\frac{n}{2}-k}. \quad (25)$$

Если теперь объединить формулы (17) и (25), то получим следующую формулу для ядра $B_n(z,\overline{\zeta})$:

$$B_n(z,\overline{\zeta}) = \frac{1}{\pi(1-z\overline{\zeta})^n}\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}k(C_{\frac{n}{2}}^{k})^2|\zeta-z|^{2(k-1)}[(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)]^{\frac{n}{2}-k}, \quad (26)$$

где здесь $N=m$, если $n=2m$ и $N=\infty$, если $n=2m-1$ и

$$C_\alpha^k = \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{n}{2}-k+1\right)}{k!}.$$

Следует здесь отметить, что при $n=2m-1$ поликерн-функцию $B_n(z,\overline{\zeta})$ из (26) можно выразить через функцию Лежандра первого рода с полуцелым индексом $P_{\frac{n}{2}}(\sigma)$. Действительно, перепишем сумму (26) в виде

$$B_n(z,\overline{\zeta}) = \frac{[(1-|z|^2)(1-|\zeta|)^2]^{\frac{n}{2}-1}}{(1-z\overline{\zeta})^n}\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}k(C_{\frac{n}{2}}^{k})^2\left(\frac{|\zeta-z|^2}{(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)}\right)^{k-1}. \quad (27)$$

Введем обозначение

$$x = -\frac{|\zeta-z|^2}{(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)}.$$

Учитывая, что $0 \le (1-|z|^2)(1-|\zeta|^2) = |1-z\overline{\zeta}|^2 - |\zeta-z|^2 \le 1$, то имеем, что $-\infty < x < 0$ и сумму в правой части (27) в случае нечетного n представим в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k\left(C_{\frac{n}{2}}^{k}\right)^2\left(\frac{|\zeta-z|^2}{(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)}\right)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}k\left(C_{\frac{n}{2}}^{k}\right)^2x^{k-1} = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(C_{\frac{n}{2}}^{k}\right)^2x^k. \quad (28)$$

Сумма под дифференциалом представляется в виде (см.[24], стр.1024)

$$\sum_{k=0}^{\infty}(C_{\frac{n}{2}}^{k})^2 x^k = F(-\frac{n}{2},-\frac{n}{2},1;x) = (1-x)^{\frac{n}{2}} P_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad -\infty < x < 0.$$

Теперь продифференцировав данную сумму по x, получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(C_{\frac{n}{2}}^{k}\right)^2 x^k = \frac{\partial}{\partial x}(1-x)^{\frac{n}{2}} P_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) =$$
$$= -\frac{n}{2}(1-x)^{\frac{n}{2}-1} P_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + (1-x)^{\frac{n}{2}}\frac{\partial}{\partial x} P_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Используя формулу дифференцирования (см. [24], стр. 156)

$$\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial z} = \frac{\nu}{z^2-1}\left(zP_\nu(z) - P_{\nu-1}(z)\right)$$

и учитывая, что $z = \frac{1+x}{1-x}, \nu = \frac{n}{2}$, будем иметь

$$\frac{\partial P_\nu(z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\nu}{z^2-1}\left(zP_\nu(z) - P_{\nu-1}(z)\right)\frac{\partial z}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{(1-x)^2}, \quad \frac{1}{z^2-1} = \frac{(1-x)^2}{4x}, \quad \frac{\nu}{z^2-1}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{n}{4x}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x} P_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{n}{4x}\left[\frac{1+x}{1-x} P_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - P_{\frac{\nu}{2}-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right].$$

Поставив это значение в правую часть (28), получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(C_{\frac{n}{2}}^{k}\right)^2 x^k = -\frac{n}{2}(1-x)^{\frac{n}{2}-1} P_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) +$$

$$+(1-x)^{\frac{n}{2}}\frac{n}{4x}\left[\frac{1+x}{1-x} P_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - P_{\frac{\nu}{2}-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right] =$$

$$= \frac{n(1-x)^{\frac{n}{2}}}{4x}\left[P_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - P_{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right].$$

Таким образом, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(C_{\frac{n}{2}}^{k}\right)^2 x^k = \frac{n(1-x)^{\frac{n}{2}}}{4x}\left[P_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - P_{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right], \tag{29}$$

$$x = -\frac{|\zeta - z|^2}{(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)}, \quad 1 - x = 1 + \frac{|\zeta - z|^2}{(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)} =$$

$$= \frac{|1 - z\overline{\zeta}|^2}{(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)},$$

$$1 + x = \frac{\left|1 - z\overline{\zeta}\right|^2 - 2\left|\zeta - z\right|^2}{(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)}, \quad \frac{1+x}{1-x} = 1 - 2\frac{|\zeta - z|^2}{|1 - z\overline{\zeta}|^2}.$$

Поставив эти значения в формулу (29), получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(C_{\frac{n}{2}}^{k}\right)^2 x^k = -\frac{n}{4}\left[\frac{|1-z\overline{\zeta}|^2}{(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)}\right]^{\frac{n}{2}}\frac{(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)}{|\zeta-z|^2} \times$$

$$\times\left[P_{\frac{n}{2}}\left(1 - 2\frac{|\zeta-z|^2}{|1-z\overline{\zeta}|^2}\right) - P_{\frac{n}{2}-1}\left(1 - 2\frac{|\zeta-z|^2}{|1-z\overline{\zeta}|^2}\right)\right].$$

Внеся это значение в формулу (27), для ядра $B_n(z, \overline{\zeta})$ получим следующее представление:

$$B_n\left(z, \overline{\zeta}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-in\theta}}{|1-z\overline{\zeta}|^2}\frac{1}{\sigma}\left(P_{\frac{n}{2}}(1-2\sigma) - P_{\frac{n}{2}-1}(1-2\sigma)\right), \tag{30}$$

где $n = 2m + 1$, $\theta = \arg\left(1 - z\overline{\zeta}\right)$, $\sigma = \left|\frac{\zeta - z}{1 - z\overline{\zeta}}\right|^2$, $P_{\frac{n}{2}}(t)(x)$ – функция Лежандра первого рода.

2.4. Приведение ядра $B_n(z, \overline{\zeta})$ из (26) к другому виду

При $n = 2m - 1$ преобразуем ядро $B_n\left(z, \overline{\zeta}\right)$ из (26) следующим образом. Поскольку $(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2) = |1 - z\overline{\zeta}|^2 - |\zeta - z|^2$, то запишем формулу (26) в виде

$$B_n(z,\overline{\zeta}) = \frac{e^{-in\alpha}}{\pi|1-z\overline{\zeta}|^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k\left(C_{\frac{n}{2}}^{k}\right)^2\sigma^{k-1}(1-\sigma)^{\frac{n}{2}-k}, \qquad (31)$$

где $\alpha = \arg\left(1-z\overline{\zeta}\right)$, $\sigma = \left|\frac{\zeta-z}{1-z\overline{\zeta}}\right|^2$, $|\sigma|<1$.

Далее введем обозначение $\nu = n/2$ и преобразуем сумму из (31) следующим образом

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k(C_\nu^k)^2\sigma^{k-1}(1-\sigma)^{\nu-k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k(C_\nu^k)^2\sigma^{k-1}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j C_{\nu-k}^{j}\sigma^j.$$

Раскрывая внутреннюю сумму, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k(C_m^k)^2\sigma^{k-1}(1-\sigma)^{\nu-k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma^{k-1}\sum_{j=1}^{k}\nu\cdot(C_m^j)^2C_{\nu-j}^{k-j}.$$

Если учесть, что имеет место тождество $\sum_{\nu=1}^{k}\nu\cdot(C_m^\nu)^2C_{m-\nu}^{k-\nu} = kC_m^kC_{m+k-1}^k$, то имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k(C_\nu^k)^2\sigma^{k-1}(1-\sigma)^{\nu-k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}kC_\nu^kC_{\nu+k-1}^k\sigma^{k-1}. \qquad (32)$$

Поскольку

$$C_\nu^k = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)}{k!}, \quad C_{\nu+k-1}^k = \frac{(\nu+k-1)(\nu+k-2)\cdots\nu}{k!} = \frac{(\nu)_k}{k!},$$

$$(-1)^{k-1}C_\nu^k = -\frac{(-\nu)(-\nu+1)\cdots(-\nu+k-1)}{k!} = -\frac{(-\nu)_k}{k!},$$

где $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$ - символ Похгаммера, то правую часть равенства (32) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}kC_\nu^kC_{\nu+k-1}^k\sigma^{k-1} = -\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{(-\nu)_k(\nu)_k}{(k!)^2}\sigma^{k-1} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\sigma}\left[1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-m)_k(m)_k}{(k!)^2}\sigma^k\right] = -\frac{\partial}{\partial\sigma}F(-\nu,\nu,1;\sigma),$$

где F – гипергеометрическая функция $F(-\nu,\nu,1;\sigma)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\nu)_k(\nu)_k}{(k!)^2}\sigma^k$.

В итоге для ядра $B_n(z,\overline{\zeta})$ получили следующую формулу:

$$B_n(z,\overline{\zeta})=\frac{e^{-in\alpha}}{\pi|1-z\overline{\zeta}|^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}kC_{\frac{n}{2}}^{k}C_{\frac{n}{2}+k-1}^{k}\sigma^{k-1}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}e^{-in\alpha}}{\pi|1-z\overline{\zeta}|^2}\frac{\partial}{\partial\sigma}F(-\frac{n}{2},\frac{n}{2},1;\sigma), \qquad (33)$$

где

$$\sigma=\left|\frac{\zeta-z}{1-z\overline{\zeta}}\right|^2,\quad 0<\sigma<1,\quad n=2m+1.$$

2.5. Воспроизводящее свойство поликерн-оператора Бергмана $(B_nf)(z)$ при $n=2m-1$

Пусть $D=\{z:|z|<1\}$.

Определение. *Функцию $f(z)$ назовем полианалитической функцией полуцелого порядка $\frac{n}{2}$ в области, если в этой области она представляется в виде*

$$f(z)=(1-|z|^2)^{\frac{n}{2}-1}h_0(z)+\sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\overline{z}^{\nu}h_\nu(z), \qquad (34)$$

где $h_\nu(z)$ – аналитические в D функции и n - нечетное число.

Теорема 3. *Для всякой полианалитической функции полуцелого порядка $\frac{n}{2}$ в области D справедлива формула*

$$\iint_D B_n\left(z,\overline{\zeta}\right)f(\zeta)ds_\zeta=f(z)\quad\text{для}\quad\forall z\in D. \qquad (35)$$

Доказательство. Сначала докажем справедливость формулы (35) для точки $z=0$. Используя представление (33) поликерн-функции $B_n(z,\overline{\zeta})$, вычислим скалярное произведение $(f(z),\overline{B_n(0,\overline{\zeta})})$:

$$\left(f(z),\overline{B_n\left(0,\overline{\zeta}\right)}\right)=(B_nf)(0)=$$

$$= \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k C_{\frac{n}{2}}^{k} C_{\frac{n}{2}+k-1}^{k} |\zeta|^{2(k-1)} f(\zeta) ds_{\zeta} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k C_{\frac{n}{2}}^{k} C_{\frac{n}{2}+k-1}^{k} |\zeta|^{2(k-1)} ((1-|z|^2)^{\frac{n}{2}-1} h_0(z) + \sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \overline{\zeta}^{\nu} h_{\nu}(\zeta)) ds_{\zeta}.$$

Разложим аналитические функции $h_{\nu}(\zeta)$ в ряд Тейлора по степеням ζ^l:

$$h_{\nu}(\zeta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{h_{\nu}^{(l)}(0)}{l!} \zeta^l$$

и, учитывая то, что $(\zeta^{\nu}, \zeta^l) = 0$ при $\nu \neq l$, получим

$$\left(f(\zeta), \overline{B_n\left(0, \overline{\zeta}\right)}\right) = \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k C_{\frac{n}{2}}^{k} C_{\frac{n}{2}+k-1}^{k} |\zeta|^{2(k-1)} ((1 -$$

$$-|\zeta|^2)^{\frac{n}{2}-1} h_0(0) + \sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} |\zeta|^{2\nu} h_{\nu}^{(\nu)}(0)) ds_{\zeta} =$$

$$= h_0(0) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k C_{\frac{n}{2}}^{k} C_{\frac{n}{2}+k-1}^{k} \frac{\Gamma(k)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{h_{\nu}^{(\nu)}(0)}{\nu!} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k (C_{\frac{n}{2}}^{k})^2 \frac{\Gamma(k+\nu)\Gamma(\frac{n}{2}+1-k))}{\Gamma(\frac{n}{2}+1+\nu))} =$$

$$= h_0(0) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} C_{\frac{n}{2}}^{k} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{h_{\nu}^{(\nu)}(0)}{\nu!} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} C_{\frac{n}{2}}^{k} \frac{k C_{\frac{n}{2}}^{k} \cdot (k+\nu-1)!}{\left(\frac{n}{2}+1-k\right)\left(\frac{n}{2}+2-k\right)\cdots\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{n}{2}+\nu\right)} =$$

$$= h_0(0) + \sum_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{h_{\nu}^{(\nu)}(0)}{\nu!} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} C_{\frac{n}{2}}^{k} \frac{k(k+1)\cdots(k+\nu-1)}{\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{n}{2}+\nu\right)} = h_0(0) = f(0),$$

либо

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} C_{\frac{n}{2}}^{k} k(k+1)\cdots(k+\nu-1) =$$

$$= -\frac{d^{\nu}}{d\tau^{\nu}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} C_{\frac{n}{2}}^{k} \tau^{k+\nu-1}|_{\tau=1} = -\frac{d^{\nu}}{d\tau^{\nu}} \tau^{\nu-1}(1-\tau)^{\frac{n}{2}}|_{\tau=1} = 0.$$

Итак

$$\iint_D B_n(0,\overline{\zeta})f(\zeta)ds_\zeta = f(0). \qquad (36)$$

Формулу (36) можно назвать формулой о среднем значении поли-кернфункции Бергмана $B(z,\overline{\zeta})$.

Теперь покажем, что для любой фиксированной точки $z_0 \in D = \{z: |z| < 1\}$ имеет место формула

$$\left(f(\zeta), \overline{B_n\left(z_0,\overline{\zeta}\right)}\right) = f(z_0).$$

Воспользуемся представлением

$$\left(f(\zeta), \overline{B_n\left(z_0,\overline{\zeta}\right)}\right) = \iint_D B_n\left(z_0,\overline{\zeta}\right)f(\zeta)ds_\zeta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} \frac{e^{-in\alpha}}{|1-z_0\overline{\zeta}|^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k\left(C_{\frac{n}{2}}^{k}\right)^2\left|\frac{\zeta-z_0}{1-z_0\overline{\zeta}}\right|^{2(k-1)}\left(1-\left|\frac{\zeta-z_0}{1-z_0\overline{\zeta}}\right|^2\right)^{\frac{n}{2}-k} f(\zeta)ds_\zeta. \qquad (37)$$

В интеграле (37) совершим конформное отображение единичного круга $|\zeta| < 1$ на единичный круг $|\omega| < 1$ по фомуле

$$\omega = \omega(\zeta) = \frac{\zeta - z_0}{1 - \overline{z}_0\zeta},$$

где при таком отображении фиксированная точка z_0 переходит в точку 0: $\omega(z_0) = 0$. Обратное отображение имеет вид

$$\zeta = \zeta(\omega) = \frac{\omega + z_0}{1 + \overline{z}_0\omega}.$$

Функция $\zeta = \zeta(\omega)$ конформно отображает круг $|\omega| < 1$ на круг $|\zeta| < 1$, так что $\zeta(0) = z_0$. Далее находим

$$ds_\zeta = |\zeta'(\omega)|^2 ds_\omega = \left|\frac{1-|z_0|^2}{(1+\overline{z}_0\omega)^2}\right|^2 ds_\omega, \quad 1-\overline{z}_0\zeta = \frac{1-|z_0|^2}{1+\overline{z}_0\omega}.$$

Тогда имеем

$$\frac{e^{-in\alpha}}{|1-z_0\overline{\zeta}|^2}\left|\frac{\zeta-z_0}{1-\overline{z}_0\zeta}\right|^{2(k-1)} ds_\zeta = \frac{(1-\overline{z}_0\zeta)^{\frac{n}{2}-1}}{(1-z_0\overline{\zeta})^{\frac{n}{2}+1}}\left|\frac{\zeta-z_0}{1-\overline{z}_0\zeta}\right|^{2(k-1)} ds_\zeta =$$

$$= \frac{\left(\frac{1-|z_0|^2}{1+\overline{z}_0\omega}\right)^{\frac{n}{2}-1}}{\left(\frac{1-|z_0|^2}{1+z_0\overline{\omega}}\right)^{\frac{n}{2}+1}}\frac{|1-|z_0|^2|^2}{(1+\overline{z}_0\omega)^2(1+z_0\overline{\omega})^2}\left|\omega\right|^{2(k-1)} ds_\omega = \frac{(1+z_0\overline{\omega})^{\frac{n}{2}-1}}{(1+\overline{z}_0\omega)^{\frac{n}{2}+1}}\left|\omega\right|^{2(k-1)} ds_\omega.$$

Поставив это значение в (37), получим

$$(B_nf)(z_0)=\frac{(-1)^{n-1}}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{(1+z_0\overline{\omega})^{\frac{n}{2}-1}}{(1+\overline{z}_0\omega)^{\frac{n}{2}+1}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k\left(C_{\frac{n}{2}}^{k}\right)^2|\omega|^{2(k-1)}(1-$$

$$-|\omega|^2)^{\frac{n}{2}-k}f(\frac{\omega+z_0}{1+\overline{z}_0\omega})ds_\omega.$$

Введя обозначение

$$\widetilde{f(\omega)}=\frac{(1+z_0\overline{\omega})^{\frac{n}{2}-1}}{(1+\overline{z}_0\omega)^{\frac{n}{2}+1}}f\big(\zeta(\omega)\big),$$

по формуле о среднем значении поликерн-функции Бергмана (36) имеем

$$\begin{aligned}(B_nf)(z_0)=\ &\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k\left(C_{\frac{n}{2}}^{k}\right)^2|\omega|^{2(k-1)}(1-|\omega|^2)^{\frac{n}{2}-k}\widetilde{f(\omega)}ds_\omega=\\ &=\widetilde{f(0)}=f\big(\zeta(0)\big)=f(z_0).\end{aligned}\qquad(38)$$

Формула (35) доказана.

2.6. Сингулярные интегральные уравнения с нечётными характеристиками и поликерн-операторами B_{2m-1}

Исследованию сингулярных интегральных уравнений с нечётными характеристиками и поликерн-операторами B_{2m-1} посвящены работы [26]-[28]. В частности, в статье [26] в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)(1<p<\infty,0<\beta<2)$ изучается оператор

$$\mathcal{A}\equiv a(z)I+b(z)S_nK+c(z)B_n+T,\ n=2m-1,\qquad(39)$$

где $a(z),b(z),c(z)$ - комплекснозначные в $\overline{D}=D\cup\Gamma$ непрерывные функции, $(Kf)(z)=\overline{f(z)}$, черта над функцией означает переход к комплексно-сопряженным значениям, T – вполне непрерывный в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ оператор,

$$(S_nf)(z)=\frac{n}{2\pi i^n}\iint_D\frac{e^{-in\theta}f(\zeta)}{|\zeta-z|^2}ds_\zeta,\quad\theta=\arg(\zeta-z),$$

ds_ζ - элемент плоской меры Лебега, B_n – поликерн-оператор Бергмана

$$(B_n f)(z) = f(z) - (S_n S_{-n} f)(z).$$

Рассматривая множество $\mathfrak{M}$ всех двумерных сингулярных интегральных операторов (действующих в $L^p_{\beta-2/p}(D)(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$) вида (39), устанавливается, что указанное множество составляет алгебру, т.е. если $A_j \in \mathfrak{M}$, где

$$\mathcal{A}_j = a_j I + b_j S_n K + c_j B_K + T_j,\ j = 1,2,$$

то $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \in \mathfrak{M}$ и $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \in \mathfrak{M}$, причем коэффициенты оператора $\mathcal{A}$ имеют вид

$$a = a_1 a_2 - b_1 \overline{b}_2, \qquad b = a_1 b_2 + b_1 \overline{a}_2, \qquad c = a_1 c_2 + a_2 c_1 + c_1 c_2 + b_1 \overline{b}_2.$$

Каждому оператору $A_j \in \mathfrak{M}$ сопоставляем в качестве символа матрицу

$$\sigma_{\mathcal{A}}(z,t) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) & 0 \\ -\overline{b(z)} & \overline{a(z)} & 0 \\ 0 & 0 & a(t) + c(t) \end{pmatrix}, \quad z \in \overline{D}, \quad t \in \Gamma,$$

где $z \in \overline{D}, t \in \Gamma$, то есть матрица-функция $\sigma_{\mathcal{A}}(z,t)$ непрерывна на компакте $\overline{D} \times \Gamma$. Нетрудно убедиться, что множество так определенных символов $\mathfrak{N}$ также есть алгебра, то есть

$$\sigma_{\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2}(z,t) = \sigma_{\mathcal{A}_1}(z,t) + \sigma_{\mathcal{A}_2}(z,t), \quad \sigma_{\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}_2}(z,t) = \sigma_{\mathcal{A}_1}(z,t) \cdot \sigma_{\mathcal{A}_2}(z,t).$$

Пусть теперь матрица $\sigma_{\mathcal{A}}(z,t) \in \mathfrak{N}$ невырожденная, то есть $\det\sigma_{\mathcal{A}}(z,t) \neq 0$, при всех $z \in \overline{D}, \quad t \in \Gamma$. Это равносильно выполнению двух условий

$$\Delta(z) \neq 0, \qquad z \in \overline{D}; \quad a(t) + c(t) \neq 0, \qquad t \in \Gamma,$$

где $\Delta(z) = |a(z)|^2 + |b(z)|^2$. Тогда существует матрица $[\sigma_{\mathcal{A}}(z,t)]^{-1} \in \mathfrak{N}$, и она является символом оператора $\mathfrak{R} \in \mathfrak{N}$:

$$\mathfrak{R} = \frac{\overline{a}}{\Delta} I - \frac{b}{\Delta} S_n K + c^{\star} B_n, \tag{40}$$

где $c^{\star}$ – такая непрерывная в $\overline{D}$ функция, что на границе Г совпадает с функцией

$$\frac{1}{a(t)+c(t)}-\frac{\overline{a(t)}}{\Delta(t)}.$$

Имеет место

Теорема 4. *Для того чтобы произвольный оператор $\mathcal{A}$ вида (39) из алгебры $\mathfrak{M}$ был н в пространстве $L^{p}_{\beta-2/p}(D)(1<p<\infty, 0<\beta<2)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\Delta(z)\neq 0 \text{ при } z\in\overline{D}, \quad a(t)+c(t)\neq 0 \text{ при } t\in\Gamma.$$

При выполнении этих условий оператор $\mathfrak{R}\in\mathfrak{M}$ из (40) будет двусторонним регуляризатором для оператора $\mathcal{A}$ из (39) и индекс оператора $\mathcal{A}$ равен

$$\varkappa=-\frac{n}{2\pi}[\arg(a(t)+c(t))]_{\Gamma}.$$

В работах [27],[28] исследованы более общие сингулярные операторы с нечетной характеристикой вида

$$\mathcal{A}\equiv a(z)I+b(z)K+(c(z)I+d(z)K)S_n+(e(z)I+h(z)K)\overline{S}_n$$

с непрерывными коэффициентами. Установлены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости оператора $\mathcal{A}$ в лебеговых пространствах с весом и получены формулы для подсчета индекса. Такие же результаты можно получить для операторов $\mathcal{A}$ с добавлением поликерн-операторов Бергмана B_n и $\overline{B}_n$.

2.7. Связь поликерн-функции Бергмана полуцелого порядка $\frac{n}{2}$ с полными ортонормальными системами в области функций

Поликерн-функцию Бергмана полуцелого порядка $\frac{n}{2}$ можно получить с помощью разложения

$$\mathfrak{B}_{\frac{n}{2}}(z,\overline{\zeta})=\sum_{\nu=0}^{\frac{n-1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}e_{k\nu}(z)\overline{e_{k\nu}(\zeta)},$$

где $n = 2m - 1$, $\{e_{k\nu}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ - полная ортонормальная система полианалитических в D функций. Так, если $D = \{z: |z| < 1\}$, то нетрудно убедиться, что система функций $\{e_{k\nu}(z)\}, \nu = 0,1, \dots m-1$:

$$e_{k\nu}(z) = \sqrt{\frac{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}{\pi}}(-1)^k \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu}\{(1-|z|^2)^{\nu+\frac{1}{2}} z^k\}$$

является полной ортономированной по норме $L^2(D)$ системой функций. Тогда поликерн-функция $B_{\frac{n}{2}}(z, \overline{\zeta})$ будет иметь вид

$$\mathfrak{B}_{\frac{n}{2}}(z,\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} e_{k\nu}(z)\overline{e_{k\nu}(\zeta)} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}{\pi} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\right]^2 \frac{\partial^{2\nu}}{\partial\overline{\zeta}^\nu \partial z^\nu}\{(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)\}^{\nu+\frac{1}{2}}(z\overline{\zeta})^k =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m-1} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\right]^2 \frac{\partial^{2\nu}}{\partial\overline{\zeta}^\nu \partial z^\nu}\{(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)\}^{\nu+\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{(1-z\overline{\zeta})^3} + \frac{2\nu}{(1-z\overline{\zeta})^2} + \frac{\nu(\nu+1)}{1-z\overline{\zeta}}\right].$$

Рассмотрим подробно случай $m = 1$ (то есть $\nu = 0$):

$$e_{k0}^{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{(k+1)(k+2)}{\pi}} \frac{(-1)^k \Gamma(3/2)}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} \frac{\partial^k}{\partial\overline{z}^k}(1-|z|^2)^{k+\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(k+1)(k+2)}{\pi}} z^k \sqrt{1-|z^2|}, \quad k = 0,1, \dots..$$

Тогда норма указанной системы полианалитических функций полуцелого порядка $1/2$ в пространстве $L_2(|z| < 1)$ будет равна

$$||e_{k0}^{\frac{1}{2}}||^2 = \iint_{|z|<1} |e_{k,0}(z)|^2 ds_z = \frac{(k+1)(k+2)}{\pi} \iint_{|z|<1} |z|^{2k}(1-|z|^2) ds_z =$$

$$= (k+1)(k+2)\int_0^1 r^k(1-r)dr = (k+1)(k+2)\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) = 1,$$

то есть система ортонормирована. Построим керн-функцию $\mathcal{B}_{1/2}(z,\overline{\zeta})$:

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}(z,\overline{\zeta}) = \sum_{k=0}^{\infty} e_{k0}^{\frac{1}{2}}(z)\overline{e_{k0}^{\frac{1}{2}}(\zeta)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(k+2)}{\pi}(z\overline{\zeta})^k\sqrt{(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)}}{\pi(1-z\overline{\zeta})^3} = \frac{2e^{-3i\theta}}{|1-z\overline{\zeta}|^2}\left(1-\frac{|\zeta-z^2|}{|1-z\overline{\zeta}|^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $\theta = \arg(1-\overline{\zeta}z)$.

Покажем, что интегральный оператор с ядром $\mathcal{B}_{1/2}(z,\overline{\zeta})$ обладает воспроизводящим свойством, то есть

$$\left(\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}f\right)(z) \equiv \iint_{|\zeta|<1}\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}(z,\overline{\zeta})f(\zeta)ds_z = f(z),$$

где $f(z) = \sqrt{1-|z|^2}h(z)$, $h(z)$ – аналитическая в $D = \{z\colon |z|<1\}$ функция.

Действительно

$$\left(\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}f\right)(z) \equiv \iint_{|\zeta|<1}\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}(z,\overline{\zeta})f(\zeta)ds_z = \frac{2}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{\sqrt{(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)}}{(1-z\overline{\zeta})^3}f(\zeta)ds_\zeta =$$

$$= \frac{2\sqrt{1-|z|^2}}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{1-|\zeta|^2}{(1-z\overline{\zeta})^3}h(\zeta)ds_\zeta.$$

Разложив функцию $\frac{1}{(1-z\overline{\zeta})^3}$ и аналитическую функцию $h(z)$ в степенной ряд Тейлора:

$$\frac{2}{(1-z\overline{\zeta})^3} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)(z\overline{\zeta})^k, \quad h(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty}c_j\zeta^j, \qquad c_j = \frac{1}{j!}h^{(j)}(0),$$

получим

$$\left(\mathcal{B}_{\frac{1}{2}} f\right)(z) = \frac{\sqrt{1-|z|^2}}{\pi} \iint_{|\zeta|<1} (1-|\zeta|^2) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)(z\overline{\zeta})^k \sum_{j=0}^{\infty} c_j \zeta^j ds_\zeta =$$

$$= \frac{\sqrt{1-|z|^2}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) c_k z^k \iint_{|\zeta|<1} |\zeta|^{2k}(1-|\zeta|^2) ds_\zeta =$$

$$= \sqrt{1-|z|^2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sqrt{1-|z|^2} h(z) = f(z).$$

Литература

1. Bergman S. Uber die Entwining der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen // Math.Ann. − 86 (1922).− 238-271.
2. Bergman S. The Kernel Funktion and Conformal Mapping // Math. Surveys. Am.Math.Soc. N.Y. − 1970.− V.5.
3. Bochner S. Uber orthogonale Systeme analytischer Functionen // Math. Zeit. − 1922.− 14(122). − P. 180 −207.
4. Курант Р. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности // М., 1953. − 310 с.
5. Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений // М.: Наука, 1987. − 415с.
6. Комяк И.И. Об условиях нётеровости и формуле для индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений // Докл. АН БССР. −1979.−Т. 23.− №1.− С. 8 −11.
7. Джураев А.Д. О некоторых двумерных интегральных уравнениях по ограниченной области // Дифферециальные и интегральные уравнения. Краевые задачи. − Тбилиси. −1979. − С. 89 − 94.
8. Комяк И.И. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных уравнений с ядром Бергмана // Докл. АН БССР.−1979.−Т. 23.− №11.− С. 8−11.
9. Комяк И.И. Условия нётеровости и формула индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений по круговой области // Дифференц. уравнения. −1980.− Т. 16.− №2.− С. 328−343.
10. Василевский Н.Л. Об алгебре, порожденной двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами // ДАН СССР.−1983.−Т. 271. − №5. − С. 1041−1044.

11. Василевский Н.Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами I // Изв. Вузов, мат.−1986. − №3.− С.12−21.
12. Василевский Н.Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами II // Изв. Вузов, мат.−1986. − №3.− С.33−38.
13. Бильман Б.М. Об условиях нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами по ограниченной односвязной области /Б.М.Бильман, Г.Джангибеков //ДАН СССР.−1986. − Т. 288.− №4.− С. 792−797.
14. Джангибеков Г. О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов // ДАН СССР.−1989.− Т. 308.− №5.− С.1037−1041.
15. Джангибеков Г. Нётеровость и индекс некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов. // Изв.Вузов. −1991. − №1.− С.19-28.
16. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных // М., 1977.− 431 с.
17. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения // М.,1962.−254 с.
18. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений // М.,1948. − 254 с.
19. Джангибеков Г. Формула обращения для одного двумерного сингулярного интегрального уравнения // Докл. АН ТаджССР.−1984. Т.27.− С. 243−248.
20. Кошелев А. Д. О керн-функции гильбертова пространства функций, полианалитических в круге // ДАН СССР.−1977.− Т. 232.− С. 277−279.
21. Джангибеков Г. О нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами // ДАН СССР.−1988.− Т. 300.− №2.− С. 272−276.
22. Джангибеков Г. О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами // Известия Вузов, Математика.−1992. − №9.− С. 25−37.
23. Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах // Матем. заметки. −1989.− Т. 46. − С. 91−93.
24. Градштейн И.С.Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений /И.С.Градштейн, И.М.Рыжик // М., 1963. −1108 с.
25. Абрамович М. Справочник по специальным функциям // М.: Наука,1979.− 832 с.
26. Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах по ограниченной области // ДАН.−2002. − Т. 383. − №1.− С. 7−9.

27. Джангибеков Г. Об одном двумерном сингулярном интегральном операторе с нечётной характеристикой /Г.Джангибеков, Г.Козиев// ДАН РТ.−2015.− Т. 58.− №10.− С. 886−893.
28. Джангибеков Г. Об условиях нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений с нечетными характеристикой и разрывными коэффициентами /Г.Джангибеков, Г. Козиев // ДАН РТ.− 2017.− Т. 60.− №10.− С. 482−489.

ОИДИ ПОЛИКЕРН-ФУНКСИЯҲОИ СОҲАИ МАҲДУД ВА АЛОҚАМАНДИИ ОНҲО БО ОПЕРАТОРҲОИ ИНТЕГРАЛИИ СИНГУЛЯРӢ

Ҷангибеков Г., Савлатов Ф.
Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола тафсири мақолаҳои илмӣ оиди поликерн-функсияҳо ва поликерн-операторҳои Бергман ва алоқамандии онҳо бо операторҳои интегралии сингулярӣ аз рӯи соҳаи маҳдуд дода шудааст. Мафҳуми поликерн-функсияи тартиби нимбутун ба воситаи композитсияи операторҳои интегралии сингулярӣ бо характеристикаи тоқ дохил карда шудааст. Алгебраи чунин операторҳо омӯхта шудааст.

Калидвожаҳо: *поликерн-функсия, поликерн-оператори Бергман, интеграли сингулярӣ, символи оператор, индекси оператор, нётеровӣ будани оператор.*

ON POLYKERN - FUNCTIONS OF A BOUNDED DOMAIN AND THEIR CONNECTION WITH SINGULAR INTEGRAL OPERATORS

Jangibekov G., Savlatov F.
Tajik National University

The article provides an overview of the work on polykern - functions and polykern - Bergman operators and their connection with singular integral operators on a bounded domain. The concept of the polykern-function of half-integer order is introduced through the composition of singular operators with odd characteristic. The algebra of such operators is studied.

Keywords: *polykern - function, polykern - Bergman operator, singular integral, operator symbol, operator index, operator Noetherian.*

Сведения об авторах. **Джангибеков Гулходжа**, доктор физико - математических наук, профессор кафедры ФАДУ Таджикского национального университета, 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17, Тел.: +992 (93) 503-6342, E-mail: *gulkhoja@list.ru*

Савлатов Франсуа, докторант PhD ФАДУ Таджикского национального университета, 734025, г.Душанбе, пр. Рудаки, 17, Тел.: +992 (50) 200-4929.

УДК 512, 512.643, 519.6, 519.612

ЮНИТОИДНЫЕ МАТРИЦЫ КАК КОНГРУЭНТНЫЙ АНАЛОГ МАТРИЦ ПРОСТОЙ СТРУКТУРЫ

Икрамов Х.Д.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Юнитоидной матрицей (или юнитоидом) называется квадратная матрица, приводимая к диагональному виду посредством некотрой конгруэнции. Предложено эквивалентное определение этого класса матриц.

Ключевые слова: *юнитоидные матрицы, нормальные матрицы, матрицы простой структуры.*

Матрицами простой структуры (или диагонализуемыми матрицами) принято называть квадратные матрицы, которые могут быть приведены к диагональному виду посредством некоторого подобия. Понятие юнитоидной матрицы (или юнитоида) было введено в [1]. Оно означает квадратную матрицу, приводимую к диагональному виду посредством некоторой конгруэнции. Когнруэнтное преобразование (или конгруэнции) комплексной матрицы A понимается здесь как преобразование вида.

$$A \rightarrow P*AP,$$

где P - произвольная невырожденная матрица.

В той же статье [1] было показано, что юнитоидами являются все матрицы, хаусдорфово множество которых не содержит нуля. Отметим, что алгебраической литературе хаусдорфово множество матрицы чаще называется ее областью значений (field of values). Кроме того, в [1] были даны следующие характеризации класса юнитоидных матриц:

Теорема 1. *Комплексная n x n - матрица A тогда и только тогда является юнитоидом, когда ее вещественная и мнимая части диагонализуются одной и той же конгруэнцией.*

Напомним, что вещественной и мнимой частями матрицы A называются матрицы

$$\mathrm{ReA}=\frac{1}{2}\,(A + A*), \quad \mathrm{ImA} =\frac{1}{2i}\,(A - A*).$$

Теорема 2. *Невырожденная n x n - матрица A тогда и только тогда является юнитоидом, когда матрица $A^{-1}A*$ подобна унитарной матрице*.

Заметим, что в формулировке этой теоремы матрица $A^{-1}A*$ может быть заменена на матрицу $A^{-*}A*$, которую Хорн и Сергейчук называют коквадратом матрицы А.

Поскольку всякая диагональная матрица нормальна, то из самого определения юнитоидов вытекает такое утверждение:

Теорема 3. *Всякий юнитоид конгруэнтен некоторой нормальной матрице.*

Покажем, что справедливо и обратное утверждение:

Теорема 4. *Если n x n - матрица А конгруэнтна нормальной матрице В, то есть А есть юнитоид.*

Действительно, пусть B=P ∗AP и B- нормальная матрица. Как известно, такая матрица может быть приведена к диагональному виду Λ посредством унитарного подобия, которое является одновременно (унитарной) конруэнцией.

$$\Lambda = Q* BQ, \quad QQ* = I.$$

Но тогда $\Lambda = (PQ) * A(PQ)$, т,е. А – юнитоид.

Тем самым мы получили еще одну характеризацию юнитоидных матриц.

Теорема 5. *Комплексная n x n - матрица А тогда и только тогда является юнитоидом, когда А конгруэнтна некоторой нормальной матрице*.

В заключении отметим, что в теории подобия имеется аналог теоремы 5:

Теорема 6. *Комплексная n x n - матрица А тогда и только тогда является диагонализуемой, когда А подобна некоторой нормальной матрице*.

Литература

1. De Prima C.R., Johnson C.R. The range of $A^{-1}A*$ in GL (n,C) //Linear Algebra Appl.−1974.− V.9. − P. 209-222.

МАТРИСАҲОИ ЮНИТОИДӢ ҲАМЧУН ШАБЕҲИ БАРОБАРҚУВВАИ МАТРИСАҲОИ СОХТАШОН ОДӢ

Икромов Ҳ.Д.

Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В. Ломоносов

Матрисаи юнитоидӣ гуфта, матрисаи квадратиро меноманд, ки бо воситаи ягон табдилоти баробарқувва ба намуди диогналӣ оварда мешавад. Таърифи баробарқувваи ин синфи матрисаҳо пешниҳод шудааст.

Калидвожаҳо: *матрисаҳои юнитоидӣ, матрисаҳои нормалӣ, матрисаҳои сохташон одӣ.*

UNITOIDS AS A CONGRUENCE ANALOG OF DIAGONALIZABLE MATRICES

Ikramov Kh. D.
Lomonosov Moscow State University

A unitoid is a square matrix that can be brought to diagonal form by a congruence transformation we purpose an equivalent definition of this matrix class.

Keywords: *unitoids, normal matrices, diagonalizable matrices.*

Сведения об авторе. **Икрамов Хаким Дададжанович**, доктор физико-математических наук, профессор МГУ имени М.В. Ломоносова, 119991 Москва, Ленинские Горы, д.1, Механико-математический факультет. Тел. +7 (495) 939-5632. E-mail: ikramov@cs.msu.su

УДК 517.5

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Зарифбеков М.Ш.
Технологический университет Таджикистана

В настоящей работе изучаются нётеровость и индекс задачи Дирихле для эллиптической системы дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярными коэффициентами. Исследование этой задачи проводится методом эквивалентного её приведения к двумерному сингулярному интегральному уравнению по ограниченной области на плоскости.

Ключевые слова: *эллиптическая система, сингулярные интегральные уравнения, нётеровость и индекс задачи.*

Известно, что важнейшими краевыми задачами для эллиптического уравнения второго порядка являются задача Дирихле (первая краевая задача) и задача Неймана (вторая краевая задача). Для сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка задача Дирихле методом интегральных уравнений была изучена Б.В. Боярским [1]. В работах [2] были изучены задачи Дирихле и Неймана для общих эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с двумя функциями от двух переменных. Показано, что указанные краевые задачи не всегда обладают "фредгольмовскими" свойствами. В предположении непрерывности коэффициентов системы, были установлены необходимые и достаточные

условия нетеровости и даны формулы для вычисления индекса указанных задач в лебеговом пространстве $L^p(D), 2 < p < \infty$.

Результаты работы [3] показывают, что что отказ от непрерывности коэффициентов приводит к тому, что найденные в [2] условия нетеровости перестают быть достаточными, и более того, разрешимость задачи будет зависеть от показателя p лебегового пространства $L^p(D)$.

Следует отметит, что задача Неймана для общих эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка изучена в [4].

В настоящей работе в единичном круге $D = \{z: |z| < 1\}$ рассматривается следующая эллиптическая система

$$\begin{aligned} a(z)\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial\overline{z}} \quad &+b(z)e^{2i\varphi}\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial z^2} + \frac{a_1(z)}{z}\frac{\partial\omega}{\partial\overline{z}} + \frac{b_1(z)}{\overline{z}}\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial z} + c_1(z)\frac{\partial\omega}{\partial z} + \\ &+d_1(z)\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{z}} + e_1(z)\omega + h_1(z)\overline{\omega} = g(z), \end{aligned} \tag{1}$$

где $z = x + iy, \omega = u(x,y) + iv(x,y)$, формальные производные по z и по $\overline{z} = x - iy$ определяются по формулам

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$\varphi = \arg z$, коэффициенты $a(z), b(z)$ и т.д. будем считать непрерывными функциями в $\overline{D}$, а $g(z) \in L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(2 < p < \infty, 0 < \beta < 1)$:

$$L_{\beta-\frac{2}{p}}(D) = \{f(z): |z|^{\beta-\frac{2}{p}} f(z) = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L_{\beta-\frac{2}{p}}} = \Big||F||_{L_p}\Big\}.$$

Как видно из (1), коэффициенты при первых производных $\frac{\partial\omega}{\partial\overline{z}}, \frac{\partial\overline{\omega}}{\partial z}$ имеют сингулярную особенность первого порядка, а коэффициент при производной $\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial z^2}$ в точке $z = 0$ по всем лучам, выходящим из начала координат имеет разные пределы.

Задача Дирихле. Найти непрерывные решения $\omega(z)$системы (1) в области D из класса $L^p_{\beta-1-\frac{2}{p}}(D) \cap W^2(D\backslash 0), (2 < p < \infty, 0 < \beta < 1)$, удовлетворяющие на границе Г условию

$$\omega(t)|_\Gamma = 0. \tag{2}$$

Это означает, что функция $\omega(z)$ имеет в $D\backslash 0$ обобщенные производные $\frac{\partial^k\omega}{\partial z^{k-l}\partial\overline{z}^l}$ $(k = 1,2;\ l = 0,1,2)$ и $|z|^{\beta-1-\frac{2}{p}}\omega(z) \in L^p(D)$ при $2 < p < \infty$, $0 < \beta < 1$.

Лемма. *Пусть $a(z), b(z), a_1(z), b_1(z)$, $h(z)$ удовлетворяют указанным выше условиям и $|a(0)| \neq |b(0)|$. Тогда*

$$A = A_0A_1 + T_1, \quad A = A_2A_0 + T_2, \tag{3}$$

где операторы T_1 *и* T_2 *- вполне непрерывны в* $L_{\beta-2/p}(D)$, $(2 < p < \infty, 0 < \beta < 1)$;

$$A_0 = a(0)I + b(0)S^*K + c_0B + B(0)H_1K + A(0)H_2,$$

$$A_j = (|a(0)|^2 - |b(0)|^2)^{-1}\{a^j(z)I + b^j(z)S^*K + c^j(z)B +$$

$$+e^j(z)BK + \delta^j(z)B\overline{S^*}\}, (j = 1,2); \quad (Kf)(z) = \overline{f(z)},$$

$$(H_1f)(z) = \frac{1}{|z|^2}\iint_D h\left(\frac{\zeta}{z}\right)f(\zeta)ds_\zeta,$$

$$(H_2f)(z) = \frac{1}{|z|^2}\iint_D \overline{h\left(\frac{\zeta}{z}\right)}f(\zeta)ds_\zeta.$$

Заметим, что поскольку $b^j(0) = 0$ $(j = 1,2)$, то операторы A_1, A_2 являются сингулярными операторами с непрерывными коэффициентами и к ним применимы результаты работы [2]. Что касается оператора A_0, то он является модельным сингулярным интегральным оператором, к которому далее применим схему работы [5].

Полагая $a(0) \neq 0$ и для удобства введя обозначения

$$\lambda = \frac{b(0)}{a(0)}, \qquad \mu = \frac{B(0)}{a(0)}, \qquad \nu = \frac{A(0)}{a(0)},$$

в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D), 2 < p < \infty, 0 < \beta < 1$ рассмотрим модельное интегральное уравнение

$$(A_0f)(z) \equiv f(z) + \lambda\left(S^*\overline{f}\right)(z) + \mu\left(H_1\overline{f}\right)(z) + \nu(H_2f)(z) = g(z). \qquad (4)$$

Действительно, умножая обе части уравнения (4) на $\frac{1}{2\pi}e^{-ik\varphi}$ $(\varphi = \arg z)$, интегрируя в пределах от 0 до 2π и вычисляя коэффициенты Фурье (по углу φ) значения интегрального оператора A_0, для определения коэффициентов Фурье искомой функции $f(z)$ получим системы интегральных уравнения с ядрами однородными порядка (-1):

Тогда относительно новых неизвестных функций $u_k(r), v_k(r)$ получим следующие системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned} u_k(r) + \tfrac{2}{\Delta}\left(\int_0^1 \tfrac{1}{r}\Omega_{11}\left(\tfrac{\rho}{r}\right)u_k(\rho)d\rho + \int_0^1 \tfrac{1}{r}\Omega_{12}\left(\tfrac{\rho}{r}\right)v_k(\rho)d\rho\right) &= g_k(r), \\ u_k(r) + \tfrac{2}{\Delta}\left(\int_0^1 \tfrac{1}{r}\Omega_{21}\left(\tfrac{\rho}{r}\right)u_k(\rho)d\rho + \int_0^1 \tfrac{1}{r}\Omega_{22}\left(\tfrac{\rho}{r}\right)v_k(\rho)d\rho\right) &= \overline{g_{-k}(r)} \end{aligned} \qquad (5)$$

при $1 \leq k \leq N_0$,

$$u_0(r)+\frac{2}{\Delta}\left(\int_r^1 \frac{|\lambda|^2+\nu-\overline{\lambda}\mu}{\rho}u_0(\rho)d\rho-\int_r^1 \frac{\lambda-\mu+\lambda\nu}{\rho}v_0(\rho)d\rho\right)=g_0(r),$$
$$v_0(r)-\frac{2}{\Delta}\left(\int_r^1 \frac{\overline{\lambda}-\overline{\mu}+\overline{\lambda}\overline{\nu}}{\rho}u_0(\rho)d\rho+\int_r^1 \frac{|\lambda|^2+\overline{\nu}-\lambda\overline{\mu}}{\rho}v_0(\rho)d\rho\right)=\overline{g_0(r)} \quad (6)$$

при $k=0$, где $\Delta=1-|\lambda|^2$.

Применяя к каждой из указанных систем результаты [6], получим, что для нетеровости k - ой системы (5), (6) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $|\lambda|\neq 1$ и $\mathcal{G}_k(x;\beta)\neq 0 \quad (0\leq k\leq N_0)$ при любом $x: -\infty < x<\infty$, где

$$\mathcal{G}_k(x;\beta)=$$
$$=1-4\frac{|\nu|^2-|\lambda-\mu|^2+(\beta-ix)(|\lambda|^2-Re(\overline{\lambda}\mu-\nu))-ikIm(\overline{\lambda}\mu-\nu)}{(1-|\lambda|^2)(k^2-(\beta-ix)^2)}.$$

Сформулируем основной результат для задачи (1), (2).

Теорема. *Для того чтобы задача (1), (2) была нетеровой в классе* $L^p_{\beta-1-\frac{2}{p}}(D)\cap W^2(D\backslash 0),(2<p<\infty,0<\beta<1)$, *необходимо и достаточно выполнение условий*

a) $|a(z)|\neq|b(z)|$ при $z\in\overline{D}$, $a(t)\neq 0$ при $t\in\Gamma$,

b) $\mathcal{G}_k(x;\beta)\neq 0, \quad -\infty<x<\infty, \quad k=0,1,\cdots,N_0,$

причем индекс задачи (1), (2) равен

$$\varkappa=-\{2Ind_\Gamma a(t)+$$
$$+2\sum_{k=1}^{N_0}-\infty<x<\infty\,\mathcal{G}_k(x;\beta)+-\infty<x<\infty\,\mathcal{G}_0(x;\beta)\}.$$

Литература

1. Боярский Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций //Дисс. д. ф.-м. н. − М.,1960.
2. Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости // ДАН России. −1993.− Т. 330. − №4. − С. 415−417.
3. Джангибеков Г. О задаче Дирихле для эллиптической системы двух уравнений четвертого порядка на плоскости / Г.Джангибеков, Г.Худжаназарова // ДАН России.− 2004. − Т. 397. − №3.− С. 27-34.
4. Джангибеков Г. Задача Неймана для общих эллиптических ситсем

дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости. /Г.Джангибеков, Д.М.Одинабеков //ДАН Республики Таджикистан. −2015.− Т. 58. − №2.− С. 106 −111.
5. Джангибеков Г. Нетеровость и индекс некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов // Изв. ВУЗов. матем.− 1991.− №1.− С. 19−28.
6. Бильман Б.М. Об условиях нетеровости и индексе некоторых особых двумерных интегральных уравнений / Б.М.Бильман, Г. Джангибеков // ДАН СССР.−1990.− Т. 312.− №1.− С.15−19.

МАСЪАЛАИ ДИРИХЛЕ БАРОИ ЯК СИНФИ СИСТЕМАИ ЭЛЛИПТИКИИ ТАРТИБИ ДУЮМ БО КОЭФФИСИЕНТҲОИ СИНГУЛЯРӢ

Зарифбеков М.Ш.
Донишгоҳи технологии Тоҷикистон

Дар мақола шартҳои зарурӣ ва кифоягии нётеровӣ ва формула барои ҳисобкунии индекси масъалаи Дирихле барои системаи эллиптикии тартиби дуюм бо коэффисиентҳои сингулярӣ омӯхта шудааст. Омӯзиши ин масъала ба тадқиқ намудани муодилаҳои сингулярии дученака аз рӯи соҳаи маҳдуд дар ҳамворӣ оварда мерасонад.

Калидвожаҳо: *системаи эллиптикӣ, муодилаи интегралии сингулрӣ, нётеровӣ ва индекси масъала.*

DIRICHLE PROBLEM FOR ONE CLASS OF SECOND-ORDER ELLIPTIC SYSTEMS WITH SINGULAR COEFFICIENTS

Zarifbekov M.SH.
Technological University of Tajikistan

In this paper, we study the Noetherian and Dirichlet index problem for a second-order elliptic system of differential equations with singular coefficients. The study of this problem is carried out by the method of its equivalent reduction to a two-dimensional singular integral equation over a bounded domain in the plane.

Keywords: *elliptic system, singular integral equations, Noetherian and index problem.*

Сведения об авторе. **Зарифбеков Мародбек Ширинбекович**, кандидат физико-математических наук, декан факультета телекомуникации и профессионального обучения Технологического университета Таджикистана, E-mail: marod76@mail.ru

УДК 517.55.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С РАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ИМЕЮЩИМИ НУЛИ И БЕСКОНЕЧНОСТИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА НА КОНТУРЕ

Усмонов Н., Холикова М.Б., Усмонов М.А.

Таджикский государственный финансово-экономический университет

Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни

В общей теории предполагается, что функция $G(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера, причём $G(t)$ нигде не обращается в ноль. В настоящей работе рассмотрены сингулярные случаи, когда $G(t)$ может иметь нули в некотором конечном числе точек контура, и $G(t)$ обращается в бесконечность.

Основная цель настоящего исследования заключается в решении вопроса, как меняется число линейно независимых решений и число условий разрешимости от наличия нулей и полюсов.

Наличие нулей $G(t)$ не влияет на число линейно независимых решений и число условий разрешимости задачи. Наличие полюсов влияет на число решений и число условий разрешимости задачи.

Ключевые слова: *нуль, полюс, рациональная функция, условия Гёльдера, интерполяционный многочлен, теорема Лиувилля, обобщенная теорема Лиувилля, теорема об аналитическом продолжении, интеграл типа Коши.*

Пусть Γ простой гладкий замкнутый контур, делящий плоскость комплексного переменного на внутреннюю область D^+ и внешнюю область D^-, и дани многочлены $p(t)$, $q(t)$ и функции $g(t) \in \mathrm{H}(\Gamma)$.

Найти две функции: $\varphi^+(z)$ - аналитическую в области D^+ и $\varphi^-(z)$ - аналитическую в области D^-, включая $z=\infty$, удовлетворяющие на контуре Γ краевому условию

$$\varphi^+(t) = \frac{|t-\alpha|^{\mu} p(t)}{|t-\beta|^{\gamma} q(t)} \varphi^-(t) + g(t), \qquad (1)$$

здесь α и β – некоторые несовпадающие точки контура, μ, γ – положительные вещественные числа, $g(t)$ – удовлетворяет условию Гёльдера, $p(t)$, $q(t)$ многочлены.

Решение задачи будем искать в классе функций, интегрируемых на контуре.

Так как

$$\begin{aligned} |t-\alpha|^{\mu} &= (t-\alpha)^{\mu}\cdot e^{-2i\theta_1\mu}, \qquad \theta_1 = \arg(t-\alpha); \\ |t-\beta|^{\gamma} &= (t-\beta)^{\gamma}\cdot e^{-2i\theta_2\gamma}, \qquad \theta_2 = \arg(t-\beta). \end{aligned} \tag{2}$$

Из соотношений (2) и (1) имеем:

$$\varphi^{+}(t) = \frac{(t-\alpha)^{\mu}e^{-2i\theta_1\mu}}{(t-\beta)^{\mu}e^{-2i\theta_2\gamma}}\cdot\frac{p(t)}{q(t)}\varphi^{-}(t) + g(t)$$

или

$$\varphi^{+}(t) = \frac{(t-\alpha)^{\mu}}{(t-\beta)^{\gamma}}e^{2i(\theta_2\gamma-\theta_1\mu)}\cdot\frac{p(t)}{q(t)}\varphi^{-}(t) + g(t). \tag{3}$$

Вводя обозначения, имеем $\mu = \mu_1 - \mu_2$, $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$, μ_1, γ_1 – целые числа, μ_2, γ_2 – их дробная часть т.е. $0 < \mu_2 < 1$, $0 < \gamma_2 < 1$.

Краевое условие (3) запишем в следующем виде:

$$\varphi^{+}(t) = \frac{(t-\alpha)^{\mu_1}}{(t-\beta)^{\gamma_1}}\cdot\frac{(t-\alpha)^{-\mu_2}}{(t-\beta)^{-\gamma_2}}e^{2i(\theta_2\gamma-\theta_1\mu)}\cdot\frac{p(t)}{q(t)}\varphi^{-}(t) + g(t)$$

или

$$\begin{aligned} (t-\alpha)^{\mu_2}(t-\beta)^{-\gamma_2}\varphi^{+}(t) = \frac{(t-\alpha)^{\mu_1}}{(t-\beta)^{\gamma_1}}e^{2i(\theta_2\gamma-\theta_1\mu)}\cdot\frac{p(t)}{q(t)}\varphi^{-}(t) + \\ + (t-\alpha)^{\mu_2}(t-\beta)^{-\gamma_2}g(t). \end{aligned} \tag{4}$$

Интегрируемую функцию $(t-\alpha)^{\mu_2}(t-\beta)^{-\gamma_2}g(t)$ можем записать

$$(t-\alpha)^{\mu_2}(t-\beta)^{-\gamma_2}g(t) = \psi^{+}(t) - \psi^{-}(t),$$

где $\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\tau-\alpha)^{\mu_2}(t-\beta)^{-\gamma_2}g(\tau)\frac{d\tau}{\tau-z}$, после чего краевое условие (4) преобразуется к виду

$$(t-\alpha)^{\mu_2}(t-\beta)^{-\gamma_2}\varphi^{+}(t) - \psi^{+}(t) = \frac{(t-\alpha)^{\mu_1}}{(t-\beta)^{\gamma_1}}e^{2i(\theta_2\gamma-\theta_1\mu)}\frac{p(t)}{q(t)}\varphi^{-}(t) - \psi^{-}(t). \tag{5}$$

Полагая в (5) $\varphi^{-}(z) = (z-\beta)^{\gamma_i}\cdot z^{-\gamma_i}\varphi_i^{-}(z)$, имеем

$$(t-\alpha)^{\mu_2}(t-\beta)^{-\gamma_2}\varphi^{+}(t) - \psi^{+}(t) = (t-\alpha)^{\mu_1}\cdot t^{-\gamma_1}\cdot e^{2i(\theta_2\gamma-\theta_1\mu)}\frac{p(t)}{q(t)}\varphi_1^{-}(t) - \psi(t).$$

Многочлен *T(t)* построим так, чтобы он удовлетворял условиям

$$\psi^{-(l)}_{(\alpha)} = \mathrm{T}^{(l)}(\alpha),\ l = 0,1,\ldots,\mu_1 - 1. \tag{6}$$

При помощи (6) краевое условие перепишем в виде

$$(t-\alpha)^{\mu_2}(t-\beta)^{-\gamma_2}\varphi^+(t) - \psi^+(t) - T(t) =$$

$$= (t-\alpha)^{\mu_1} \cdot t^{-\gamma_1} \cdot e^{2i(\theta_2\gamma - \theta_1\mu)} \frac{p(t)}{q(t)}\varphi_1^-(t) - \psi^-(t) - T(t)$$

или

$$(t-\alpha)^{\mu_2}(t-\beta)^{-\gamma_2}\varphi^+(t) - \psi^+(t) - \mathrm{T}(t) =$$

$$= (t-\alpha)^{\mu_1} \cdot t^{-\gamma_1} \cdot e^{2i(\theta_2\gamma - \theta_1\mu)} \cdot \frac{p(t)}{q(t)}\varphi_1^-(t) + (t-\alpha)^{\mu_1}\psi_1(t). \tag{7}$$

Разделив краевое условие (7) на $(t-\alpha)^{\mu_1}$, имеем

$$\frac{(t-\alpha)^{\mu_2}(t-\beta)^{-\gamma_2}\varphi^+(t) - \psi^+(t) - \mathrm{T}(t)}{(t-\alpha)^{\mu_1}} = t^{-\gamma_1}\frac{p(t)}{q(t)} \cdot e^{2i(\theta_2\gamma - \theta_1\mu)} \cdot \varphi_1^-(t) + \psi_1^-(t)$$

или

$$\varphi_1^+(t) = t^{-\gamma_1}\frac{p(t)}{q(t)} \cdot e^{2i(\theta_2\gamma - \theta_1\mu)} \cdot \varphi_1^-(t) + \psi_1^-(t).$$

Разложим многочлены $p(z),\ q(z)$ в произведение $p(z) = p_+(z) \cdot p_-(z),\quad q(z) = q_+(z) \cdot q_-(z),$ где $p_+(z),\ q_+(z)-$ многочлены, нули которых лежат в $D^+,\ p_-(z),\ q_-(z)$ – многочлены с нулями в D^+ и в D^-. Используя свойства индекса, получим æ $= m_t - n_t,$ где $m_+,\ n_+-$ число нулей многочленов $p_+(z),\ q_+(z)$. Имеем:

$$\varphi_1^+(t) = t^{-\gamma_1}\frac{p_+(t)\cdot p_-(t)}{q_+(t)\cdot q_-(t)} \cdot e^{2i(\theta_2\gamma - \theta_1\mu)} \cdot \varphi_1^-(t) + \psi_1^-(t),$$

$$\frac{q_-(t)}{p_-(t)}\varphi_1^+(t) - \frac{p_+(t)}{q_+(t)}e^{2i(\theta_2\gamma - \theta_1\mu)}\varphi_1^-(t) = \frac{q_-(t)}{p_-(t)}\psi_1^-(t)$$

или $\varphi_2^+(t) = G(t)\varphi_1^-(t) + g_1(t),$

где $\varphi_2^+(t) = \frac{q_-(t)}{p_-(t)}\varphi_1^+(t),\quad G(t) = \frac{p_+(t)}{q_+(t)}e^{2i(\theta_2\gamma - \theta_1\mu)},\ g_1(t) = \frac{q_-(t)}{p_-(t)}\psi_1^-(t).$

Отметим, что функция $G(t)$ в точках $t = \alpha,\ t = \beta$ имеет разрыв первого рода. Для устранения разрыва вводим новые функции

$$\varphi_2^+(z) = (z-\alpha)^{\mu_2}(z-\beta)^{\gamma_2}\varphi_3^+(z),\ \varphi_1^-(z) = \left(\frac{z-\alpha}{z-z_0}\right)^{\mu_2}\left(\frac{z-\beta}{z-z_0}\right)^{\gamma_2}\varphi_2^-(z),$$

$$(t-\alpha)^{\mu_2}(t-\beta)^{\gamma_2}\varphi_3^+(t)=G(t)\cdot\left(\frac{t-\alpha}{t-z_0}\right)^{\mu_2}\left(\frac{t-\beta}{t-z_0}\right)^{\gamma_2}\varphi_2^-(t)+g_1(t)$$

или

$$\varphi_3^+(t)=G(t)(t-z_0)^{-\mu_2}(t-z_0)^{-\gamma_2}\varphi_2^-(t)+(t-\alpha)^{-\mu_2}(t-\beta)^{-\gamma_2}g_1(t). \qquad (8)$$

Краевое условие (8) приведём к нулевому индексу

$$\varphi_3^+(\mathrm{t})=(t-z_0)^{-\mu_2-\gamma_2}\cdot t^{æ+\mu-\gamma}\left[t^{-æ-\mu+\gamma}\cdot G(t)\cdot e^{2i(\theta_2\gamma-\theta_1\mu)}\right]\varphi_2^-(t)+$$
$$+(t-\alpha)^{-\mu_2}(t-\beta)^{-\gamma_2}g_1(t).$$

Представляя $t^{-æ-\mu+\gamma}G(t)\cdot e^{2i(\theta_2\gamma-\theta_1\mu)}=\dfrac{\chi^+(t)}{\chi^-(t)}$, имеем

$$\frac{\varphi_3^+(t)}{\chi^+(t)}=t^{-\gamma_1}\frac{t^{æ+\mu-\gamma}}{\chi^-(t)}\cdot\varphi_2^-(t)+\frac{1}{\chi^+(t)}\cdot(t-\alpha)^{-\mu_2}(t-\beta)^{-\gamma_2}g_1(t).$$

Представляя функцию

$$\frac{1}{\chi^+(t)}(t-\alpha)^{-\mu_2}(t-\beta)^{-\gamma_2}g_1(t)=F^+(t)-F^-(t),$$

где $F(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma\frac{(\tau-\alpha)^{-\mu_2}(\tau-\beta)^{-\gamma_2}}{\chi^+(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}$, имеем

$$\frac{\varphi_3^+(t)}{\chi^+(t)}-F^+(t)=\frac{t^{æ-\gamma}}{\chi^-(t)}\varphi_2^-(t)-F^-(t).$$

После применения теоремы об аналитическом продолжении и обобщенной теоремы Лиувилля, имеем

$$\varphi_3^+(\mathrm{z})=\chi^+(z)\left[\mathrm{P}_{æ-\gamma-1}(z)+F^+(z)\right],$$
$$\varphi_2^-(z)=\chi^-(z)\left[\mathrm{P}_{æ-\gamma-1}(z)+F^-(z)\right].$$

Если индекс отрицательный, то нужно положить $\mathrm{P}_{æ-\gamma-1}(z)\equiv 0$ и добавить условия разрешимости. Условия разрешимости имеет следующий вид:

$$\int_\Gamma\frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)}g_1(\tau)\cdot\tau^{k-1}d\tau=0 \qquad (k=1,2,\ldots,-æ+\gamma).$$

Литература

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи // – М: Москва, 1977.− 640 с.
2. Михайлов Л.Г. Сингулярные краевые задачи сопряжения / Л.Г.Михайлов, Н.У. Усманов // ДАН России. − 2002.− Т. 387.− №3.− С.309-313.
3. Усмонов Н. Сингулярные случаи краевой задачи Римана для вещественной оси / Н. Усмонов, М.Б. Холикова, Н.Н. Усмонзода // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики и её приложений». Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Душанбе, 2018.− С.102-104.
4. Усмонов М.А. Задача сопряжения аналитических функций, главный коэффициент которой имеет нули и полюсы сопряжено аналитического вида на контуре // Вестник ТНУ.− 2107. −№1/3.− С.52-57.

МАСЪАЛАИ КАНОРИИ РИМАН БО КОЭФФИСИЕНТҲОИ РАТСИОНАЛӢ, КИ НОЛ ВА ҚУТБҲОИ ТАРТИБИ КАСРӢ ДОРАНД

Усмонов Н., Холикова М.Б., Усмонов М.А.

Донишгоҳи давлатии молия ва иқтисоди Тоҷикистон

Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С. Айнӣ

Дар назарияи умумӣ талаб карда мешавад, ки коэффитсиенти масъалаи шарти Гёлдерро қаноаткунанда дар ягон нуқта ба нол табдил намеёбад ва инчунин қутб надорад. Дар кори мазкур фарз карда мешавад, ки коэффитсиент метавонад дар якчанд нуқтаҳо ба нол табдил ёбад ва инчунин қутб дошта бошад. Муайян карда шудааст, ки нолҳои коэффитсиент ба шумораи ҳалҳо ва шартҳое, ки бо иҷрошудани онҳо масъалаи гайриякҷинса ҳалшаванда аст таъсир намерасонад. Аммо қутб ба шумораи ҳалҳо ва шартҳои ҳалшавандагии масъала таъсир мерасонад.

Калидвожаҳо: *нол, қутб, функсияи ратсионалӣ, шарти Гёлдер, бисёраъзогии интерполятсионӣ, теоремаи Лиувилл, теоремаи умумикардашудаи Лиувилл, теоремаи давоми аналитикӣ, интеграли намуди Коши.*

MARGINAL PROBLEM RYMAN'S WITH RATIONAL FACTOR, HAVING ZEROES AND INFINITY OF THE FRACTIONAL ORDER ON SIDEBAR

Usmonov N., Kholikova M.B., Usmonov M.A.

Tajik state financial-economic university

Tajik State pedagogical university named S. Ayni

In the general theory is expected that function satisfies the condition Gyolider`s moreover nowhere applies to zero. In persisting work are considered singular events, when can have a zeroes in a certain final count; calculate; list point of the sidebar, and applies to infinity.

The Main purpose persisting studies is concluded in decision on a matter, as it is changed number linear independent decisions and number of the conditions to solubility from presence of the zeroes and pole.

Presence of the zeroes does not influence upon number linear independent decisions and number of the conditions to solubility of the problem. Presence pole influences upon number of the decisions and number of the conditions to solubility of the problem.

Keywords: *zero, pole, rational function, condition Gyolider`s, interpolation polynomial, Liuvill theorem, generalized Liuvill theorem, theorem about analytical continuation, integral of the type Koshy.*

Сведения об авторах. **Усмонов Н.** – профессор, Таджикский государственный финансово-экономический университет.

Холикова М.Б. – зав. кафедрой математического анализа Таджикского государственного педагогического университета им.С.Айни.

Усмонов М.А. – докторант 3-го курса Таджикского государственного педагогического университета им.С.Айни. E-mail: mehrzon-92@mail.ru, Телефон: (+992)935-21-05-50

УДК 517.956

ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ И ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ЛИНИЕЙ

Шоймкулов Б.М.

Таджикский национальный университет

В настоящей работе исследована переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сверхсингулярной и одной сингулярной линией. При выполнении условия совместности общее решение этой системе найдено в явном виде, через три произвольных постоянных, которое в окрестности сверхсингулярной и сингулярной линии неограничено.

Заметим, что для данной системы используя полученные решения, можно ставить задачи с начальными данными (задачи типа Коши).

Ключевые слова*: произвольные постоянные, дифференцируема, условие совместности, асимптотические формулы, неизвестная функция, дифференциальные уравнения, система дифференциальных уравнений, частные производные, переопределенное, многообразие, сверх сингулярные и сингулярные линии.*

В треугольной области D, ограниченной отрезками $\Gamma_1=\{0<x<a_0, y=0\}, \Gamma_2=\{0<x<a_0, y=x\}, \Gamma_3=\{x=a_0, 0<y<a_0\}$ рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{a_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha}}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{b_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha}}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{c_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+1}}v + \dfrac{f_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+1}}, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \dfrac{a_2(x,y)}{x-y}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{b_2(x,y)}{x-y}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{c_2(x,y)}{(x-y)^2}v + \dfrac{f_2(x,y)}{(x-y)^2}, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \dfrac{a_3(x,y)}{x-y}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{b_3(x,y)}{x-y}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{c_3(x,y)}{(x-y)^2}v + \dfrac{f_3(x,y)}{(x-y)^2}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha > 1$, $a_j(x,y), b_j(x,y), c_j(x,y), f_j(x,y)(1 \le j \le 3)$ - заданные функции класса $C^1(D) \cap C(\overline{D})$, $v(x,y) \in C^2(D)$ - неизвестная функция.

В работе [1, 344], найдено интегральные представление многообразия решений некоторых переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной слабой сингулярной и двумя сверхсингулярными линиями. В частности в работе [2, 353], рассматривается некоторые переопределенные системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией с постоянными коэффициентами.

В настоящей работе рассматривается переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сверх сингулярной и одной сингулярной линией. В этом случае найдено интегральное представление многообразия решений в явном виде через три произвольных постоянных.

Пусть функции $a_j(x,y), b_j(x,y), c_j(x,y)$ и $f_j(x,y)(1 \le j \le 3)$ в системе (1), удовлетворяют следующим условиям совместности:

$$\begin{aligned} &a_3(x,y), b_3(x,y), c_3(x,y),\ f_3(x,y) \in C_x^1(\overline{D}), \\ &a_2(x,y), b_2(x,y), c_2(x,y),\ f_2(x,y) \in C^1(\overline{D}), \\ &a_1(x,y), b_1(x,y), c_1(x,y),\ f_1(x,y) \in C_y^1(\overline{D}), \end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{a_2(x,y)}{x-y}\right] + \frac{a_2(x,y)b_2(x,y)}{(x-y)^2} + \frac{c_2(x,y)}{(x-y)^2} = = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{a_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha}}\right] + \frac{a_3(x,y)b_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+1}}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{b_2(x,y)}{x-y}\right] + \frac{a_2(x,y)b_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+1}} + \frac{b_2(x,y)b_2(x,y)}{(x-y)^2} = = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{b_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha}}\right] + \frac{a_1(x,y)b_2(x,y)}{(x-y)^{\alpha+1}} + \frac{b_1(x,y)b_3(x,y)}{(x-y)^{\alpha+1}} + \frac{c_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+1}}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{c_2(x,y)}{(x-y)^2}\right] + \frac{a_2(x,y)c_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+2}} + \frac{b_2(x,y)c_2(x,y)}{(x-y)^3} = = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{c_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+1}}\right] + \frac{a_1(x,y)c_2(x,y)}{(x-y)^{\alpha+2}} + \frac{b_1(x,y)c_3(x,y)}{(x-y)^{\alpha+2}}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_2(x,y)}{(x-y)^2}]+\frac{a_2(x,y)\,f_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+2}}+\frac{b_2(x,y)\,f_2(x,y)}{(x-y)^3}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+1}}]+\frac{a_1(x,y)\,f_2(x,y)}{(x-y)^{\alpha+2}}+\frac{b_1(x,y)\,f_3(x,y)}{(x-y)^{\alpha+2}}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{a_3(x,y)}{x-y}]+\frac{a_1(x,y)a_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}}+\frac{a_2(x,y)b_3(x,y)}{(x-y)^{\beta+\gamma}}+\frac{c_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{a_2(x,y)}{(x-y)^{\beta}}]+\frac{a_2(x,y)a_2(x,y)}{(x-y)^2}+\frac{a_3(x,y)b_2(x,y)}{(x-y)^2}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{b_3(x,y)}{x-y}]+\frac{a_3(x,y)b_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+1}}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{b_2(x,y)}{x-y}]+\frac{a_2(x,y)b_2(x,y)}{(x-y)^2}+\frac{c_2(x,y)}{(x-y)^2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{c_3(x,y)}{(x-y)^2}]+\frac{a_3(x,y)c_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+2}}+\frac{b_3(x,y)c_2(x,y)}{(x-y)^3}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{c_2(x,y)}{(x-y)^2}]+\frac{a_2(x,y)c_2(x,y)}{(x-y)^3}+\frac{b_2(x,y)c_3(x,y)}{(x-y)^3}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,y)}{(x-y)^2}]+\frac{a_3(x,y)\,f_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+2}}+\frac{b_3(x,y)\,f_2(x,y)}{(x-y)^3}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_2(x,y)}{(x-y)^2}]+\frac{a_2(x,y)\,f_2(x,y)}{(x-y)^3}+\frac{b_2(x,y)\,f_3(x,y)}{(x-y)^3}. \quad (10)$$

При выполнении условий (2)-(10), используя функцию $v(x,y)=(x-y)^{-1}u$, из системы (1) получим систему вида

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{g_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha}}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{f_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha}},\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{g_2(x,y)}{x-y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{f_2(x,y)}{x-y},\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{g_3(x,y)}{x-y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{f_3(x,y)}{x-y},\end{cases} \quad (11)$$

где

$$g_1(x,y)=b_1(x,y), g_2(x,y)=b_2(x,y)-1,\ \ g_3(x,y)=b_3(x,y)-2.$$

Совершая операцию перекрёстного дифференцирования, то есть приравнивая смешанные частные производные из системы (11), получим условия совместности в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{g_2(x,y)}{x-y}]+\frac{g_2(x,y)g_2(x,y)}{(x-y)^2}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{g_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha}}]+\frac{g_1(x,y)g_3(x,y)}{(x-y)^{\alpha+1}}, \quad (12)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_2(x,y)}{x-y}]+\frac{g_2(x,y)f_2(x,y)}{(x-y)^2}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha}}]+\frac{g_1(x,y)f_3(x,y)}{(x-y)^{\alpha+1}}, \quad (13)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{g_3(x,y)}{x-y}]=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{g_2(x,y)}{x-y}], \quad (14)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,y)}{x-y}]+\frac{g_3(x,y)f_2(x,y)}{(x-y)^2}=$$
$$=(\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_2(x,y)}{x-y}]+\frac{g_2(x,y)f_3(x,y)}{(x-y)^2}. \quad (15)$$

Одноко указанные условия совместности могут не удовлетворяться ни при каких заданных функциях, тогда исходная система не имеет решений, то есть она несовместна.

Далее мы предположим, что указанные условия совместности выполнены, то есть исходная система совместна.

Тогда используя новую функцию $\frac{\partial u}{\partial y}=W$, из двух последних уравнений системы (11) получим переопределенную систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной линией вида

$$\begin{cases}\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{g_2(x,y)}{x-y}W+\frac{f_2(x,y)}{x-y},\\ \frac{\partial W}{\partial y}=\frac{g_3(x,y)}{x-y}W+\frac{f_3(x,y)}{x-y}.\end{cases} \quad (16)$$

Предположим, что второе уравнение системы (16) является основным и интегрирование начнём со второго уравнения системы (16).

Соответствующее однородное уравнение второго уравнения системы (16) имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{g_3(x,y)}{x-y}W.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \ln W}{\partial y}=\frac{g_3(x,y)}{x-y}.$$

Интегрируя по переменной y, находим решение в виде

$$W(x,y)=(x-y)^{-g_3 0,0)}\exp(\omega_3(x,y))\psi_1(x), \tag{17}$$

где $\omega_1(x,y)=\int_0^y \frac{g_3(x,\tau)-g_3(0,0)}{x-\tau}d\tau$, $\psi_1(x)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Считая, что функция $\psi_1(x)$ зависит от переменной y, равенство (17) будем дифференцировать:

$$\frac{\partial W}{\partial y}=g_3(0,0)(x-y)^{-g_3(0,0)-1}\exp(\omega_3(x,y))\psi_1(x,y)+$$

$$+(x-y)^{-g_3(0,0)}\exp(\omega_3(x,y))\frac{g_3(x,y)-g_3(0,0)}{x-y}\psi_1(x,y)+$$

$$+(x-y)^{-g_3(0,0)}\exp(\omega_3(x,y))\psi'_1(x,y).$$

Подставляя значение $\frac{\partial W}{\partial y}$ и учитывая (17), имеем

$$\frac{\partial W}{\partial y}=g_3(0,0)(x-y)^{-g_3(0,0)-1}\exp(\omega_3(x,y))\psi_1(x,y)+$$

$$+(x-y)^{-g_3(0,0)}\exp(\omega_3(x,y))\frac{g_3(x,y)-g_3(0,0)}{x-y}\psi_1(x,y)+$$

$$+(x-y)^{-g_3(0,0)}\exp(\omega_3(x,y))\psi'_1(x,y)=$$

$$=\frac{g_3(x,y)}{x-y}(x-y)^{-g_3(0,0)}\exp(\omega_3(x,y))\psi_1(x,y)+\frac{f_3(x,y)}{x-y}.$$

После некоторых нетрудных операций для нахождения $\psi_1(x,y)$ получим уравнение

$$\frac{d\psi_1(x,y)}{dy}=\frac{f_3(x,y)}{(x-y)^{1-g_3(0,0)}}\exp(-\omega_1(x,y)).$$

Отсюда после интегрирования будем иметь

$$\psi_1(x,y)=\int_0^y \frac{f_3(x,\tau)}{(x-\tau)^{1-g_3(0,0)}}\exp(-\omega_1(x,\tau))d\tau+\psi_2(x). \tag{18}$$

Если использовать значение $\psi_1(x,y)$, тогда общее решение второго уравнения системы (16) примет вид

$$W(x,y)=(x-y)^{-g_3(0,0)}\exp(\omega_1(x,y))[\psi_2(x)+\int_0^y \frac{f_3(x,\tau)\exp(-\omega_1(x,\tau))}{(x-\tau)^{1-g_3(0,0)}}d\tau]. \tag{19}$$

Далее, предположим, что $g_3(0,0)<0$ и функция $g_3(x,y)$ в окрестности точек $y=x$ удовлетворяет условию типа Гельдера

$$|g_3(x,y)-g_3(0,0)|\le H_1(x-y)^{\gamma_1}, H_1=const>0, \gamma_1>0 \tag{20}$$

и функция $f_3(x,y)$ в окрестности точек $y=x$ обращается в нуль с асимптотической формулой

$$f_3(x,y)=o[(x-y)^{\gamma_2}],\gamma_2>-g_3(0,0). \tag{21}$$

Далее дифференцируем равенство (19) по переменной x:

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial x}=(-g_3(0,0)(x-y)^{-g_3(0,0)-1}+\frac{\partial\omega_1(x,y)}{\partial x})\exp(\omega_1(x,y))[\psi_2(x)+$$
$$+\int_0^y\frac{f_3(x,\tau)\exp(-\omega_1(x,\tau))}{(x-\tau)^{1-g_3(0,0)}}d\tau]+(x-y)^{-g_3(0,0)}\exp(\omega_1(x,y))[\frac{d\psi_2(x)}{dx}+$$
$$+\int_0^y\frac{\partial}{\partial x}(\frac{f_3(x,\tau)\exp(-\omega_1(x,\tau))}{(x-\tau)^{1-g_3(0,0)}})d\tau].$$

Подставляя $\frac{\partial W(x,y)}{\partial x}$ и $W(x,y)$ в первое уравнение системы (16), после некоторых несложных операций, находим условие совместности системы (16) в следующим виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,y)\exp(-\omega_1(x,y))}{(x-y)^{1-g_3(0,0)}}]=\frac{\partial}{\partial y}\{(\frac{g_2(x,y)}{x-y}-$$
$$-\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{g_3(0,0)}{x-y})(\psi_2(x)+\int_0^y\frac{f_3(x,\tau)\exp(-\omega_1(x,\tau))}{(x-\tau)^{1-g_3(0,0)}}d\tau)+ \tag{22}$$
$$+\frac{f_2(x,y)\exp(-\omega_1(x,y))}{(x-y)^{1-g_3(0,0)}}\}.$$

Предположим, что условие (22) выполнено. Тогда из первого уравнения системы (16) получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с одной сингулярной линией

$$\frac{d\psi_2(x)}{dx}=\frac{g_2(x,0)+g_3(0,0)}{x}\psi_2(x)+\frac{f_2(x,0)}{x^{1-g_3(0,0)}}. \tag{23}$$

Однородное уравнение (23) запишем в виде

$$\frac{d\ln\psi_2(x)}{dx}=\frac{g_2(x,0)+g_3(0,0)}{x}.$$

Интегрируя по переменной x, имеем

$$\psi_2(x)=x^{g_2(0,0)+g_3(0,0)}\exp(\omega_2(x,0))c,$$

где c - произвольная постоянная.

Подставляя $\psi_2(x)$ в (23), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dc}{dx}=\frac{f_2(x,0)\exp(-\omega_2(x,0))}{x^{1+g_2(0,0)}}.$$

Отсюда

$$c=\int_0^x\frac{f_2(t,0)\exp(-\omega_2(t,0))}{t^{1+g_2(0,0)}}dt+c_1.$$

Таким образом, общее решение уравнения (23) будет

$$\psi_2(x) = x^{g_2(0,0)+g_3(0,0)} \exp(\omega_2(x,0))[c_1 + \int_0^x \frac{f_2(t,0)\exp(-\omega_2(t,0))}{t^{1+g_2(0,0)}} dt], \quad (24)$$

где $\omega_2(x,0) = \int_0^x \frac{g_2(t,0) - g_2(0,0)}{t} dt$, c_1 - произвольная постоянная.

Пусть функция $g_2(x,0)$ удовлетворяет условию

$$|g_2(x,0) - g_2(0,0)| \le H_2(x^{\gamma_3}), H_2 = const > 0, \gamma_3 > 0 \quad (25)$$

и функция $f_2(x,0)$ в окрестности точек $x = 0$ обращается в нуль и её поведение определяется следующей асимптотической формулой

$$f_2(x,0) = o[x^{\gamma_4}], \gamma_4 > g_2(0,0) \quad (26)$$

и $g_2(0,0) + g_3(0,0) > 0$.

Подставляя (24) в (19), находим общее решение системы (16) в виде

$$W(x,y) = (x-y)^{-g_3(0,0)} \exp(\omega_1(x,y))\{x^{g_2(0,0)+g_3(0,0)} \exp(\omega_2(x,0))[c_1 +$$
$$+ \int_0^x \frac{f_2(t,0)\exp(-\omega_2(t,0))}{t^{1+g_2(0,0)}} dt] + \int_0^y \frac{f_3(x,\tau)\exp(-\omega_1(x,\tau))}{(x-\tau)^{1-g_3(0,0)}} d\tau]. \quad (27)$$

Далее, интегрируя новую функцию $\frac{\partial u}{\partial y} = W$ по переменной y, имеем

$$u(x,y) = \int_0^y W(x,\tau) d\tau + \psi_3(x). \quad (28)$$

Подставляя (27), (28) в первое уравнение (11) для разрешимости находим условие совместности

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{(x-y)^{-g_3(0,0)} \exp(\omega_1(x,y))\{x^{g_2(0,0)+g_3(0,0)} \exp(\omega_2(x,0))[c_1 +$$
$$+ \int_0^x \frac{f_2(t,0)\exp(-\omega_2(t,0))}{t^{1+g_2(0,0)}} dt] + \int_0^y \frac{f_3(x,\tau)\exp(-\omega_1(x,\tau))}{(x-\tau)^{1-g_3(0,0)}} d\tau]\} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\{\frac{g_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha}}(x-y)^{-g_3(0,0)} \exp(\omega_1(x,y))\{x^{g_2(0,0)+g_3(0,0)} \exp(\omega_2(x,0))[c_1 + \quad (29)$$
$$+ \int_0^x \frac{f_2(t,0)\exp(-\omega_2(t,0))}{t^{1+g_2(0,0)}} dt] + \int_0^y \frac{f_3(x,\tau)\exp(-\omega_1(x,\tau))}{(x-\tau)^{1-g_3(0,0)}} d\tau] + \frac{f_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha}}\}.$$

Предположим, что условие (29) выполнено. Тогда для нахождения произвольной функции $\psi_3(x)$ получим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2\psi_3(x)}{dx^2} = \frac{g_1(x,0)\exp(\omega_2(x,0))}{x^{\alpha-g_2(0,0)}}[c_1 + \int_0^x \frac{f_2(t,0)\exp(-\omega_2(t,0))}{t^{1+g_2(0,0)}}] + \frac{f_1(x,o)}{x^{\alpha}}. \quad (30)$$

Интегрируя дважды равенство (30) по переменной x, будем иметь

$$\psi_3(x) = c_1\int_0^x \frac{(x-t)(g_1(t,0)\exp(\omega_2(t,0)) - g_1(0,0))}{t^{\alpha-g_2(0,0)}}dt +$$

$$+\int_0^x \frac{(x-t)^2 g_1(t,0) f_2(t,0)}{2t^{\alpha+1}}\exp(\omega_2(x,0)-\omega_2(t,0))dt + \qquad (31)$$

$$+\int_0^x \frac{(x-t)(f_1(t,0)-f_1(0,0))}{t^{\alpha}}dt + \frac{c_1 g_1(0,0)x^{g_2(0,0)-\alpha+2}}{(g_2(0,0)-\alpha+1)(g_2(0,0)-\alpha+2)} +$$

$$+\frac{f_1(0,0)}{(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-2}} + c_2 x + c_3.$$

Из функций $g_1(x,0)$ и $f_1(x,0)$ потребуем, чтобы они удовлетворяли условиям типа Гельдера

$$\left|g_1(x,o)\exp(\omega_2(x,0)) - g_1(0,0)\right| \le H_3(x^{\gamma_5}),$$
$$H_3 = const > 0, \gamma_5 > \alpha - g_2(0,0) - 1, \qquad (32)$$

$$\left|f_1(x,0) - f_1(0,0)\right| \le H_4(x^{\gamma_6}), H_6 = const > 0, \gamma_6 > \alpha - 1. \qquad (33)$$

Предположим, что условия (32) и (33) выполнены, тогда подставляя $\psi_3(x)$ из (31) в (28) и учитывая (27), будем иметь

$$u(x,y) = \int_0^y \frac{f_3(x,\tau_1)\exp(-\omega_1(x,\tau_1))}{(x-\tau_1)^{1-g_3(0,0)}}W(x,\tau_1)d\tau_1 +$$

$$+c_1[\int_0^y \frac{(x-\tau)^{-g_3(0,0)}\exp(\omega_3(x,\tau))}{t^{-g_2(0,0)-g_3(0,0)}\exp(-\omega_2(x,\tau))}dt +$$

$$+\int_0^x \frac{(x-t)(g_1(t,0)\exp(\omega_2(t,0)) - g_1(t,0))}{2t^{\alpha-g_2(0,0)}}dt] +$$

$$+\int_0^x K(x,y,t) f_2(t,0)dt + \int_0^x \frac{(x-t)(f_1(t,0)-f_1(0,0))}{t^{\alpha}}dt + \qquad (34)$$

$$+\frac{c_1 g_1(0,0)x^{g_2(0,0)-\alpha+2}}{(g_2(0,0)-\alpha+1)(g_2(0,0)-\alpha+2)} +$$

$$+\frac{f_1(0,0)}{(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-2}} + c_2 x + c_3,$$

где $W(x,\tau_1) = \int_{\tau_1}^y (x-s)^{-g_3(0,0)}\exp(\omega_1(x,s))ds,$

$$K(x,y,t) = [\frac{x^{g_2(0,0)+g_3(0,0)}}{t^{1+g_2(0,0)}}\int_0^y (x-\tau)^{-g_3(0,0)}\exp(\omega_1(x,\tau))d\tau +$$

$$+\frac{(x-t)^2 g_1(t,0)}{2t^{\alpha+1}}]\exp(\omega_2(x,0)-\omega_2(t,0)),$$

c_1, c_2, c_3 - произвольные постоянные.

Теорема 1. *Пусть в системе (11, функции* $g_j(x,y), f_j(x,y)(1 \le j \le 3)$ - *удовлетворяют условиям (12),(13),(14),(15),(20),(21),(22),(25),(26),(29),(32),(33) и* $g_3(0,0) < 0,\ g_2(0,0) + g_3(0,0) > 0$ *в области* D. *Тогда любое решение системы (11) из класса* $C^2(D)$ *представимо в виде (34).*

Замечание 1. Решение вида (34) в окрестности сингулярной линии $y = x$ при выполнении всех условий теоремы 1 имеет полюс порядка $\alpha - 2$.

Теорема 2. *Пусть в системе (1) коэффициенты правых частей удовлетворяют условиям (2),(3),(4),(5),(6),(7),(8),(9),(10) и выполнены все условия теоремы 1. Тогда любое решение системы (1) из класса* $C^2(D)$ *представимо в виде*

$$v(x,y) = (x-y)^{-1} u(x,y), \tag{35}$$

где функция $u(x,y)$ *может быть представлена в виде (34).*

Замечание 2. Решение вида (35) в окрестности сингулярной линии $y = x$, при выполнении всех условий теоремы 2 неограниченно.

Литература

1. Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями // Душанбе, 1980 (ч.1.). − 126 с., 1981 (ч.2.). − 170с.
2. Раджабов Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами // Душанбе, 1992. − 236 с.
3. Шоймкулов Б.М. К теории некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными точками на плоскости / Б.М. Шоймкулов, Э. Рузметов // Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения (сборник научных статей). – Душанбе, 1988. − вып. 6. − С. 96-106.
4. Шоймкулов Б.М. Интегральные представление многообразия решений некоторых переопределенных систем двух уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными коэффициентами // Вестник педагогического университета (серия естественных наук). – 1999. – №5.− С.102- 105.
5. Шоймкулов Б.М. Интегральные представления многообразия решений некоторых переопределенных систем трех уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными точками в полярных координатах / Б.М. Шоймкулов, Н.Р. Раджабов // Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения (сборник научных статей). – Душанбе, 1999. − вып.8. − С.105-108.

6. Шоймкулов Б.М. Интегральные представление многообразия решений некоторых переопределенных систем трех уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными точками на плоскости // Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения (сборник научных статей). − Душанбе, 1999. − вып.8. − С.109-111.
7. Шоймкулов Б.М. Интегральные представления многообразия решений некоторых переопределенных систем двух уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными точками на плоскости. // Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения (сборник научных статей). – Душанбе, 1999. − вып.8 − С.112-114.
8. Шоймкулов Б.М. Об одной переопределенной системе уравнений второго порядка с сингулярной точкой // Вестник педагогического университета (серия естественных наук). − Душанбе, 2001.− С.42−43.
9. Шоймкулов Б.М. Об одной переопределенной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными коэффициентами // Вестник педагогического университета (серия естественных наук). –2003.− С.50-52.
10. Шоймкулов Б.М. Об одной переопределенной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с сингулярной точкой // Вестник педагогического университета (серия естественных наук). − 2003. − №2. − С.53−57.
11. Шоймкулов Б.М. Линейные неоднородные переопределенные системы трех уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной точкой // Вестник Национального Университета (серия естественных наук).− 2003. − №4(18). − С. 8-12.
12. Шоймкулов Б.М. О некоторых переопределенных системах трех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией и с одной сингулярной точкой // Вестник педагогического университета (серия естественных наук). –2005. − №3. − С. 67 − 70.
13. Шоймкулов Б.М. Линейная переопределенная система второго порядка с одной сингулярной точкой / Б.М. Шоймкулов, Н. Раджабов // Вестник Национального Университета (серия естественных наук). − 2005. − №3(26). − С.3 −10.
14. Шоймкулов Б.М. Об одной переопределенной системы дифференциальных уравнений в частных производных с одной сингулярной и с одной сверх – сингулярной точкой // Вестник педагогического университета (серия естественных наук). –2009. − №1 (33). − С.101−105.
15. Шоймкулов Б.М. О некоторых переопределенных систем дифференциальных уравнений второго порядка с одной сингулярной линией // Вестник Таджикского национального университета(серия естественных наук). –2010. − №3 (59). – С.113–118.
16. Шоймкулов Б.М. О некоторых переопределенных системах дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с

одной сингулярной линией в общем случае // Вестник Таджикского национального университета (серия естественных наук). − 2015. − №1/3(164). – С.12 −18.
17. Шоймкулов Б.М. О некоторых переопределенных системах дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сверхсингулярной линией в общем случае // Вестник Таджикского национального университета (серия естественных наук). − 2017. − № 1/2. – С. 46 − 52.
18. Шоймкулов Б.М. Интегральные представления многообразия решений для одной переопределенной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной и с одной сверхсингулярной линией в общем случае // Вестник Таджикского национального университета (серия естественных наук). − 2017. − № 1/5. − С. 133 – 138.
19. Шоймкулов Б.М. К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией и двумя сверхсингулярными линиями // Вестник Таджикского национального университета (серия естественных наук). – 2018. − №3. − С.32 −43.
20. Шоймкулов Б.М. О некоторых переопределенных системах дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной слабой сингулярной и двумя сверхсингулярными линиями // Материалы международной конференции «Современные задачи математики и их приложения», посвященной 80− летию академика АН Республики Таджикистан Н. Раджабова. − Душанбе, 25-26 сентября 2018 г. − С.344−352.
21. Шоймкулов Б.М. Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией с постоянными коэффициентами / Б.М. Шоймкулов, А.Х. Мирзоев // Материалы международной конференции «Современные задачи математики и их приложения», посвященной 80 − летию академика АН Республики Таджикистан, Н.Раджабова. − Душанбе, 25-26 сентября 2018 г. − С.353−360.

СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲОИ БАРЗИЁДМУАЙЯНШУДА БО ҲОСИЛАҲОИ ХУСУСИИ ТАРТИБИ ДУЮМ БО ЯК ХАТТИ СУПЕРСИНГУЛЯРӢ ВА БО ЯК ХАТТИ СИНГУЛЯРӢ

Шоймкулов Б.М.

Донишгоҳи милли Тоҷикистон

Дар мақолаи мазкур системаи муодилаҳои барзиёдмуайяншуда бо ҳосилаҳои хусусии тартиби дуюм бо як хатти суперсингулярӣ ва бо як хатти сингулярӣ омӯхта шуда, ҳангоми иҷрошудани шартҳои ҳамҷоягӣ ҳалли ин система дар намуди ошкор ёфта шудааст, ки ҳалли ёфта шуда се ададҳои ихтиёрии доимиро дар бар мегирад ва дар аторфи хаттӣ суперсингулярӣ ва сингулярӣ номаҳдуд аст.

Қайд мекунем, ки барои ёфтани доимиҳои ихтиёри масъалаи шартҳои аввала (масъалаи намуди Коши)-ро гузоштан мумкин аст.

***Калидвожаҳо**: доимиҳои ихтиёрӣ – дифференсиронидашаванда – шартҳои ҳамҷоягӣ – формулаи асимптотӣ – функсияи номаълум – муодилаҳои дифференсиалӣ – системаи муодилаҳои дифференсиалӣ – ҳосилаҳои хусусӣ – барзиёдмуайяншуда – бисёршакла – хатҳои суперсингулярӣ ва сингулярӣ.*

OVER DETERMINED SECOND ORDER SYSTEM PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH ONE SUPER SINGULAR ONE SINGULAR LINES

Shoimkulov B.M.
Tajik national university

In the present work the redefined system of the differential equations in private derivatives of the second order with one super - singular and one singular a line is investigated, at performance a condition of compatibility the common decision to this system is found in an explicit form, through any three constants which in a vicinity super - singular and singular lines it is unlimited.

Let's notice that for given to system using the received decisions it is possible to put problems with the initial data (a problem of type of Kouchi).

***Keywords**: any constants - it is differentiated - a compatibility condition - asymptotic formulas - unknown function - the differential equations - system of the differential equations - private derivatives - redefined - varieties - super - singular and singular lines.*

Сведения об авторе. **Б.М. Шоймкулов** – доцент кафедры математического анализа и теории функций ТНУ. Телефон: (+992) 919-43-11-84. E-mail: boitura@mail.ru

УДК 538.931+537.84

ОБ УЧЕТЕ ДИПОЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ МАГНИТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Комилов К., Зарипов А.К.
Таджикский национальный университет

В работе обобщено выражение для коэффициента трения магнитных жидкостей, зависящее от молекулярных параметров системы, и учитывающее вдобавок Ван дер Ваальсовских межчастичных сил, диполь-дипольное взаимодействие между магнитными частицами. На основе обобщенного выражения для коэффициента трения проведен численный расчет его зависимости от значения концентрации коллоидных частиц в магнитных жидкостях. Результаты расчетов показывают, что увеличение концентрации магнетитов в жидкости приводит к возрастанию значения коэффициента трения.

***Ключевые слова:** магнитная жидкость, коэффициент трения, дипольное взаимодействие, явления переноса.*

Одним из теоретических методов, успешно применяющихся при исследовании физических свойств магнитных жидкостей, является метод молекулярно-кинетической теории строения вещества. Этот метод позволяет на

основе единой микроскопической теории исследовать явления переноса, упругие и акустические свойства магнитных жидкостей, внести ясность в структуру и характер теплового движения частиц и, выявляя природу релаксационных процессов, позволяет разъяснить те свойства, которые обусловлены неравновесными процессами в магнитных жидкостях. Раннее в [1, 2] на основе этого метода были получены кинетические уравнения для одночастичной и двухчастичной функций распределения, описывающие неравновесные процессы и позволяющие вывести уравнения обобщенной гидродинамики магнитных жидкостей:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{p_1^\alpha}{m}\frac{\partial f_1}{\partial q_1^\alpha}+F^\alpha(\vec{q}_1,t)\frac{\partial f_1}{\partial p_1^\alpha}-\int\hat{\Theta}_{12}f_2 d\vec{x}_2=\beta\frac{\partial}{\partial p_1^\alpha}\left[\frac{\tilde{p}_1^\alpha}{m}f_1+kT\frac{\partial f_1}{\partial p_1^\alpha}\right],$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{p_i^\alpha}{m}\frac{\partial f_2}{\partial q_i^\alpha}+F^\alpha(\vec{q}_i,t)\frac{\partial f_2}{\partial p_i^\alpha}-\frac{\partial\Phi(1,2)}{\partial q_i^\alpha}\frac{\partial f_2}{\partial p_i^\alpha}-\int\frac{\partial\Phi(i,3)}{\partial q_i^\alpha}\frac{\partial f_3}{\partial p_i^\alpha}d\vec{q}_3 d\vec{p}_3\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\beta_i\frac{\partial}{\partial p_i^\alpha}\left[\frac{\tilde{p}_i^{\,\alpha}}{m}+kT(\vec{q}_i,t)\frac{\partial}{\partial p_i^\alpha}\right]f_2.$$

Правые части этих уравнений, которые получены в приближении парных взаимодействий и обеспечивают необратимость этих уравнений по времени, содержат коэффициент трения β. Как отмечено в [3], эта величина, определяемая только силами Ван дер Ваальса, в приближении парного взаимодействия характеризует процесс, благодаря которому последовательные соударения твердых сфер оказываются независимыми. Также, при выводе выражений, описывающих вязкоупругие свойста магнитных жидкостей, в кинетических частях коэффициентов переноса и модулей упругости содержится время трансляционной релаксации вязкого тензора напряжений $\tau_1=m/2\beta$, а в потенциальных частях – феноменологическое время структурной релаксации $\tau_0=\beta\sigma^2/2kT$, которые определяются посредством коэффициента трения. Отсюда видно, что вклад коэффициента трения в анализе структуры и свойств магнитных жидкостей является определяющим. Необходимо отметить, что в рамках указанной модели определить коэффициент трения невозможно. Поскольку коэффициент трения тесно взаимосвязан с параметрами состояния и межмолекулярными силами в системе, при его определении возникают некоторые трудности.

Кирквуд в [4], основываясь на молекулярной теории броуновского движения «большой» частицы, получил уравнение Фоккера-Планка в импульсном пространстве, сопоставляя которое с уравнением Ланжевена, впервые нашел формулу, связывающую коэффициент трения с

микроскопическими параметрами и межмолекулярными силами взаимодействия:

$$\beta_i = \frac{1}{6kT}\int_{-\tau_i}^{+\tau_i} {}^{i}\langle F_i \cdot e^{\mathbf{isL}} F_i \rangle^0 ds,$$

где $L = i\sum_{l=1}^{N}\left\{\frac{p_l}{m_l}\cdot\nabla_{r_l} + F_l \cdot \nabla_{p_{li}}\right\}$.

Теория Кирквуда обсуждается в работе Райса и Фриша [5], и там же, путем вычисления автокорреляционной функции импульсов и нахождением средней силы, действующей на частицу, выводится выражение для коэффициента трения в виде:

$$\beta^2 = \frac{Nm}{3V}\int \nabla^2 U(R) g_0^{(2)}(R) d^3 R. \qquad (1)$$

В работе [6] коэффициент трения связывается с временным интегралом от автокорреляционной функции сил, с учетом того, что траектории равномерно движущихся частиц являются прямолинейными. Это означает, что действия сил окружающей среды на частиц являются относительно слабыми, поэтому корреляции сил рассчитываются особым способом, вытекающим из теории возмущений. В этой же работе приводится среднее значение коэффициента трения в виде

$$\beta = \frac{8}{3} n g(\sigma) \sigma^2 \left(\frac{\pi m}{kT}\right)^{1/2},$$

где, σ – диаметр частицы, $g(\sigma)$ – контактная радиальная функция распределения.

Также в [7], на основе теории Райса–Олнэтта, получено выражение для коэффициента трения, имеющее вид:

$$\beta = \frac{1}{3kT\tau}\int_0^{\tau} ds \int_0^{s} ds' \langle F_1^{(S)}(R^{(N)}) \cdot F_1^{(S)}(R^{(N)} - (s' p^{(N)} / m))\rangle.$$

Хотя эти выражения получены в разных приближениях, как отмечено в [6], средние значения коэффициента трения, вычисленные разными авторами по полученным ими выражениям, согласуются между собой.

Для определения коэффициента трения магнитной жидкости будем исходить из выражения (1), для вычисления которого необходимо знать явный вид потенциальной энергии межчастичного взаимодействия и радиальной функции распределения.

В магнитной жидкости молекулы жидкости-носителя могут взаимодействовать как между собой, так и с магнитными частицами, участвующими в тепловом движении. Устойчивость магнитной жидкости, в

основном, определяется энергией взаимодействия между магнитными частицами. Если потенциальная энергия взаимодействия этих частиц меньше kT, тогда тепловое движение препятствует их слипанию и агрегации, и жидкость остается устойчивой. В противном случае, агрегация магнитных частиц приводит к их оседанию, и магнитная жидкость, расслаиваясь, теряет свои свойства. Поэтому потенциальную энергию взаимодействия между структурными единицами, по аналогию потенциала Штокмайера, предпочтительнее выбирать в виде суммы потенциалов Леннарда-Джонса и диполь-дипольного взаимодействия:

$$\Phi(r) = \Phi^{s}(r) + \Phi^{dd}(r), \qquad (2)$$

где $\Phi^{(s)}(r) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$ – потенциал Леннарда-Джонса, $\Phi^{dd}(r)$ – энергия диполь-дипольного взаимодействия.

Энергия дипольного взаимодействия i-я частица, находящаяся в поле действия j-й частицы величиной H_j, в общем случае, определяется выражением

$$U^{d} = -\mu_0 m_i \cdot H_j.$$

Если ориентация диполя m_j частицы совпадает с направлением поля H_j, значение этого поля будет

$$H_j = \frac{1}{2\pi}\frac{m_j \cos\theta}{r^3}.$$

Если магнитная жидкость помещена во внешнее магнитное поле H, энергия диполя $\boldsymbol{m}_i$ в суммарном поле $H_e = H + H_j$ будет

$$U_i = -m_i H_e \cos(m_i, H_e).$$

Как отмечено в [8], влияние внешнего поля приводит к устремлению ориентации диполей к направлению поля H_e, но тепловое движение препятствует этому упорядочению. В результате устанавливается некоторое равновесие, соответствующее наименьшей энергии. Средняя ориентация диполей зависит от величины поля H_e и аргумента функции Ланжевена

$$L(a_e) = \mathrm{cth} a_e - \frac{1}{a_e},$$

где $a_e = \frac{m_i H_e}{kT}$. При сильном внешнем поле ($H >> H_j$) $L(a_e) \approx L(a)$. Если для средней ориентации диполей считать $m_i = m_j = m$, потенциальная энергия взаимодействия определяется выражением

$$\Phi^{dd}(r,H,\theta) = -\frac{\mu_0 m^2 L(a)^2}{2\pi r^3}\cos\theta, \qquad (3)$$

где $L(a) = \text{cth}a - (1/a) = \text{cth}\left(\frac{mH}{kT}\right) - \frac{kT}{mH}$.

Таким образом, выражение (2) с учетом (3) принимает следующий вид:

$$\Phi(r,H,\theta) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right] - \frac{\mu_0 m^2 L(a)^2}{2\pi r^3}\cos\theta.$$

Радиальную функцию распределения на основе [9] выбираем в виде

$$g(r) = y(\rho^*)\exp[-\frac{\Phi(r,H,\theta)}{kT}],$$

где в качестве контактной функции распределения была принята функция $y(\rho^*) = (2-\rho^*)/2(1-\rho^*)^3$, предложенная Карнаханом–Старлингом; $\rho^* = \pi\sigma^3 n/6 = \pi\rho N_0\sigma^3/6M$.

Учитывая выбранные модели потенциальной энергии и радиальной функции распределения в (1), для коэффициента трения имеем:

$$\beta^2 = \frac{\rho}{3}\int_0^\infty dr\, r^2 \int_0^\pi g(r,H,\theta)\nabla^2\Phi(r,H,\theta)\sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

Вычисление внутренних интегралов по углам θ и φ приводит к следующему результату:

$$\beta^2 = 32\pi\sigma\rho\varepsilon\int_0^r g_0(r)(22r^{-14} - 5r^{-8})\frac{\text{sh}A}{A}r^2 dr - \frac{16\pi\sigma\rho kT}{3}\int_0^r g_0(r)L(A)\text{sh}A dr, \qquad (4)$$

где $g_0(r) = y(\rho^*)\exp\left[\frac{4\varepsilon}{kT}(r^{-12} - r^{-6})\right]$, $L(A) = \text{cth}A - \frac{1}{A}$, $A = \frac{\mu_0 m^2 L(a)^2}{2\pi\sigma^3 r^3 kT}$.

На основе выражение (4) для магнитных жидкостей, приготовленных на основе керосина и воды, проведен численный расчет. Для проведения расчета справочные данные по характеристикам магнитных жидкостей заимствованы из [10]. Результаты численных расчетов представлены в таблице.

МЖ на основе керосина			МЖ на основе воды		
ρ, кг/м^3	M_s, кА/м	β, кг/с	ρ, кг/м^3	M_s, кА/м	β, кг/с
902	8.1	8.61×10^{-13}	1140	11.55	9.18×10^{-13}
917	8.3	8.65×10^{-13}	1150	12.80	9.20×10^{-13}
1130	10.4	9.15×10^{-13}	1180	15.90	9.28×10^{-13}
1312	31.2	9.63×10^{-13}	1197	16.25	9.32×10^{-13}
1340	34.2	9.71×10^{-13}	1380	31.80	9.82×10^{-13}

Как видно из таблицы, с увеличением объемной доли магнетита, значение коэффициента трения в магнитной жидкости увеличивается. Видимо, это связано с тем, что присутствие твердых магнитных частиц, обладающих магнитными моментами, приводит к относительному усилению Ван дер Ваальсовских межчастичных взаимодействий.

Литература

1. Одинаев С. К молекулярной теории релаксационных процессов и вязкоупругих свойств магнитных жидкостей / С. Одинаев, К. Комилов, А. Зарифов // Журн. физ. химии. – 2006. – Т. 80. – № 5. – С. 864–871.
2. Одинаев С. Зависимость модулей упругости магнитных жидкостей от параметров состояния / С. Одинаев, К. Комилов, А. Зарипов // Укр. физ. журнал. – 2008. – Т. 53. – № 3. – С. 235–238.
3. Физика простых жидкостей. Под ред. Г.Темперли и др. / – М.: Мир, 1971. – Т.1. – С. 136–192.
4. Kirkwood J.G. The Statistical Mechanical Theory of Transport Processes // J. Chem. Phys. – 1946. – V. 14. – № 3. – PP. 180–201.
5. Rice S.A. Some Aspects of the Statistical Theory of Transport // Annu. Rev. Phys. Chem. – 1960. – V. 11. – PP. 187–272.
6. Helfand E. Theory of the Molecular Friction Constant // Phys. Rev. – 1961. – V. 4. – № 6. – PP. 681–691.
7. Hhiroike K. On the Kinetic Theory of Dense Fluids. XIX. Comments on and a Rederivation of the Kinetic Equations // J. Chem. Phys. – 1965. – V. 42. – № 9. – PP. 3134–3143.
8. Бибик Е.Е. Реология дисперсных систем // – Л.: Из-во Ленингр. ун-та, 1981. – 172 с.
9. Юхновский И.Р. Статистическая теория классических равновесных систем / И.Р.Юхновский, М.Ф. Головко // – Киев: Наукова думка, 1980. – 372 с.

10.Берковский Б.М. Магнитные жидкости / Б.М. Берковский, В.Ф. Медведев, М.С. Краков // – М.: Химия,1989. – 239 с.

ОИД БА НАЗАРДОШТИ ХАМТАЪСИРОТИ ДИПОЛӢ ҲАНГОМИ МУАЙЯН НАМУДАНИ ЗАРИБИ СОИШИ МОЕЪҲОИ МАГНИТӢ

Комилов К., Зарипов А.К.

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола ифодаи зариби соиши моеъҳои магнитӣ, ки аз параметрҳои молекулавии система вобаста буда, бар замми ҳамтаъсироти Ван дер Ваалсӣ ҳамтаъсиротҳои диполиро низ ба назар мегирад, умумӣ гардонида шудааст. Дар асоси ифодаи умумикардашудаи зариби соиш ҳисобҳои ададии вобатагии он аз қиматҳои ғилзати зарраҳои коллоидӣ дар моеъҳои магнитӣ ҳисоб карда шудааст. Натиҷаи ҳисобҳо нишон медиҳанд, ки бо зиёд шудани ғилзати магнетитҳо дар моеъ қимати зариби соиш низ меафзояд.

Калидвожаҳо: *моеи магнитӣ, зариби соиш, ҳамтаъсироти диполӣ, ҳодисаҳои гузариш.*

ABOUT DIPOLE OF INTERACTION AT THE DEFINITION OF FRICTION CONSTANT OF MAGNETIC LIQUIDS

Komilov K., Zaripov A.K.

Tajik national university

In this work, it is generalized expression for friction constant of the magnetic liquids. It is considering in addition Van der Valsec of dipole-dipole interaction between magnetic particles, and depending on molecular parameters of system. On the basis of the generalized expression of friction constant it is carried out numerical calculation of its dependence from value of concentration of colloid particles in the magnetic liquids. The result of calculations show that increase of concentration of magnetites in the liquid leads to increase of value of friction constant.

Keywords: *a magnetic liquid, friction constant, dipole of interaction, the transport phenomena.*

Сведения об авторах. **Комилов Косим** – Таджикский национальный университет, д.ф.-м.н., профессор кафедры теоретической физики. Адрес: 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17. Телефон: (+992)907-42-20-36. E-mail: k.komilov@mail.ru

Зарипов Авзалшо Карамонович – Таджикский национальный университет, к.ф.-м.н., доцент кафедры теоретической физики. Адрес: 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17. Телефон: (+992)908-88-49-90. E-mail: afzal.z@mail.ru

УДК 536.12.45.04

ВЛИЯНИЕ ОДНОСТЕННЫХ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК (OCSIAL) НА ИЗМЕНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ВЯЗКОСТИ РАСТВОРОВ СИСТЕМЫ БЕНЗОЛ – ДИИЗОПРОПИЛОВЫЙ ЭФИР

Хакимов Д.Ш., Сафаров М.М., Гуломов М.М., Тымеркаев Б.А., Ойматова Х.Х.

Институт энергетики таджикистана

Филиал МГУ имени М.В.Ломоносова в г. Душанбе

Технический колледж ТТУ им. М.С.Осими

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева

Бохтарский государственный университет имени Носири Хусрава

Для измерения коэффициента динамической вязкости исследуемых растворов нами был использован метод капиллярных выскозиметр Осволда. Для проверки работы экспериментальной установки былы проведены контрольные измерения. В качестве контрольных образцов использованы толуол и воды. Общая относительная погрешность измерения динамической вязкости при доверительной вероятности α= 0,95 равна 2,5%.

Используя теорию термодинамического подобия экспериментальных данных, нами получены эмпирические уравнения, с помощью которого можно численно определить динамическую вязкосты растворов с погрешностью - 0,58%.

Ключевые слова: *бензол, диизопропиловый эфир, OCSiAl, нано-трубки, капиллярный вискозиметр Освольда, динамическая вязкость, эмпирические уравнения.*

Для приготовления растворов нами использованы чистый бензол марки х.ч. (99,96%) и чистый диизопропиловый эфир х.ч. (99,97%) [1,2,11]. Основные физико-химические свойства компонентов растворов приведены ниже. Бензол - это бесцветная жидкость со своеобразным резким запахом, химическая формула которого - C_6H_6, молярная масса -78,11 г/моль, плотность – 878,6 кг/м³, динамическая вязкость - 0,0652 па·с,. температура плавления = 5,5°с, температура кипения = 80,1°с, растворимость в воде 1,79 г/л (при 25°с), $т_{всп.}$= −11°с, $т_{свспл.}$=562°с.

Подобно ненасыщенным углеводородам бензол горит сильно коптящим пламенем. С воздухом образует взрывоопасные смеси, хорошо смешивается с эфиром, бензином и другими органическими растворителями, с водой образует азеотропную смесь с температурой кипения 69,25 °С (91 % бензола).

Химические свойства. Растворимость в воде = 0,073 г/100 мл.

Для бензола характерны реакции замещения-бензол реагирует с алкенами, хлоралкенами, галогенами, азотной и серной кислотами. Реакции разрыва

бензольного кольца проходят в жёстких условиях (определенная температура, давление).

Взаимодействие с хлором и бромом в присутствии катализатора с образованием хлорбензола (реакция электрофильного замещения) имеет следующий вид: ($C_6H_6 + CI_2 \rightarrow FeC_6H_6CI + HCI$).

Бензол (C_6H_6, PhH)-органическое химическое соединение, бесцветная жидкость со специфическим сладковатым запахом, простейший ароматический углеводород [1,2]. Бензол входит в состав бензина, широко применяется в промышленности, является исходным сырьём для производства лекарств, различных пластмасс, синтетической резины, красителей. Хотя бензол входит в состав сырой нефти, в промышленных масштабах он синтезируется из других её компонентов.

Значительную часть получаемого бензола используют для синтеза других продуктов:

- около 50% бензола превращают в этилбензол (алкилирование бензола этиленом);
- около 25% бензола превращают в кумол (алкилирование бензола пропиленом);
- приблизительно 10-15% бензола гидрируют в циклогексан;
- около 10% бензола расходуют на производство нитробензола;
- 2-3% бензола превращают в линейные алкилбензолы;
- приблизительно 1% бензола используется для синтеза хлорбензола.

В существенно меньших количествах бензол используют для синтеза некоторых других соединений. Изредка и в крайних случаях, ввиду высокой токсичности, бензол используют в качестве растворителя. Кроме того, бензол входит в состав бензина. Ввиду высокой токсичности содержание бензола в топливе ограничено современными стандартами введением до 1 %.

Бензол - это горючая жидкость и в производстве используется как растворитель для чистки красок и лаков.

Диизопропиловый эфир (изопропиловый эфир) $(CH_3)_2CHOCH(CH_3)_2$, мол. масса 102,17 - бесцветная жидкость с эфирным запахом; $T_{пл.}$= -86,2°С, $T_{кип.}$=68,5°С;d_4^{20}=724,1кг/м^3;n_D^{20}=1,3679; $t_{кр.}$=228°С, $p_{кр.}$=2,84 МПа; $\Delta H^0_{пл}$ =108,4 кДж/кг, $\Delta H_{исп}$ =313,7 кДж/кг (при 20 °С); α = 17 мН/м, η= 0,37 Па.с; $T_{всп.}$= -28°С,$T_{самовоспл}$=443°С, давление насыщенных паров Р = 17,5 кПа, растворяется в органических растворителях. Образует азеотропную смесь с водой ($T_{кип.}$= 62,2°С,95,5% диизопропилового эфира). По химическим свойствам диизопропиловый эфир - типичный представитель простых эфиров. Получают диизопропиловый эфир из изопропанола (взаимодействие с пропиленом или дегидратацией) и как побочный продукт при производстве изопропанола

гидратацией пропилена. Определение диизопропилового эфира в воздухе основано на его цветной реакции с 4-диметиламино-бензальдегидом. Диизопропиловый эфир применяют как растворитель животных жиров, растительных и минеральных масел, природных и синтетических смол; для депарафинизации смазочных масел; как экстрагент, например, для отделения урана от продуктов его деления, выделения уксусной кислоты из водных растворов; как компонент составов для удаления старых лакокрасочных покрытий [1,2].

Физические и химические свойства. Растворимость в воде при нормальных условиях составляет 0,94 %. Образует азеотропную смесь, содержащую 95,5 % эфира и кипящую при 62,2°С. Проявляет свойства типичных простых эфиров.

Получение и применение. Диизопропиловый эфир получают непосредственно из пропилена и воды в присутствии серной кислоты- этерификация пропилена водой, а также дегидратацией изопропилового спирта серной кислотой:

Диизопропиловый эфир применяют в следующих целях:

- растворение животных жиров;
- растворение растительных и минеральных масел;
- растворение природных и синтетических смол;
- депарафинизация смазочных масел;
- экстракция для отделения урана от продуктов его деления;
- выделение уксусной кислоты из водных растворов;
- повышение октанового числа бензинов (антидетонатор).

Углеродные нанотрубки. Для получения нанотрубки (n, m) графеновую плоскость надо разрезать по направлениям пунктирных линий и свернуть ленту вдоль направления вектора R [2,10].

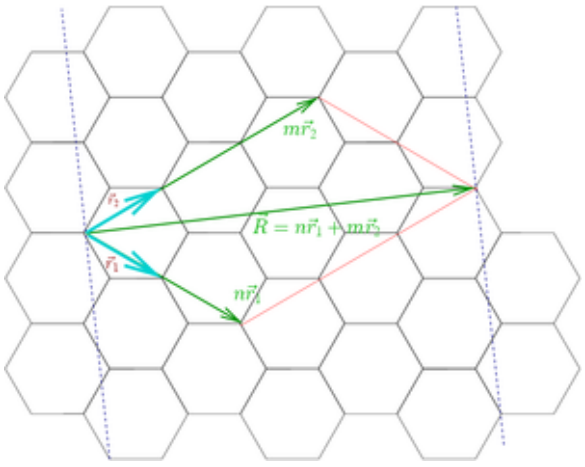


Рисунок 1. Основные параметры нанотрубки.

Любую однослойную углеродную нанотрубку можно представить в виде выкройки из листа графена (представляющего собой сетку из правильных шестиугольников, в вершинах которых расположены атомы углерода), которая задается парой чисел (n, m), называющихся индексами хиральности. Индексы хиральности (n, m) при этом являются координатами радиус-вектора R в заданной на графеновой плоскости косоугольной системе координат, определяющего ориентацию оси трубки относительно графе-новой плоскости и ее диаметр.

Диаметр нанотрубки рассчитывается по диаметру цилиндра, длина окружности которого равна длине вектора R и выражается через индексы хиральности (n, m) как:

$$D = \frac{\sqrt{3}d_0}{\pi} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + mn}\,, \quad (1)$$

где d_0=0,142нм-расстояние между соседними атомами углерода в графитовой плоскости.

Другой способ обозначения хиральности состоит в указании угла α между направлением сворачивания нанотрубки и направлением, в котором соседние шестиугольники имеют общую сторону. При этом выбирается наименьший угол такой, где $0° \leq \alpha \leq 30°$. Однако в этом случае для полного описания геометрии нанотрубки необходимо указать её диаметр [3].

Связь между индексами хиральности (n, m) и углом α даётся соотношением:

$$\sin\alpha = \frac{m\sqrt{3}}{2\sqrt{m^2+n^2+mn}}\,. \quad (2)$$

По типу торцов углеродные нанотрубки бывают открытые, закрытые (заканчивающиеся полусферой, которая может рассматриваться как половина молекулы фуллерена). По количеству слоев нанотрубки бывают однослойные (одностенные), многослойные (многостенные). По электронным свойствам металлические (n - m делится на 3) [4,5] полупроводниковые (прочие n и m).

На основе индексов хиральности одностенные нанотрубки разделяют на 3 типа:

n = m - «кресло» или «зубчатые» (armchair), α = 30° n = 0 - «зигзагообразные» (zigzag), α = 0° $n \neq m$ – хиральные.

В русскоязычной литературе встречается ошибочное приписывание зубчатым нанотрубкам α = 0° и зигзагообразным трубкам α = 30° (2n, n), распространившееся из обзорной статьи А.В. Елецкого [6].

Одностенные нанотрубки. Одностенные нанотрубки применяются в литий-ионных аккумуляторах, углепластиковых материалах, автомобильной промышленности. В кислотно-свинцовых аккумуляторах добавление одностенных нанотрубок значительно увеличивает число циклов перезарядки. У одностенных углеродных нано-трубок коэффициент прочности ГПа, а у стали ГПа [7].

Промышленная технология синтеза одностенных углеродных нано-трубок OCSiAl, разработанная академиком РАН Михаилом Предтеченским, позволяет получать нанотрубки исключительно высокого качества и предлагать их на

мировой рынок по цене, впервые делающей их применение в индустрии экономически доступным [8,9].

Структура типа «матрёшки» (russian dolls) представляет собой совокупность коаксиально вложенных друг в друга цилиндрических трубок. Другая разновидность этой структуры представляет собой совокупность вложенных друг в друга коаксиальных призм. Наконец, последняя из приведённых структур напоминает свиток (scroll). Для всех структур на рис. характерно значение расстояния между соседними графеновыми слоями, близкое к величине 0,34 нм, присущей расстоянию между соседними плоскостями кристаллического графита [10]. Реализация той или иной структуры многостенных нанотрубок в конкретной экспериментальной ситуации зависит от условий синтеза. Анализ имеющихся экспериментальных данных указывает, что наиболее типичной структурой многостенных нанотрубок является структура с попеременно расположенными по длине участками типа «русской матрёшки» и «папье-маше». При этом «трубки» меньшего размера последовательно вложены в трубки большего размера [10]. В пользу такой модели говорят, например, факты по интеркалированию калия или хлорида железа в «межтрубочное» пространство и образование структур типа «бусы».

Общая относительная погрешность измерения динамической вязкости растворов при доверительной вероятности α=0,95 равна 2,5% [11,12]. Надо отметить, что подобная работа нами была выполнена и опубликована в литературе [13-15].

Экспериментальным измерением нами получено значение динамической вязкости исследуемых растворов. Результаты экспериментального исследования динамической вязкости приведены в таблице 1.

Таблица 1. Экспериментальные значения динамической вязкости (η,10^{-3} Па.с) иследуемых растворов от концетрации бензола при 0,02% OCSiAl .

c,%	№1	№2	№3	№4	№5	№6
$\eta_{экс.}$	0,595	0,534	0,5	0,479	0,453	0,413
$\eta_{рас.}$	0.595	0.534	0.5	0.476	0.449	0.405
Δ,%	0	0	0	0.63	0.88	1.9
Общая среднеарифметическая погрешность расчета по формуле (4) равна ~(0.568)%						

Образец №1 - (100% C_6H_6+ 0,02% OCSiAl); Образец №2 - (80% C_6H_6 + 20% $C_6H_{14}O$ + 0,02% OCSiAl); Образец №3 - (60% C_6H_6 + 40% $C_6H_{14}O$ + 0,02% OCSiAl);Образец №4 - (40% C_6H_6 + 60% $C_6H_{14}O$ + 0,02% OCSiAl); Образец №5 - (20% C_6H_6 + 80% $C_6H_{14}O$ + 0,02% OCSiAl);Образец №6 - (100% $C_6H_{14}O$ + 0,02% OCSiAl).

Используя таблицу 2, построим график зависимости динамической вязкости раствора от концентратции бензола (рис. 2):

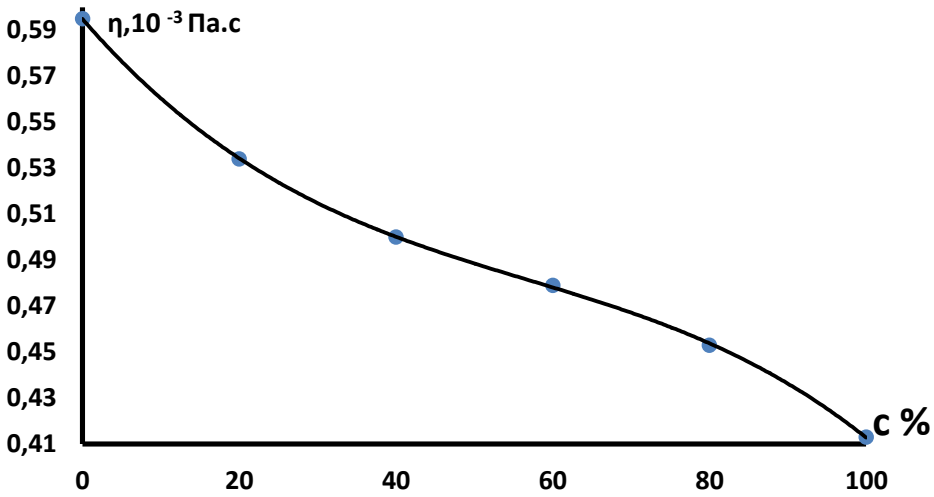


Рисунок 2. Зависимость динамической вязкости растворов системы (диизо-пропиловый эфир + бензол) от концентрации бензола

Согласно значениям таблицы 2 и приведенному графику с увеличением концентрации бензола динамическая вязкость раствора умень-шается по экспоненциональному закону.

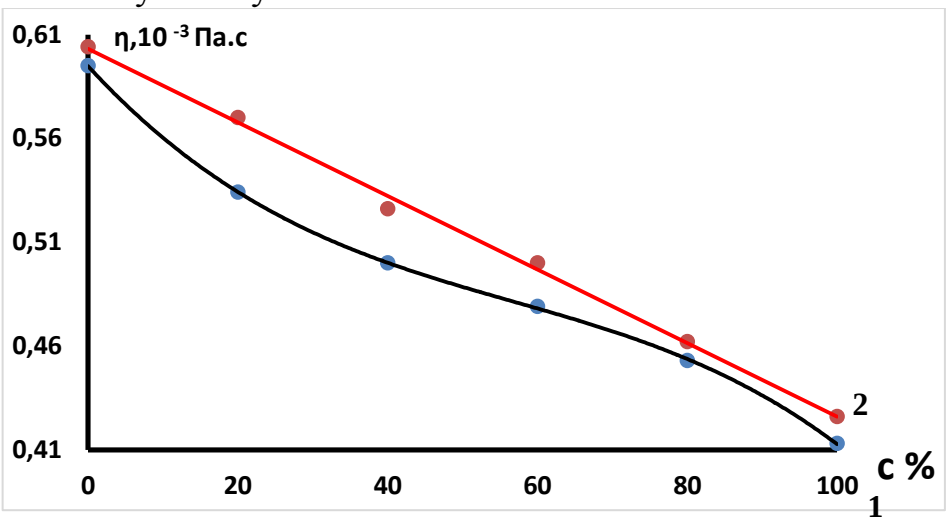


Рисунок 3. Зависимость динамической вязкости растворов системы бензола и диизопропилового эфира с добавкой одностенной углеродной нанотрубки (OCSiAl) и без добавки. 1- исследуемые системы без добавки одностенной углеродной нанотрубки (OCSiAl); 2- исследуемые системы 0,02% добавки одностенной углеродной нанотрубки (OCSiAl).

Как видно из таблицы 1 и рисунка 3, динамическая вязкость системы (бензол и диизопропиловый эфир) с ростом концентрации бензола умень-шается по линейному закону.

Для обобщения полученных данных по динамической вязкости иссле-дуемых образцов нами использован закон соответствующих состояний и получены следующие эмпирические уравнения:

-для образцов без добавки одностенной углеродной нанотрубки (OCSiAl):

$$\eta = (- 3 \cdot 10^{-7} n^3 + 5 \cdot 10^{-5} n^2 - 0{,}0039n + 0{,}5949)\ 10^{-3}, \text{Па.с} \qquad (3)$$

- для образцов с добавкой одностенной углеродной нанотрубки (OCSiAl):

$$\eta = (-0{,}0018 + 0{,}6032n)\ 10^{-3}\ , \text{Па.с} \qquad (4)$$

Как видно из графика, приведённого на рисунке 3, добавки нанотрубки (OCSiAl) увеличивают динамическую вязкость коллоидных растворов системы (бензол-диизопропиловый эфир –нанотрубки), которая растет, например, (20% бензол -80% диизопропиловый эфир - 0,02%нанотрубок) - 9,4%, а для образца (100% диизопропиловый эфир - 0,02% нанотрубок) - 3,4%.

Литература

1. Хвостов В.Х. Исп. литература для статьи «диизопропиловый эфир»: Ullmanns Encyclopadie, 4 Aufl., Bd 8, Weinheim // − 1974. − С. 146-57.
2. Даффа-Меди. Химическая энциклопедия / И.Л. Кнунянц [и др.] //− М.: Советская энциклопедия, 1990. − Т.2. − 671с.
3. Iijima, S. and Ichihashi, T. (1993) Single-Shell Carbon Nanotubes of 1-nm Diameter. Nature, 363, 603-605. http://dx.doi.org/10.1038/363603 нанотрубка, углеродная. thesaurus.rusnano.com. Проверено 14 ноября 2017.
4. Noriaki Hamada, Shin-ichi Sawada, Atsushi Oshiyama. New onedimen-sional conductors: Graphitic microtubules // Physical Review Letters. − 1992. − Т. 68. − вып. 10. − С. 1579–1581.
5. Елецкий А.В. Углеродные нанотрубки // УФН. −1997. − Т.167. − № 9.− С. 955.
6. Александр Грек Огонь, вода и нанотрубки // Популярная механика. − 2017.− № 1.− С. 39−47.
7. Low-cost scalable production and applications of single-walled carbon nanotubes «SF Bay Area Nanotechnology Council (англ.). sites.ieee.org. Проверено 21 сентября 2017.
8. OCSiAl (рус.). ocsial.com. Проверено 21 сентября 2017.
9. Елецкий А.В. Углеродные нанотрубки и их эмиссионные свойства // УФН.− 2002.− Т.172. − № 4.− С. 438.
10. Сафаров М.М. Теплофизические свойства простых эфиров и водных растворов гидразина в зависимости от температуры и давления: дисс… д. техн. наук // – Душанбе, 1993. − 495с.
11. Зарипова М.А. Влияние наночастиц на изменение теплофизических, термодинамических свойств некоторых кислородосодержащих органических жидкостей при различных температурах и давлениях // Дисс.. д. техн. наук. − Душанбе, 2016. − 517 с.
12. Сафаров М.М. Теплофизические свойства некоторых наноуглеродных материалов /М.М. Сафаров, Х.Х. Назаров, А.С. Назруллоев и др. // Вестник Таджикского национального университета. − 2016. − № 1/4(216).− С.40 −44.
13. Сафаров М.М. Взаимосвязь теплопроводности и коэффициента массоотдачи иридиевых катализаторов на основе гранулированной пористой окиси алюминия / М.М. Сафаров, Х.Х. Назаров, С.С. Абдуназаров и др. // Вестник таджикского национального университета. − 2016. − № 1/4(216). − С.56−61.
14. Сафаров М.М. Моделирование коэффициента теплоотдачи (число Био) нанокомпозитов / М.М.Сафаров, С.Х. Мирзоев, М.М.Гуломов и др. //

Вестник филиала МГУ имени М.В.Ломоносова в г. Душанбе. Серия естественных наук. − 2017. −Т.1.− №3. − С.83-90.

ТАЪСИРИ НАНОНАЙЧАИ ЯКДЕВОРАИ КАРБОНӢ (OCSiAl) БА ТАҒИРЁБИИ ЧАСПАКИИ ДИНАМИКИИ МАҲЛУЛҲОИ БЕНЗОЛ ВА ЭФИРИ ДИИЗОПРОПИЛ ДАР ҲОЛАТИ НОРМАЛӣ.

Хакимов Д.Ш., Сафаров М.М., Гуломов М.М., Тымеркаев Б.А., Ойматова Х.Х.

Донишкадаи энергетикии Тоҷикистон
Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар ш. Душанбе
Коллеҷи техникии ДТТ ба номи М.С. Осимӣ
ДДТ Қазон ба номи А.Н. Туполев
Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав

Дар мақолаи мазкур натиҷаҳои ченкунии часпакии динамикиро барои маҳлулҳои эфири диизопропил- бензол ва нанойчаи яккабатаи карбондор оварда шудааст. Хатогии нисбии умумии ченкунии часпакии динамикӣ ҳангоми α=0,95 будан мувофиқан ба 2,5 % баробар аст. Аз назарияи монанди термодинамикӣ,конуни мувофиқоварии ҳолат ва натиҷаҳои таҷриба истифода бурда, муодилаи эмперикиро ҳосил намудем, ки бо ёрии он то саҳеҳии 0,58% часпакии динамикии маводҳои татқиқнашударо ҳисоб намудан мумкин аст.

Калидвожаҳо: *бензол, эфири диизопропил, найчаи якқабатаи карбонӣ, кремнию алюминий (OCSiAl), часпаки динамикӣ, вискозиметри капилярии Осволд, муодилаи эмпирикӣ.*

INFLUENCE OF SINGLE-WALLED CARBON NANOTUBES (OCSiAl) ON THE CHANGE OF DYNAMIC VISCOSITY OF SOLUTIONS OF THE SYSTEM BENZOL - DIISOPROPYL ETHER

Khakimov D.Sh., Safarov M.M., Gulomov M.M., Tymerkaev B.A., Oymatova Kh.H.
Institute of Energy of Tajikistan
Branch of the Moscow State University Lomonosov in Dushanbe
Technical College TTU them. M.S. Osimi
Kazan National Research Technical University by named A.N. Tupolev
Bokhtar State University named after Nosiri Khusraw

To measure the coefficient of dynamic viscosity of the investigated solutions, we used the Osvold capillary method. To test the work of the experimental setup was carried out control measurements. Toluene and water were used as control samples. The total relative error of measuring the dynamic viscosity at a confidence level α = 0.95 is equal to 2.5%.

Using the theory of thermodynamic similarity of experimental data, we obtained empirical equations with the help of which we can numerically determine the dynamic viscosity of solutions with an error of 0.58%.

Keywords: *benzol, diisopropyl ether, OCSiAl, nano-tubes, Osvold capillary viscometer, dynamic viscosity, empirical equations.*

Сведения об авторах. **Хакимов Дилшод Шодиевич** - аспирант Таджикского государственного педагогического университета им. С. Айни. Адрес: 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе пр. Рудаки 121. Телефон: (+992) 988-66-68-33. E-mail: dilshod.hakimov92@ mail.ru

Сафаров Махмадали Махмадиевич – доктор технических наук, профессор, Заслуженный деятель науки и техники Таджикистана, Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Душанбе, зав. лабораторией физики. Адрес: 734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе улица Бохтар 35/1. Телефон: (+992) 931-63-15-85. E-mail: mahmad1 @list.ru

Гуломов Масрур Мирзохонович – кандидат технических наук, Технический колледж Таджикскоко технического университета им. М.С. Осими. Адрес: 734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе улица Айни 41, Телефон: (+992) 933-20-59-61. E-mail: masrur. gulomov.88@mail.ru

Тимеркаев Борис Ахунович - доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой общей физики, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева. Адрес: г. Казань ул. Четаева, д. 18, уд. 360. Телефон: +7 (843) 231 02 23. E-mail: BATimerkaev @ kai.ru

Ойматова Хожармо Холмуродовна - кандидат педагогических наук, доцент, декан факультета физики, БГУ имени Носира Хусрава.

УДК 536.12.45.04

ПЛОТНОСТЬ ТУРБИННОГО МАСЛА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Тагоев С.А., Зоиров Х.А., Давлатов Н.Б., Сафаров М.М.

Таджикский технический университет имени академика М.С. Осими

Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе

Данная статья посвящена исследованию влияния температуры на плотность турбинного масла, применяемого на ДТЭЦ-2. По результатам экспериментальных измерений предложено эмпирическое уравнение, устанавливающее зависимость плотности исследуемого объекта от температуры.

Ключевые слова: *плотность, турбинное масло, температурная зависимость.*

Турбинные масла предназначены для смазывания и охлаждения уплотнений и подшипников различных турбоагрегатов: паровых и газовых турбин, гидротурбин, турбокомпрессоров. Турбинные масла используют в качестве рабочих жидкостей в системах регулирования турбоагрегатов, а также в циркуляционных и гидравлических системах различных промыш-ленных механизмов.

Плотность турбинных масел в основном определяется их групповым химическим составом. Парафинистые углеводороды имеют меньшую плот-ность, а нафтеновые и ароматические – большую.

Также на итоговое значение плотности турбинного масла влияет его фракционный состав. Если температурный предел выкипания фракции масла выше, то плотность будет большей.

На практике иногда удобнее оперировать безразмерными величинами. К ним относится так называемая относительная плотность, равная отношению плотности при данной температуре к плотности воды при температуре 4ºС, содержащейся в том же объеме.

Существует весьма большое число различных уравнений состояния, связывающих плотность жидкости с давлением и температурой, предназначенных для применения в том или ином случаях.

Несмотря на все достижения в области составления уравнения состояния, теория не дает удовлетворительного результата. Поэтому огромное значение приобретают экспериментальные исследования (p-ρ-T) зависимостей жидкостей и растворов в том числе наножидкостей. Это объясняется тем, что все уравнения состояния жидкостей и растворов являются справедливыми лишь в определенной, как правило, достаточно узкой области состояния жидкостей. Практическое использование этих уравнений возможно лишь при нахождении величин многочисленных коэффициентов, имеющихся в выражении для уравнения состояния.

Велика также роль точных исследований (p-ρ-T) зависимостей для определения калорических свойств жидкостей и растворов. В ряде случаев, при необходимости определения калорических свойств жидкостей, производят экспериментальное исследование их (p-ρ-T) зависимостей [2]. Затем, обычно путем графоаналитической обработки, с использованием соответствующих термодинамических уравнений находят искомые значения калорических свойств.

Методы экспериментального исследования (p-ρ-T) зависимостей жидкостей и паров в основном можно подразделить на три разновидности:
метод исследования при постоянном весовом количестве жидкости и изменяющемся ее объеме; методы, основанные на гидростатическом взвешивании и другие. Преимущества и недостатки вышеизложенных методов хорошо освещены в монографии [2]. В работе не ставилась цель создания принципиально нового метода измерения, а использовались хорошо разработанные методики, приспособив их к условиям, учитывающим специфические свойства исследуемых веществ.

Рисунок 1. Общий вид ультратермостата.

При выборе методики особое внимание уделялось обеспечению высокой точности измерений с сохранением простоты проведения эксперимента. Было необходимо, чтобы экспериментальный стенд позволял проводить исследования плотности в широкой области параметров состояния, включая область жидкого и двухфазного состояний, а также вблизи нижней пограничной кривой. С учетом вышеизложенных требований, предпочтение было отдано методу гидростатического взвешивания, разработанному профессором К.Д. Гусейновым и его учениками [2].

Для измерения плотности исследуемых образцов (см. рисунок 2) использовался кварцевый поплавок (5) и аналитические весы (6). Исследуемая жидкость заполняется в поплавковую камеру (4), а кварцевый поп-лавок подвешивается на манганиновой проволоке (7). Поплавковая камера вставляется в жидкостной термостат (1), снабженный мешалкой и змеевиком, через который прокачивалась греющая среда (вода) из ультратермостата. Температура опыта регулировалась с погрешностью ± 0,02 ^{o}C и измерялась ртутным термометром (9) с ценой деления 0,1^{o}C. Экспериментальный стенд тарировался проведением контрольных опытов с эталонными жидкостями: водой и толуолом.

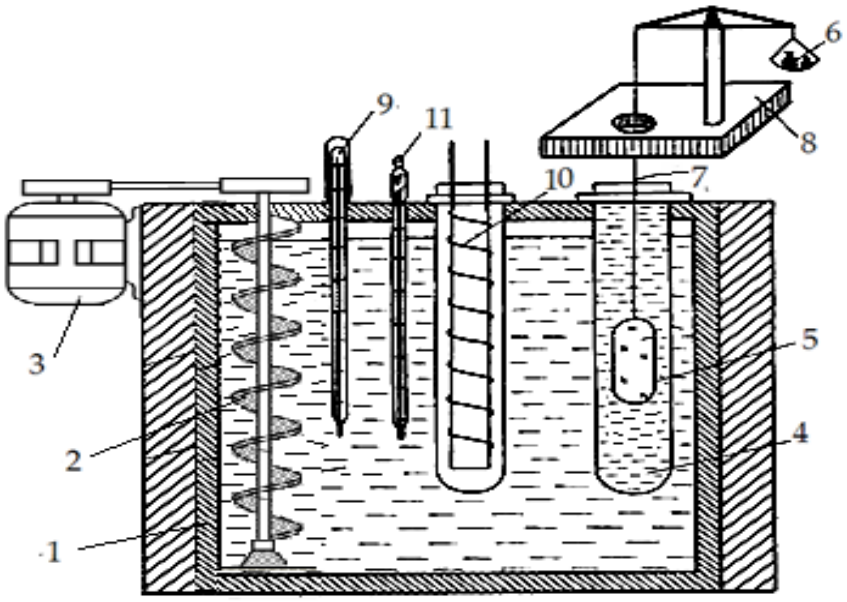


Рисунок 2. Схема стенда для определения плотности растворов при атмос-ферном давлении: 1 - термостат; 2 - мешалка; 3 - электродвигатель; 4 - камера с исследуемым образцом из химически нейтрального материала (НС-2); 5 - поплавок из химически нейтрального материала (НС-2); 6 – уравнове-шивающие разновесы; 7 - манганиновая проволока; 8 – аналитические весы; 9 -ртутный термометр; 10 - нагреватель; 11 - контактный термометр

Расчетная формула для определения плотности исследуемых образцов:

$$\rho = \frac{G_1 - (G_1 - G_2)}{V_П - V_Н} \qquad (1)$$

где ρ - плотность исследуемых образцов при температуре опыта, кг/м^3; G_1- вес поплавка в воздухе; G_2 - вес поплавка в исследуемых образцах; $V_П$, $V_Н$ - соответственно объем кварцевого поплавка и манганиновой проволоки.

Методика измерения плотности жидкостей, растворов (наножидкостей) при атмосферном давлении заключалась в следующем. Перед тем, как провести исследование плотности наножидкостей, определяем параметры подвесной системы. К подвесной системе (см. рисунок 2) относятся: поплавок, изготовленный из химически нейтрального материала (5); манганиновая проволока (7). Определяем массу и объем выше перечисленных составных частей подвесной системы. С помощью аналитических весов ВЛА-200 (8) (см. рисунок 2) определяем массу подвесной системы в воздухе, т.е. вставляем ее в стеклянную пробирку (4), измеряем вес поплавка G_2. Затем заполняем стеклянную пробирку (4) дистиллированной водой и повторяем взвешивание веса подвесной системы, в данном случае G_1. После чего рассчитываем плотность дистиллированной воды по формуле (1). Затем, поднимаем температуру опыта при помощи термостата (1) приблизительно на 5^{o}C. При восстановлении стационарного режима повторяем измерение веса подвесной системы G_1. Далее рассчитываем плотность контрольного образца

(дистиллированной воды) при данной температуре. Опыт проводим несколько раз с последующим повышением температуры ещё на 5°С. Каждое измерение веса подвесной системы повторяем минимум 3 раза. Определяем среднеарифметическое значение веса подвесной системы. Т.о., проводим опыт с изменением температуры на 5°С и определяем плотность контрольного вещества (дистиллированной воды). Плотность контрольного образца определяем до температуры кипения, т.е. (в данном случае) до 90°С. При получении плотности контрольного образца (дистиллированной воды) с высоким совпадением со справочными данными мы приступаем к проведению опытов для исследуемых наножидкостей. Опыт проводится тем же способом, что и для контрольного образца. Надо отметить, что шаг температуры выбирается индивидуально автором работы. Используя теорию погрешностей физических величин, определяем относительную погрешность измерения плотности жидкостей и растворов. Общая относительная погрешность измерения плотности по данной методике на экспериментальном стенде при $\alpha = 95$ составляет 0,1%.

Вязкость жидкого турбинного масла при различных температурах и атмосферного давления была нами исследована методом гидростатического взвешивания [6].

Для проверки правильности работы экспериментального стенда были проведены контрольные измерения с водой и н-гексаном. Полученные результаты совпали с данными других авторов [2-5,7] в пределах ±1,2%.

Т, К	293	303	313	323	333	353
$\rho_{лит.}$, кг/м^3	998,2	995,7	992,2	988,1	991,4	971,8
$\rho_{конт.}$, кг/м^3	997,4	996,3	991,7	987,4	990,3	970,7
Δ, %	0,08	-0,06	0,05	0,07	0,11	0,12
$\Delta_{ср,}$ %	0,37					

Таблица 1. Результаты сравнения контрольных измерений плотности воды по методу гидростатического взвешивания при атмосферном давлении и различных температурах со справочными данными

Плотность турбинных масел является важным параметром, характеризующая их эксплуатационные свойства (таблица 2). От него зависят надежность смазки трущихся поверхностей. Значения плотности масел также используются в расчетах масляных систем.

Параметр	Тп-22С	Тп-30	Тп-46	Т-22	Т-30	Т-46	Т-57
Плотность, кг/м^3	900	895	895	900	900	905	900

Таблица 2. Значение плотности основных марок турбинных масел Российских производителей при 293 К.

Плотность жидкостей существенно зависит от температуры. При ее увеличении плотность снижается, при уменьшении - возрастает. Нами исследованы влияния температуры на плотность (ρ, кг/м^3), турбинного масла (Китайского производителя) системы маслоснабжения турбинного агрегата на ДТЭЦ-2 в интервале температур 293-363К (таблица 3). Для измерения плотности применен метод пикнометра.

Т, К	293		305	315	325	338	350	363
ρ, кг/м^3	862		857	851	846	839	832	825

Таблица 3. Плотность турбинного масла системы маслоснабжения турбинного агрегата на ДТЭЦ-2 в зависимости от температуры при атмосферном давлении.

Характер изменения плотности турбинного масла в зависимости от температуры показан на рисунке 3.

Зависимость плотности турбинного масла от температуры при атмосферном давлении подчиняется линейному закону. При увеличении температуры от 293К до 363К плотность масла уменьшается на 4,3% от первоначального значения.

По результатам экспериментальных измерений предложено эмпирическое уравнение, устанавливающее зависимость плотности исследуемого объекта от температуры:

$$\rho = -0{,}5359T + 1019{,}8, \ кг/м^3.$$

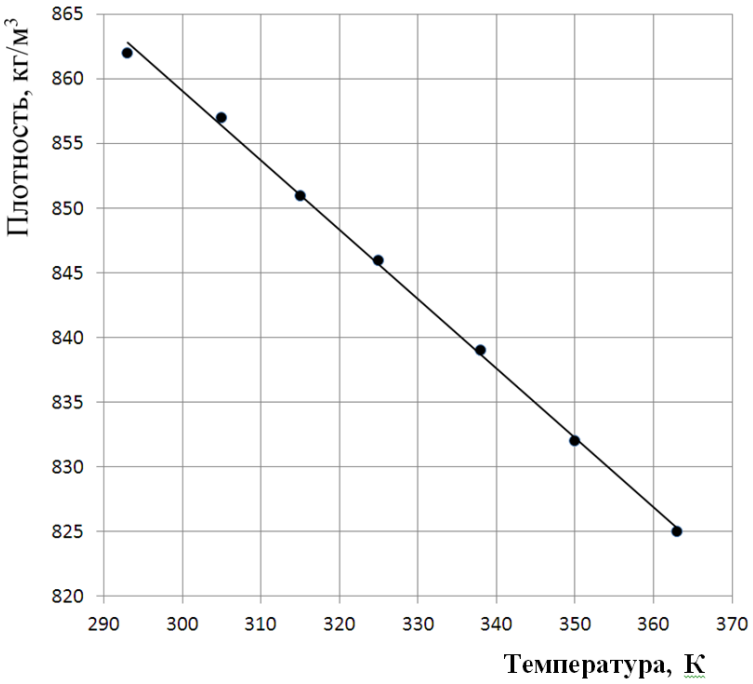


Рисунок 3. Зависимость плотности турбинного масла от температуры

Таким образом, в результате экспериментов выявлено качественное и количественное влияние температуры на плотность турбинного масла в интервале температур 293-363К при атмосферном давлении. Предложено

эмпирическое уравнение для расчета плотности турбинного масла в этом интервале температур. Эксперименты показали, что плотность турбинного масла (Китайского производителя), применяемого для системы маслоснабжения турбинного агрегата на ДТЭЦ-2 ниже плотности турбинных масел Российских производителей.

Литература

1. Методы определения плотности // М.: Издательство стандартов, 2000.−8с.
2. Гусейнов К.Д. Исследование термодинамических свойств ряда кислородосодержащих органических веществ в широком интервале параметров состояния // Дисс. …, д-ра т.н. − Баку, 1979. − 392 с.
3. Сафаров М.М. Теплофизические свойства простых эфиров и водных растворов гидразина при различных температурах и давлениях // Дис…д - ра т. н. − Душанбе, 1993.−495 с.
4. Зарипова М.А. Влияние наночастиц на изменение теплофизических, термодинамических свойств некоторых кислородосодержащих, азотосодержащих органических жидкостей при различных температурах и давлениях // Дис. …, д-ра т. н. − Душанбе, 2016.−305 с.
5. Тиллоева Т.Р. Теплофизические и термодинамические свойства коллоидного водного раствора серебра // Дис. …, к.т.н. Душанбе, 2016.−164 с.
6. Тагоев С.А. Вязкость турбинного масла в зависимости от температуры / С.А.Тагоев, Х.А.Зоиров, М.М.Сафаров // Вестник филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе. Серия естественных наук. − 2017.− Т.1. − №3. − С. 90-93
7. Сафаров М.М. Модель цилиндрического контакта с плоской подложкой и расчет эффективной теплопроводности нанонити / М.М.Сафаров, С.Х.Мирзоев, М.М.Гуломов, Дж.Ф. Собиров и др. // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. −2018.− №2. − С. 122-127.

ЗИЧИИ РАВҒАНИ ТУРБИНА ВОБАСТА АЗ ҲАРОРАТ

Тағоев С.А., Зоиров Ҳ.А., Давлатов Т.Б., Сафаров М.М.

Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи акад. М.С.Осимӣ

Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар ш. Душанбе

Мақолаи мазкур ба татқиқи таъсири ҳарорат ба тағйиребии зичии равгани турбина ки дар МЭГ-2 ш. Душанбе истифода мебаранд, бахшида шудааст. Дар асоси натиҷаҳои таҷрибавии татқиқи зичии равган, муодилаи эмпирикӣ ҳосил карда шудааст, ки бо ёрии он зичиро вобаста ба ҳарорат, ҳисоб кардан мумкин аст.

Калидвожаҳо: *Зичӣ, равгани турбина, вобастагии ҳароратӣ.*

TURBINE OIL DENSITY DEPENDING ON TEMPERATURE

Tagoev S.A., Zoirov Kh.A., Davlatov N.B., Safarov M.M.
Tajik Technical University named after academician M.S. Osimi
Branch of the Moscow State University Lomonosov in Dushanbe

This article is devoted to the study of the effect of temperature on the density of turbine oil used at DTTEC-2. According to the results of experimental measurements, an empirical equation was proposed, which establishes the dependence of the density of the object under study on temperature.

Keywords: *density, turbine oil, temperature addiction.*

Сведения об авторах. **Тагоев Сафовидин Асоевич,** кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Теплотехника и теплотехническое оборудование» Таджикского технического университета имени академика М.С. Осими. Тел.: (+992) 91 913 26 39. E-mail: safovidin@mail.ru

Зоиров Хикматулло Абдухоликович, кандидат технических наук, ассистент кафедры «Теплотехника и теплотехническое оборудование» ТТУ им. акад. М.С.Осими. Тел: (+992)917-72-47-87; E-mail: kzoirov @inbox.ru

Давлатов Начибулло Бахромович, аспирант кафедры «Теплотехника и теплотехническое оборудование» Таджикского технического университета имени академика М.С. Осими. Тел.: (+992) 93 845 23 41. E-mail: najibulo. davlatov@mail.ru

Сафаров Махмадали Махмадиевич – доктор технических наук, профессор, Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе. Тел.: (+992) 931631585; E-mail: mahmad1@list.ru

УДК 536.12.24/35

КОМПЛЕКСНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ И КАЛОРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН НАНОЖИДКОСТЕЙ СИСТЕМЫ ЖИДКОГО ДИЭТИЛОВОГО ЭФИРА И ОУНТ

Гуломов М.М., Ойматова Х.Х, Сафаров Ш.Р., Сафаров М.М.
Технический колледж ТТУ имени акад. М.С. Осими
Бохтарский государственный университет имени Носири Хусрава
Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе

В работе приводятся результаты численных расчётов и экспериментальных исследований термодинамических и калорических свойств наножидкостей системы жидкого диэтилового эфира и ОУНТ в интервале температур (293-433)К, давлении (0,101-29,43)МПа и концентраций ОУНТ.

Ключевые слова: *энтальпия, энтропия, энергия Гиббса и Гельмгольца, жидкий диэтиловый эфир, углеродный нанотрубок.*

Теория

В статье используя P-ρ-T зависимости индивидуальных жидкостей, решив в определенных граничных условиях известное уравнение термодинамики в дифференциальной и интегральной формах, вычислили одну из термодинамических величин, например, изменение энтальпии, после чего используя принципы подобия, рассчитали в широких параметрах состояния изобарическую и изохорическую теплоемкости в наножидкостей системы жидкого диэтилового эфира и ОУНТ и постарались ниже обосновать этот метод вычисления. Для обоснования этого метода использовали уравнение термодинамики, относящееся к энтальпии [1-6].

В термодинамике энтальпия определяется как (U+PV), где U –внутренняя энергия системы, P-внешнее давление над системой, V-удельный объем системы. Отметем, что энтальпия также является функцией состояния и она одна из основных термодинамических величин, определяющая состояния системы. Однако, определение абсолютного значения энтальпии сложно, а её изменение определяется следующем образом:

$$dH=(u+PV)=du+pdv+Vdp. \quad (1)$$

При изотермическом процессе зависимость изменения энтальпии dH от параметров состояния выражается следующим термодинамическим уравнением:

$$H(P_2T)-(P_1T) = \int_{p_1}^{p_2}[V-T\cdot(\frac{dv}{dt})_P]_t\,dp. \quad (2)$$

В правой стороне выражения (2) раскроем интеграл, а точнее упростим это выражение.

Все опытные данные доказывают нелинейный рост удельного объема наножидкости системы (жидкий диэтиловый эфир и ОУНТ) с ростом температуры и уменьшение их плотности, а также такое же нелинейное уменьшение его с ростом давления.

Для упрощения выражения (2), примем следующее выражение для определения объема исследуемой нами наножидкости:

$$V=\frac{i}{p}+a_0^1+a_1^1\,\frac{t}{p}+a_2^1\,(\frac{t}{p})^2\ . \quad (3)$$

Здесь коэффициенты a_0^1, a_1^1, a_2^1 определяются в зависимости от значений P, V, T.

Анализ и обработка графиков удельного объема или плотности наножидкостей подтверждает в общем виде возможность такой зависимости.

Из выражения (3) при условии P=const определим производную удель-ного объема по температуре $(\frac{dv}{dt})_p$:

$$(\frac{dv}{dt})_p=\frac{a_1^1}{p}+\frac{2a_2^1T}{p} \quad (4)$$

Из (2) с учётом (3) имеем:

$$H(P_2T)-(P_1T) = \int_{p_1}^{p_2}[V-T\cdot(\frac{dv}{dt})_P]_t\,dp = \int_{p_1}^{p_2}[\,a_1^1(\frac{t}{p})_+\,a_2^1\,(\frac{t}{p})^2-T(\frac{a_1^1}{p}+\frac{2a_2^1T}{p2})]\,dp=$$

$$=a_0^1(P_2-P_1)-\ a_2^1T^2(\frac{P_2-P_1}{P_2\cdot P_1}). \quad (5)$$

Отсюда

$$H(P_2T) - H(P_1T) = \Delta P \left(a_0^1 - a_2^1 T^2 \frac{1}{P_2 \cdot P_1}\right)$$

в котором $\Delta P = P_2 - P_1$

Как видно из этого выражения, для вычисления изменения энтальпии для различных изотерм в интервале давления P_2-P_1, из используемого нами уравнения состояния (3) коэффициенты a^1_0 и a^1_2 должны быть определены на основе опытных значений P, V, T .

Между изменением энтальпии и изобарической теплоемкостью существует следующая термодинамическая зависимость:

$$C_p = \left(\frac{d(\Delta H)}{dt}\right)_p . \quad (6)$$

Пользуясь этим выражением можно вычислить зависимость изобарической теплоемкости от температуры по энтальпии.

Однако эти результаты будут соответствовать одному значению давления. В результате мы по выражению (3) получим температурную зависимость C_p при P=const. Для определения C_p при различных температурах и давлениях, а точнее для определения влияния на C_P, в том числе и давления, мы используем следующую термодинамическую зависимость:

$$C_p(P_2T) - C_p(P_1T) = -T\int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{d2v}{dT2}\right) dp. \quad (7)$$

Для упрощения P_1 данного интеграла предположим, что зависимость удельного объема наножидкости (V) от температуры при P=const определяется следующим выражением:

$$V = C_0 + C_1T + C_2T^2 , \quad (8)$$

в котором C_0, C_1, и C_2 – определенные постоянные.

Определив из этого выражения $\left(\frac{d2v}{dT2}\right)$, подставив его в (7), получаем:

$$\left(\frac{d2v}{dT2}\right) = 2C_2 . \quad (9)$$

Из уравнения (7) с учетом (9) получим:

$$C_p(P_2T) - C_p(P_1T) = -T\int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right) dp = -T2C_2(P_2 - P_1) \quad (10)$$

или

$$C_p(P_2T) - C_p(P_1T) - 2C_2T\Delta P, \quad (11)$$

здесь $\Delta P = P2 - P1$.

На основании последнего выражения можно вычислить изобаричес-кую теплоемкость для различных температур и давлений. Отметим, что изобарическая теплоемкость при низких давлениях ($C_p(P_1T)$) вычисляется, как отмечалось выше, на энтальпии.

Рассчитав на основе этой схемы C_p при различных параметрах состояния, для расчета изохорической теплоемкости наножидкостей (C_v) системы (жидкий диэтиловый эфир и ОУНТ) нами использован следующий метод.

Для подобных термодинамических систем предложено следующее выражение:

$$\frac{Cp}{Cv} = 1 + \frac{K}{\mu Cp}, \quad (12)$$

где K=64,4 $\frac{Дж}{моль \cdot K}$, μ-мольная масса жидкости. Если использовать известные значение изобарической теплоемкости, то сможем определить отношение $\frac{Cp}{Cv}$ относительно C_p. Определив значения этого отношения при различных температурах и давлениях, мы на основании значений C_p определим $C_v(P,T)$.

На основе экспериментальных данных по плотности наножидкостей системы (жидкий диэтиловый эфир+ОУНТ) при различных температурах и давлениях нами получено следующее выражение:

$$\alpha_P = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{dP}{dT}\right)_p . \quad (13)$$

Для расчета α_P нами было исследована значение плотности нано-жидкости системы жидкого диэтилового эфира и ОУНТ при высоких пара-метрах состояния (таблица 1).

Эксперимент

Для измерения плотности исследуемых наножидкостей нами использован метод гидростатического взвешивания [7-10].

Экспериментальная установка в основном состоит и автоклав (титановый материал), прижимной сосуд высокого давления (титановых), электронной весы ВЛА-200. Общая относительная погрешность измерения плотности равна 0,1%.

Таблица 1. Плотность (ρ, кг/м^3) системы жидкого диэтилового эфира как в чистом виде, так и с добавкой одностенных углеродных нанотрубок (ОУНТ) при различных температурах и давлениях.

P, МПа	0,101	9,81	14,7	19,62	24,5	29,43
T,K	Диэтиловый эфир [7]					
293	675,1	682,8	686,9	690,2	694,5	698,5
303	667,2	671,3	675,4	681,5	683,3	687,7
323	-	662,8	667,2	671,5	675,6	679,4
333	-	661,9	665,8	669,3	673,0	677,3
343	-	656,5	660,3	664,2	668,4	672,4
353	-	651,5	655,3	659,4	663,7	667,6
363	-	646,2	650,0	654,7	658,4	662,0
373	-	640,3	644,7	648,5	652,3	656,5
383	-	635,7	639,4	644,7	648,5	652,8
393	-	630,4	634,1	638,0	642,4	646,7
413	-	619.8	623,5	627,6	631,8	635,0
423	-	614,1	618,2	622,4	626,2	630,2
433	-	608,8	612,3	616,5	620,4	624,7
Диэтиловый эфир+0,1% углеродных нанотрубок [8]						
293	675,3	683,2	687,6	691,3	695,2	699,3
303	667,5	672,0	676,0	681,9	685,5	689,7
323	-	667,4	671,5	675,0	679,4	683,4
333	-	666,5	670,3	674,2	678,2	682.5
343	-	655,9	659,2	664,1	668,4	673,6
353	-	651,3	655,4	659,9	664,5	668,3

363	-	646,9	650,2	655,4	660,3	665,5
373	-	641,8	646,4	649,3	652,8	656,9
383	-	640,5	644,6	648,0	652,0	655,6
393	-	639,1	643,3	647,2	651,2	654,7
413	-	623,9	627,3	631,0	635,3	639,3
423	-	616,2	620,3	624,3	628,2	632,5
433	-	610,3	614,5	619,6	625,0	628,4
Диэтиловый эфир+0,2% углеродных нанотрубок [8]						
293	676,4	684,9	690,5	697,9	704,8	711,8
303	668,2	673,3	678,8	683,6	688,8	693,5
323	-	669,0	674,5	679,6	684,5	688,4
333	-	668,6	672,3	676,1	680,4	684,8
343	-	657,5	662,3	666,9	670,5	674,6
353	-	652,9	656,8	661,5	665,9	669,7
363	-	647,5	652,8	656,4	662,5	666,3
373	-	643,5	647,3	651,8	655,9	660,4
383	-	642,0	646,2	650,3	654,0	659,1
393	-	640,3	644,3	648,2	651,8	655,4
413	-	624,5	628,9	632,8	636,7	640.5
423	-	618,8	621,4	625,9	629,0	633,4
433	-	612,9	616,5	620,8	625,9	629,0
Диэтиловый эфир+0,3% углеродных нанотрубок [8]						
293	677,4	685,9	691,8	698,6	706,8	713,9
303	669,9	674,5	679,9	684,3	689,9	694,7
323	-	670,3	674,0	678,3	683,2	687,3
333	-	669,4	673,8	677,6	681,6	685,0
343	-	667,8	672,0	676,5	680,6	684,1
353	-	666,5	670,0	674,9	678,4	682,7
363	-	656,0	660,3	664,2	668,6	673,1
373	-	653,0	657,6	661,9	665,0	670,3
383	-	643,8	647,6	651,3	655,8	660,1
393	-	641,5	645,7	650,3	654,8	659,0
413	-	626,9	630,3	634,8	638,8	642,2
423	-	620,0	624,7	628,7	632,0	636,7
433	-	614,7	618,8	622,6	626,7	630,4
Диэтиловый эфир+0,4% углеродных нанотрубок [8]						
293	678,6	688,0	692,5	700,7	708,9	716,8
303	670,8	676,7	681,0	686,5	690,4	695,6
323	-	672,1	676,4	680,3	684,1	689,9
333	-	670,8	674,7	678,9	683,0	687,1
343	-	669,0	673,2	677,4	681,5	685,2
353	-	668,1	672,0	675,3	679,6	683,8
363	-	666,3	670,3	673,9	676,2	680,2

373	-	658,9	662,7	666,7	670,4	674,4
383	-	645,0	649,1	654,3	658,5	662,8
393	-	643,0	647,8	652,0	656,2	660,0
413	-	628,3	632,5	636,7	640,4	644,9
423	-	622,6	626,9	630,2	634,8	640,3
433	-	619,6	623,8	627,6	633,8	637,7
Диэтиловый эфир+0,5% углеродных нанотрубок [8]						
293	679,9	691,6	695,4	705,3	713,6	725,9
303	671,4	678,4	683,2	687,9	691,7	696,3
323	-	674,0	678,3	682,0	686,4	690,3
333	-	672,3	675,9	679,3	683,3	687,4
343	-	671,4	675,0	678,5	682,0	686,5
353	-	670,0	674,1	676,7	680,1	684,4
363	-	669,3	673,2	675,0	678,3	682,5
373	-	662,0	666,3	670,4	674,2	678,0
383	-	647,3	651,5	656,4	660,9	665,3
393	-	645,0	649,1	654,0	658,4	662,6
413	-	630,8	634,9	638,7	642,8	648,4
423	-	624,6	628,9	632,8	636,5	640,3
433	-	621,4	625,3	630,0	634,2	638,8

Как видно из табл.1 плотность жидкого чистого диэтилового эфира с добавлением до 0,5% одностенных углеродных нанотрубок с ростом температуры уменьшается, а с увеличением давления растет. Экспериментальные данные показали, что добавка одностенных углеродных нанотрубок приводит к росту плотности исследуемой системы. Например, при температуре 293К (система диэтилового эфира +0,2% одностенных углеродных нанотрубок) увеличение давления от 0,101 до 29,43 МПа увеличивается плотность образца на 5,2% а для образца диэтиловый эфир +0,2% одностенных углеродных нанотрубок плотность увеличивается на 6,8%. При температуре 433 К рост давления от 9,81 до 29,43МПа приводит к росту плотности системы диэтиловый эфир+0,3% одностенных углеродных нанотрубок на 2,5% а для

образца диэтиловый эфир +0,5% одностенных углеродных нанотрубок это изменение доходит до 2.8% при том же изменении параметров состояния.

Как отмечалось выше, добавка одностенных углеродных нанотрубок приводит к увеличению плотности исследуемых растворов. Например, при T=293 K и P=0,101МПа добавка 0,5% одностенных углеродных нанотрубок в жидкий диэтиловый эфир (чистота х.ч.-99,86%) обусловливает рост плотности диэтилового эфира на 3,9%, а при T=433 K и P=29,43 МПа это изменение доходит до 2,3%. Как видно из выше приведенных значений можно заключить, что при высоких температурах и давлениях влияние одностенных углеродных нанотрубок относительно мало, т.е. в 1,7 раза меньше, чем при комнатной температуре.

Заключение

Выполнено молекулярное моделирование термодинамических свойств наножидкостей системы жидкого диэтилового эфира и ОУНТ представляющий коллоидных наножидкости использующий как топлив. Моделирование выполнялось методом Монте-Карло в каноническом ансамбле с использованием оптимизированных потенциалов (силовых полей).

Полученный массив данных моделирования сравнивался с высокоточным уравнением состояния для данной наножидкостей. Результаты сравнения показывают хорошую согласованность сравниваемых данных. Используемый метод может быть в дальнейшем применен для моделирования свойств других наножидкостей.

Литература

1. Lustig. Direct molecular NVT simulation of the isobaric heat capacity, speed of sound and Joule −Thomson coefficient 11 molecular Simulation.−37(201).− pp. 457−465.
2. Deublin S. MS2: A molecular simulation tool for thermodynamic properties / S.Deublin, B.Eckl, J.Stoll, S.V.Lishchun, G.Guevora-Carrion, C.W. Glass, T.Mezker, M.Bemzeuthes, H.Hasse, J.Vzavce // Computer Physics Communications. −182 (2011). −PP. 2350−2367.
3. Widom B. Some Torics in the Theory of Fluids // the Journal of Che − mical Physics.−39 (1963).−PP. 2808−2812.
4. Lemmon E.W. NJST Standards Refe-rence Database 23: Reference Fluid Thermodynamic and Transport Properties / E.W. Lemmon, M.L. Huber, M.O.

Mclimder // National Institute of Standard's and Technology, Standard Reference Date Program, Gaithezbuzg. − 2010. − PP. 345−350.
5. Kunz O. The Grg-2004. Wide-Range Eguation of state for Natural Gases and Other Mixtures / O.Kunz, R.Klimeck, W.Wagner, M. Jaeschke // −Dus−seldarf.− 535p.
6. Lemmon E.W. A New Function Form and New Fit-ting Techniques for Equations of State with, Application to Pentalu − orhange (HFC-125) / E.W.Lemmon, R.T.Jacobsen // J.Phys. Chem. Ref. Data. − 2005. − 34(1). − PP. 69 −108.
7. Сафаров М.М. Теплофизические свойства простых эфиров и водных растворов гидразина в зависимости от температуры и давления // Дисс. …д-ра т.н. −Душанбе, 1993. −495с.
8. Гуломов М.М. Влияние углеродных нанотрубок на изменение тепло, температуропроводность и плотности жидкого диэтилового эфира //Дисс… канд. техн.наук. − Душанбе, 2017.−132с.
9. Сафаров М.М. Моделирование коэффициента теплоотдачи (число Био) нанокомпозитов / М.М.Сафаров, С.Х.Мирзоев, М.А.Зарипова, М.М.Гуломов // Вестник филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе. Серия естественных наук. − 2017. − 3(1). − С.83−88.
10. Сафаров М.М. Модель цилиндрического контакта с плоской подложкой и расчет коэффициента теплопроводности нанонити / М.М.Сафаров, С.Х.Мирзоев, Дж.Ф.Собиров, Н.Б.Давлатов, М.М.Гуломов и др. // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. − 2018. − №2. − С. 122−127.

ТАТҚИҚИ КОМПЛЕКСИИ ХОСИЯТҲОИ ТЕРМОДИНАМИКӢ ВА КАЛОРИКИИ НАНОМОЕЪҲОИ СИСТЕМАИ ЭФИРИ ДИЭТИЛИ МОЕЪ ВА НАНОНАЙЧАИ ЯККҚАБАТАИ КАРБОНӢ

Ғуломов М.М., Ойматова Ҳ.Х., Сафаров Ш.Р., Сафаров М.М.
Коллеҷи техникии ДДТ ба номи академик М.С.Осимӣ
Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав
Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар ш. Душанбе

Дар мақолаи мазкур натичаҳои тачрибавӣ ва назариявии хосиятҳои термодинамикӣ ва калорикии наномоеъҳои системаи эфири диэтили моеъ ва нанонайчаи якқабатаи карбонӣ дар ҳудудҳои ҳароратҳои (293-433)К , фишори (0,101-29,43)МПа ва консентрасияҳои нанонайчаи якқабатаи карбонӣ оварда шудааст.

Калидвожаҳо: *энталпия, энтропия,энергияи Гиббс ва Гелмголтс, эфири диэтили моеъ, нанонайчаи якқабатаи карбонӣ.*

COMPLEX DEFINITION OF THERMODYNAMIC AND CALO-RICAL VALUES OF NANOFLUIDS OF LIQUID DIETHYL ETHER AND OUNT SYSTEM.

Gulomov M.M., Oymatova Kh.H., Safarov Sh.R., Safarov M.M.
Technical College TTU named after acad. M.S. Osimi
Bokhtar State University named after Nosiri Khusraw
Branch of the Moscow State University Lomonosov in Dushanbe

The paper presents the results of numerical calculations and experimental investigation of the thermodynamic and caloric properties of nanofluids of the diethyl ether system and single-walled carbon nanotubes in the temperature range (293-433)K and pressure (0.101- 29.43) MPa and the concentration of single-walled carbon nanotubes.

Key words. *Enthalpy, entropy, Gibbs and Helmholtz energies, liquid diethyl ether, carbon nanotubes.*

Сведения об авторах. **Гуломов Масрур Мирзохонович,** кандидат техн. наук, декан Энергетического факультет, Технический колледж ТТУ имени акад. М.С. Осими.

Ойматова Хожармо Холмуродовна, кандидат педагогических наук, доцент, декан факультета физики, БГУ имени Носира Хусрава, тел: (+992) 93-591-2361.

Сафаров Шохин Рустамович, преподаватель кафедры общей физики БГУ имени Носира Хусрава. Тел: (+992) 90 739 36 51.

Сафаров Махмадали Махмадиевич, доктор технических наук, профессор, Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе. Тел: (+992) 93 163 15 85.

УДК 669 .054: 669.071

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ФАКТОРОВ НА СТЕПЕНЬ ИЗВЛЕЧЕНИЯ ГЛИНОЗЕМА ИЗ МИНЕРАЛА МУСКОВИТА

Мирзоев Б., Эмомов Б., Тураев С.
Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Душанбе
Институт Энергетики Таджикистан
Дангаринский государственный университет

Работа посвящена исследованию вопросов получения глинозема и других полезных компонентов из обогащенных минерала мусковита месторождения «Курговат» Республика Таджикистан способом спекания с дополнительными добавками - кальцинированной соды, флюорита, карбоната кальции и угля. Изучено виляние температуры, продолжительности, концентрация, массового соотношения компонентов на извлечения глинозема и других полезных компонентов из состава спека. Для решения поставленной задачи были разработана несколько технологических вариантов, были найдены оптимальный технологические режим по извлечению основных полезных компонентов из состава полученного спека.

Ключевые слова: *мусковит, спек, шихта, дробление, выщелачивание, обескремнивание, карбонизация, гидрарглит, обезвоживания, термопрокалка.*

Растущая потребность в производстве алюминия и продуктов на его основе, с одной стороны, и некоторая ограниченность запасов бокситов-основного сырья для производства алюминия с другой, вызвали необходимость использования других видов глиноземсодержащего сырья. Поэтому, во многих экономически развитых стран ведутся поиск и разработка новых безотходных и экологические чистых технологий получения глинозема из нетрадиционных видов сырья – мусковита, нефелина, ставролита, алунита и др., запасы, которых имеются в больших количествах, и их месторождения повсеместно распространены. Проведения исследования и нахождения оптимальных технологических параметров и комплексного переработка с получением полезных компонентов ныне является перспективным и актуальной задачей.

Экспериментальная часть

Как показали проведенные ранее нами исследования, уменьшение и увеличение [1-3] количества добавки C_aF_2 в шихте приводит к снижению извлечения AI_2O_3 и происходит неполное образование фтористых солей в процессе спекания алюминий содержащего сырья. При этом наличие флюорита в шихте служит для образование нерастворимого двукальциевого силиката, который является источником фтора для образования фторсолей. При изучении физико – химического состава добавляемых компонентов выявлено, что полученный спек имеет сложный химический и фазовый состав, из которого основными составляющими соединениями являются:

Na_2O . AI_2O_3 . SiO_2 : CaO. AI_2O_3.2SiO_2: CaO .FeO.SiO_2 и NaF,

Спек, полученный при оптимальных условиях из четырехкомпонентной шихты, дробился до размера частиц 0,1 – 0,5мм и подвергался выщелачиванию 10% раствором NaOH. Как известно из литературных источников [1] при выщелачивании полученного спека с раствором NaOH протекает примерно следующая химическая реакция:

$$Na_2O .AI_2O_3.SiO_2 + NaOH = Na_2O .AI_2O_3 + Na_2SiO_3 + H_2O \quad (1)$$

$$CaO .AI_2O_3. 2SiO_2 + NaOH = CaO.AI_2O_3.SiO_2 + Na_2SiO_3 + H_2O \quad (2)$$

$$CaO.FeO.2SiO_2 + NaOH = CaO.FeO.SiO_2 + Na_2SiO_3 + H_2O \quad (3)$$

В результате протекания реакции (1) происходит извлечение глинозема в раствор, которое зависит от многих факторов: химического состава и физических свойств спека, режима выщелачивания и аппаратурной схемы выщелачивания. Как следует из результатов исследований по изучению влияния различных факторов выщелачивания на степень извлечения глинозема (табл.1), с повышением температуры от 20 до 96^0C степень извлечения глинозема монотонно возрастает, достигая 93,6% при 96^0C. С увеличением

продолжительности выщелачивания спека до 120 минут степень извлечения глинозема возрастает до 93,6%, а затем снижается вследствие взаимодействия силиката натрия с алюминатом натрия с образованием нерастворимого гидроалюмосиликата натрия.

Как видно из таблицы 1, наиболее благоприятным режимом осуществления процесса является: концентрация раствора - 100 г/л NaOH, температура – 96^0C, Т:Ж=1:4, и продолжительность выщелачивания - 120 мин. При этом степень извлечения Al_2O_3 достигает 93,6%.

Таблица 1. Влияние различных факторов выщелачивания на степень извлечения Al_2O_3

№	t, ^{0}C	C_{NaOH}, г/л	τ, мин	Т:Ж	Степень извлечения глинозема, %
1	20	100	120	1:4	28,5
2	40	100	120	1:4	46,0
3	60	100	120	1:4	64,8
4	80	100	120	1:4	86,2
5	90	100	120	1:4	90,9
6	96	100	120	1:4	93,6
7	96	60	120	1:4	72,0
8	96	80	120	1:4	83,9
9	96	110	120	1:4	90,5
10	96	120	120	1:4	88,9
11	96	100	80	1:4	84,9
12	96	100	100	1:4	86,7
13	96	100	140	1:4	93,4
14	96	100	60	1:3	77,5
15	96	100	60	1:6	89,0
16	96	100	60	1:7	89,9

С целью установления изменений в составе спека при щелочной обработке был проведен рентгенофазовый анализ исходных веществ и конечных продуктов (рис.1). На штрихрентгенограмме спека (рис.1. а) четко проявляются линии $na_2o{\cdot}al_2o_3{\cdot}sio_2$; $cao{\cdot}al_2o_3{\cdot}2sio_2$; $cao{\cdot}feo{\cdot}\ 2sio_2$ и na_2sio_3. отсутствие линий алюмината натрия на штрихрентгенограмме нерастворимого остатка (рис.1.б) свидетельствует о почти полном переходе алюмината натрия в раствор, а также согласно реакциям (3.2) и (3.3), в твердом осадке остаются $cao{\cdot}al_2o_3{\cdot}sio_2$ и $cao{\cdot}feo{\cdot}sio_2$.

Результаты химического анализа исходного и нерастворимого остатка согласуются с результатами рентгенофазового анализа.

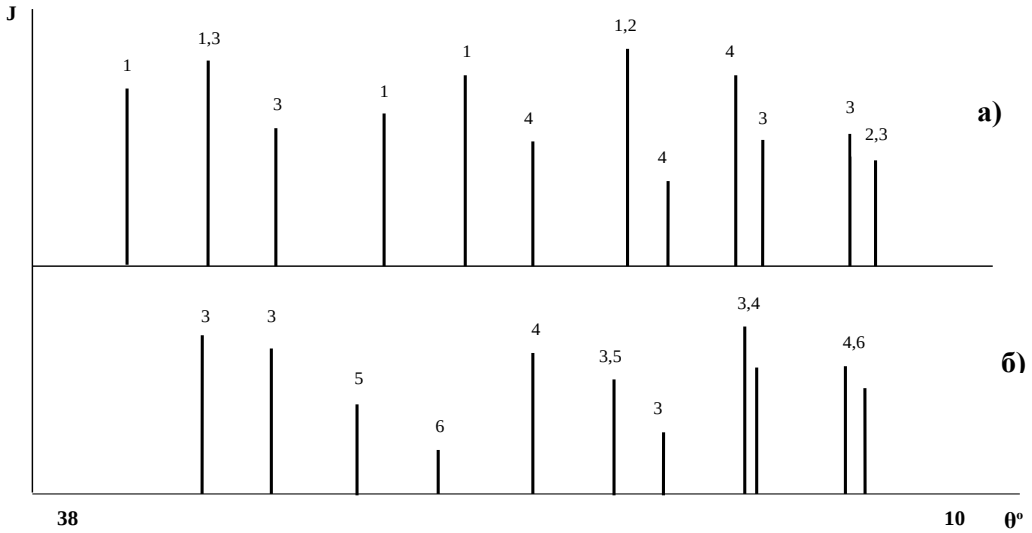


Рисунок 1. Штрих рентгенограммы: а) спека, полученного из четырехкомпонентной шихты при оптимальных условиях; б) твердого осадка после выщелачивания: 1 – $Na_2O{\cdot}Al_2O_3$; 2 – Na_2F; 3 – $CaO{\bullet}Fe_2O_3{\bullet}2SiO_2$; 4 – $CaO{\bullet}Al_2O_3{\bullet}2SiO_2$; 5 – $3CaO{\bullet}Al_2O_3{\bullet}3SiO_2$; 6 – $CaO{\bullet}Al_2O_3{\bullet}3SiO_2$.

Было выявлено, что алюминатною-фторидный раствор после выщелачивания значительно загрязнен кремнеземом. Содержание SiO_2 в криолит-глиноземном концентрате негативно влияет на качество получаемого алюминия, поэтому необходимой предварительной стадией перед карбонизацией является обескремнивание алюминатною-фторидного раствора. При этом возможно протекание ионообменной реакции:

$Na_2O.\ Al_2O_3\ .n\ SiO_2\ .\ mH_2O + Ca(OH)_2 = CaO\ .\ Al_2O_3\ .nSiO_2\ .mH_2O + 2NaOH$(4)

Как видно из этой реакции обескремнивание алюминатных растворов сводится только к реакции обмена ионов Na^+ и Ca^{2+}. Для подтверждения этой реакции были поставлены опыты по исследованию влияния концентрации извести, температуры и продолжительности процесса. Обескремнивание в поли термических условиях проводилось следующим образом: в термостатированный реактор с мешалкой помешали полученный раствор, к нему добавляли при разных концентрациях известь, и фиксировали продолжительность процесса. С целью обескремнивание в алюминатный раствор добавляли $Ca(OH)_2$, при этом концентрация извести составляла 5-10 г/л. Раствор нагревали до температуры 80-90^{o}с, и выдерживали в течение 1-1,5 часов. После этого раствор охлаждали до температуры 25-30^{o}с. Выпавший в осадок гидроалюмосиликата натрия отделяли фильтрованием пульпы, а алюминатный раствор направляли на процесс карбонизации. Результаты исследований показали, что при повышении концентрации извести (рис.2) от 2 до 10г/л степень обескремнивание возрастает от 7,6% до 94,9%.

При дальнейшем повышении концентрации извести степень обескремнивание изменяется незначительно. Кроме концентрации извести на процесс обескремнивание алюминатного раствора сильно влияют температура и продолжительность процесса (рис 3). Как видно из рисунка

3, с повышением температуры и увеличением продолжительности, процесс обескремнивание алюминатных растворов протекает глубоко.

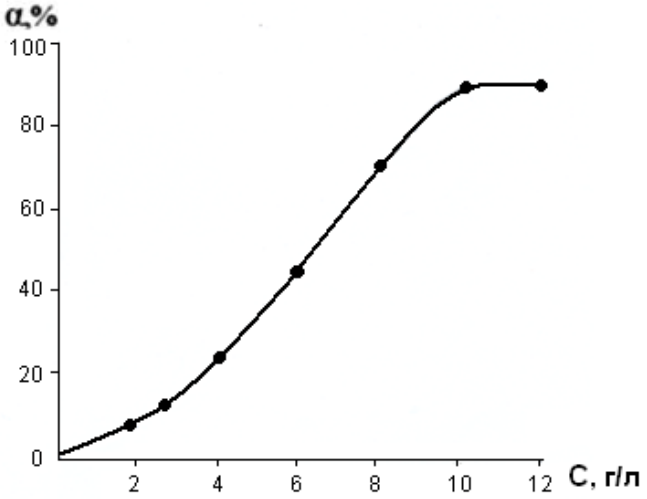


Рисунок 2 - Зависимость степени обескремнивания алюминатного раствора от концентрации извести.

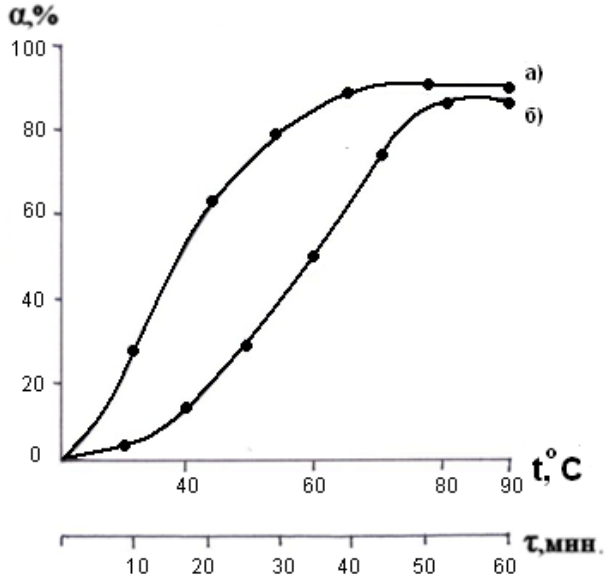


Рисунок 3- Зависимость процесса обескремнивания алюминатного раствора от температуры (а) и продолжительности процесса (б).

Проведенные нами исследования показали, что наиболее благоприятным режимом осуществления процесса являются: температура 80^{o}C и продолжительность процесса – 50 мин. При этом степень обескремнивания достигает 92,3 - 94,9%. Затем нами была проведена карбонизация алюминатного раствора, что является одним из основных методов, применяемых в производстве глинозема, осуществляемых барботированием через раствор смеси газов, содержащих CO_2, для выделения в осадок гидроксида алюминия.

Карбонизация является сложным гетеро фазным процессом и одним из основных методов, применяемых в практике производства глинозема для разложения алюминатных растворов с целью выделения кристаллического

гидроксида алюминия. С химической точки зрения процесс карбонизации протекает в две стадии. Первая стадия заключается в нейтрализации присутствующей в растворе едкой щелочи с образованием соды:

$$2NaOH + CO_2 = Na_2CO_3 + H_2O. \quad (5)$$

Вторая стадия – выделение гидроксида алюминия за счет разложения алюминатного раствора, происходит в результате уменьшения содержания Na_2O и снижения стойкость алюминатных растворов, и происходит их разложения по реакции:

$$NaAl(OH)_4 = Al(OH)_3 + NaOH. \quad (6)$$

В нашем случае, в растворе, полученном после выщелачивании спека, кроме $NaAl(OH)_4$, имеется NaF, который может влиять на ход процесса. Поэтому при карбонизации алюминатнофторидных растворов наряду с реакциями (5) и (6) протекает следующая реакция:

$$3NaAl(OH)_4+6NaF+3CO_2=Na_3AlF_6+2Al(OH)_3+3Na_2CO_3+3H_2O. \quad (7)$$

С целью нахождения оптимального режима осуществления процесса карбонизации было проведено исследование влияния температуры, продолжительности процесса и расхода CO_2 на степень извлечения полезных компонентов (рис.4).

Было установлено, что наиболее благоприятными условиями проведения процесса являются температура 20-30^{0}С и длительность 30-40 минут, при этом степень извлечения криолит-гидроксида алюминия достигает 91,2% – 92,8%.

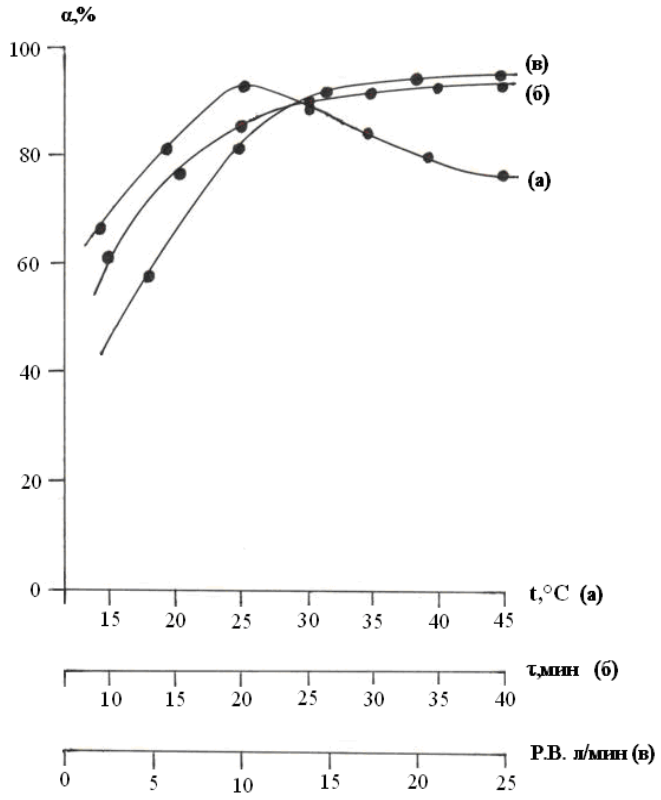


Рисунок 4 - Зависимость степени извлечения криолит-гидроксида алюминия от а) температуры, б) продолжительности процесса, в) расхода CO_2.

При этих условиях максимальная степень извлечения (92,6%) достигнута в течение 30 минут, затем извлечение криолит-глиноземного концентрата изменяется незначительно. Наряду с этим, путем раздельной карбонизации, возможно в начале процесса выделить гидроксида алюминия с небольшой примесью криолита, а после дополнительной карбонизации маточного раствора – криолит с небольшой примесью гидроксида алюминия.

В результате исследования было выявлено, что содержание воды в криолит-гидраргиллитовой смеси, полученной после фильтрации пульпы, составляет 35-45%. Согласно технологическому регламенту содержание воды в основных сырьевых материалах глинозема для производства алюминия, более 1,5 масс. % недопустимо [3] в связи с протеканием термогидролиза фторсолей в процессе электролиза. Учитывая это, были проведены исследования по нахождению оптимальных условий термопрокалки криолит-гидраргиллитовой смеси в изотермических условиях. С этой целью образцы продуктов выдерживались при заданной температуре в течение необходимого времени, затем охлаждались в эксикаторе и по потере массы определялся процента испарившейся воды.

Обезвоживание гидраргиллита происходит в обычной форме гидроксида, выделяющегося при разложении алюминатных растворов, представляет собой процесс, заключающийся в диссоциации и структурных превращениях обезвоживаемого гидрата. На основании исследований процесса обезвоживания гидроксида алюминия было установлено, что при кальцинации гидраргиллита $Al_2O_3 \cdot 3H_2O$ или $Al(OH)_3$, гидратная влага удаляется в два приема: при 240 и 510^0C. В первом случае из гидраргиллита удаляются две молекулы воды, и он превращается в моногидрат (рис. 5).

$$Al_2O_3 \cdot 3\,H_2O + 36{,}5\ \text{ккал} = Al_2O_3 \cdot H_2O + 2H_2O\ (\text{пар}). \qquad (7)$$

При 510^0C удаляется последняя, третья молекула воды и моногидрат переходит в γ-Al_2O_3:

$$Al_2O_3 \cdot H_2O + 35{,}3\ \text{ккал} = \gamma\text{-}Al_2O_3 + H_2O\ (\text{пар}). \qquad (8)$$

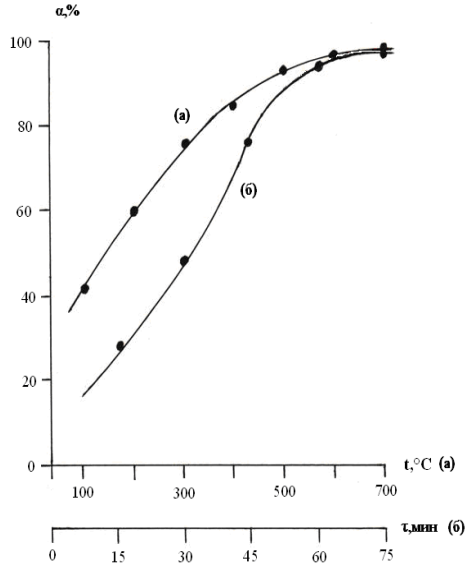


Рисунок 5 - Зависимость степени обезвоживания криолит-гидраргиллитового осадка: а) от температуры б) продолжительности процесса.

Таким образом, при температуре выше 510^0C получаем полность безводного глинозема.

Наличие линий бемита на рентгенограмме криолит-гидраргиллитовой смеси, прокаленной при 300^0C в течение двух часов, и линий γ-Al_2O_3 на рентгенограмме этой смеси, прокаленной при 600^0C в течение 1 часа, подтверждает рассуждения о протекании вышеуказанных процессов (рис. 6).

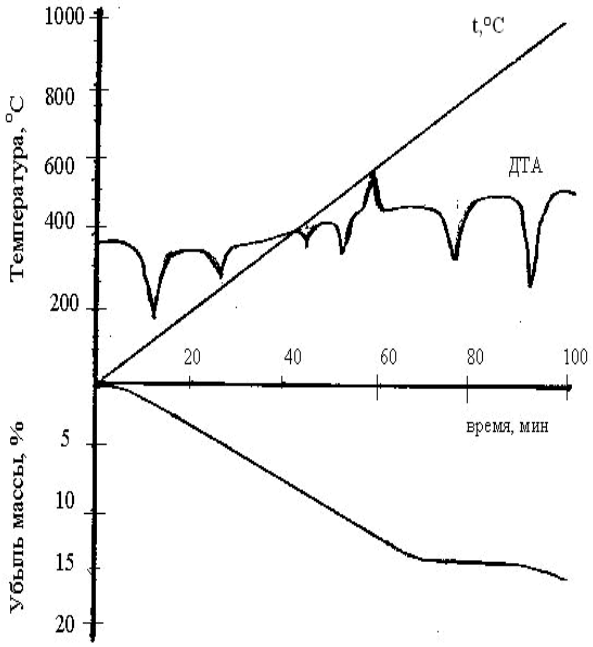


Рисунок 6. Дериватограмма криолит-гидраргиллитовой смеси

Для изучения процесса термопрокалки полученной криолит-гидраргиллитовой смеси в поли термических условиях был проведен дериватографический [4-7] анализ этой смеси после ее сушки при температуре 110^0C в течение 120 минут (рис.6). На линии ДТА вышеуказанной смеси четко выделяются 5 эндо эффектов: при 110, 240, 510, 750, 930^0C и один экзо эффект при 570^0C. Эндотермический эффект с минимумом при 110^0C обусловлен удалением гигроскопической влаги, этим же обусловлено резкое уменьшение массы по линии ТГ. Эндотермические эффекты с минимумами при 200 и 510^0C связаны с удалением из состава гидраргиллита в начале процесса двух молекул воды с образованием бемита, а затем третьей молекулы воды и превращением бемита в γ-Al_2O_3.

Незначительный экзотермический эффект на линии ДТА при 570^0C, по-видимому, связан с укрупнением кристаллов γ-Al_2O_3.

Известно, что фтор и его соединения ускоряют фазовые превращения гидроксида алюминия и снижают их температуру. Исследования действия фтора показали, что при этом природа фторсодержащего соединения не существенна, а важно лишь количество фтора. Так, например, гидроксид алюминия полностью превращается в α-Al_2O_3 при нагреве его с 0,3% фтора в составе угольной пены в течение одного часа при 900^0C, с 1,5% фтора – при

850^0C, с 3% фтора – при 650^0C, а с увеличением выдержки до 8 часов полное превращение в α-Al_2O_3 было достигнуто при 545-550^0C.

Принимая во внимание большое содержание фтора в криолит-гидраргиллитовой смеси и предыдущие рассуждения, в нашем случае следовало ожидать превращения γ-Al_2O_3 в интервале температур 650-750^0C.

Наличие линий α-Al_2O_3 на штрихрентгенограмма КГК, прокаленного при 750^0C в течение одного часа (рис.7 в,г) и эндотермического эффекта при этой температуре на дериватограмма (рис.6.) подтверждают данное предположение.

Эндотермический эффект при 930^0C связан с расплавлением криолит-глиноземного концентрата, что также подтверждалось визуальными наблюдениями.

Учитывая, что согласно разработанной технологической схеме, криолит-гидраргиллитовая смесь подвергается термопрокалки при 600^0C без предварительной сушки материала, были проведены также дериватографический исследования криолит-гидраргиллитовой смеси сразу после фильтрации (рис.6).

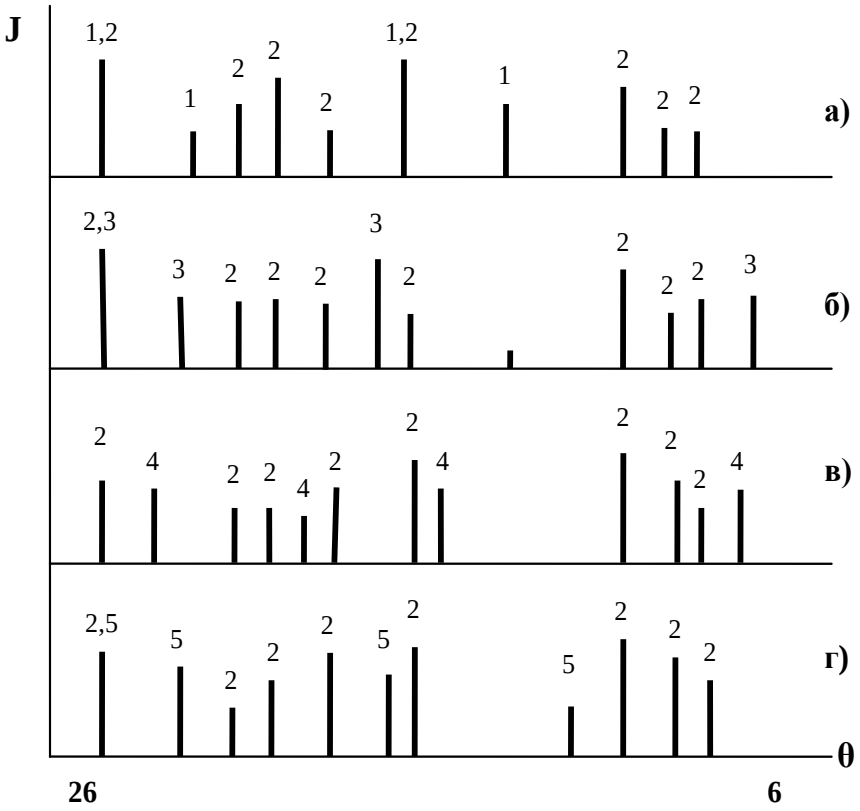


Рисунок 7 - Штрихрентгенограмма криолит-гидраргиллитовой смеси после термопрокалки: а) при 110°C в течение 2 ч; б) при 300°C в течение 1 ч; в) при 600°C в течение 1 ч; г) при 750°C в течение 1 ч. 1- гидраргиллита; 2 - криолит; 3 - бемита; 4 - γ-Al_2O_3; 5 - α-Al_2O_3.

Проведенные нами исследования показали, что процесс термопрокалки этого продукта идентичен процессу термопрокалки высушенной криолит-гидраргиллитовой смеси, с той лишь разницей, что в этом случае потеря массы за счет удаления гигроскопической влаги при 110^0C достигает 40-45%.

Литература

1. Абрамов В. Я. Выщелачивание алюминиевых спеков / В.Я.Абрамов, Н.И.Еремин // М: Металлургия, 1976. −208 с.
2. Мирзоев Б. Способ переработки низкокачественного глиноземсодержащего сырья (Патент №16683300, 1989г.) / Б.Мирзоев, Х.Сафиев, А.К.Запольский, У. Мирсаидов // − Бюлл. 1991. − №29.
3. Ходоров Е.И. Техника спекания шихт глиноземной промышленности / Е.И.Ходоров, Н.С. Шморгуненко // − М: Металлургия, 1978.− 320 с.
4. Мирзоев Б. Кинетика процесса получения глинозема и побочных продуктов из ставролит слюдистого сланца и кальцийфторсодержащего сырья / Б.Мирзоев., Х.Сафиев., С.Тураев // ДАН РТ. − 2009. − Т.52. − №11.− С.873−876.
5. Мирзоев Б. Способ получения глинозема и криолитового концентрата из мусковитовых сланцев (Патент №TJ 685) / П. Мирзоев., А. Иброхим., Б. Мирзоев., и др. // − Бюл. №106. − 2015г.
6. Мирзоев Б. Физико-химическое изучение алюмофторидного спека / Б. Мирзоев., С. Тураев., Д. Рузиев // Материалы Международной конференции «Наука и современное образование «Проблемы и переспективы», посвященной 60- летию ТНУ. − Душанбе, 2008.− С.123.
7. Мирзоев Б. Кинетика процесса получения глинозема и побочных продуктов из ставролита-слюдистого сланца и кальцийфторсодержащего сырья / Б. Мирзоев, Х. Сафиев, С. Тураев // ДАН РТ. −2009. − Т.52. − № 11.− С. 783− 876.

ТАҲҚИҚИ ТАЪСИРИ ОМИЛҲОИ ГУНОГУН БА ДАРАҶАИ ҲОСИЛКУНИИ ЧИЛХОК АЗ МАЪДАНИҲОИ МУСКОВИТ

Мирзоев Б., Эмомов Б. Тураев С.

Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар ш. Душанбе

Дар мақолаи мазкур шароитҳои бо роҳҳои илмӣ ҳосил намудани чилхок ва дигар маҳсулотҳои фойиданок аз маъдани ганигардонидашудаи мусковти кони Курговати Тоҷикистон бо роҳи пухташавӣ бо иловаҳои соддаи калсийнонидашуда, флюорит, карбонати калсий ва ангишт дар шароитҳои гуногун оварда шудааст. Инчунин дар мақолаи мазкур таҳқиқотҳо оиди вобастагии ҳосилшавии чилхок аз таркиби дигар маҳсулотҳои фойиданок аз таркиби шихтаи пухташаванда, ҳарорат, давомнокӣ бо пуррагӣ омухта шуда, шароитҳои ҳосилшавии онҳо муайян карда шудааст.

Калидвожаҳо: *мусковит, пухтан, шихт, майда кардан, ҳал намудан, бесилистсиякуноӣ, карбонидан, беобгардонидан, ба воситаи гарми хушк намудан.*

INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF VARIOUS FACTORS ON THE DEGREE OF EXTRACTION OF ALUMINA FROM THE MUSCOVITE MINERAL

Mirzoev B., Emomov B., Turaev S.

Branch of Moscow State University M.V. Lomonosov in Dushanbe

The work is devoted to the study of the issues of obtaining alumina and other useful components from the enriched muscovite mineral of the Kurgovat deposit in the Republic of Tajikistan by sintering with additional additives - soda ash, fluorite, calcium carbonate and coal. Wobble of temperature, duration, concentration, mass ratio of components to extraction of alumina and other useful components from the composition of the sinter was studied. To solve the task, several technological options were developed, the optimal technological regime for extracting the main useful components from the composition of the resulting cake was found.

Key words: *muscovite, speck, batch, crushing, leaching, desiliconization, carbonization, hydrargit, dehydration, thermal pumping. Annotation*

Сведения об авторах. **Мирзоев Бодур** – кандидат химических наук, с.н.с. сектора науки и инноваций филиала МГУ им. М. В. Ломоносова в г. Душанбе.

Эмомов Баҳром – аспирант Института Энергетики Таджикистана.

Тураев Сабур – кандидат технических наук, зав. каф. Дангаринского государственного университета.

УДК 544-971

ТЕРМОДИНАМИКА ПРОЦЕССОВ КОМПЛЕКСООБРАЗОВАНИЯ Fe(III) В ВОДНЫХ РАСТВОРАХ ВАЛЕРИАНОВОЙ И ИЗОВАЛЕРИАНОВОЙ КИСЛОТ

Исмаилова М.А., Камилов Х.Ч.

Технологический университет Таджикистана

Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова

В статье приведены результаты изучения процессов комплексо-образования Fe(III) и Fe(II) в водных растворах валерианової и изовалерианової кислот методом окислительного потенциала и показано влияние температуры на состав, константы устойчивости и термодинамические характеристики и образующихся комплексов.

Ключевые слова: *комплексообразование, н-валерианова и изовалерианова кислоты, константы устойчивости, термодинамические функции.*

В современной химии координационных одной из важных проблем остаётся термодинамическое исследование реакций комплексообразования металлов в растворах и установление влияния различных факторов на эти процессы. Знание термодинамических характеристик этих процессов при

различных температурах и составах раствора позволяет судить о характере взаимодействия между компонентами растворов и энергии химических связей в комплексах.

Настоящая работа посвящена изучению процессов комплексообразования Fe(III) и Fe(II) в водных растворах н-валериановой и изовалериановой кислот методом окислительного потенциала [1] и влияния температуры на состав, области существования, термодинамические характеристики и константы устойчивости образующихся комплексов.

Исследования проводились при следующих экспериментальных условиях: $C_{Fe(III)} = C_{Fe(II)} = 1 \cdot 10^{-4}$ моль/л, ионная сила 1,0 моль/л ($NaClO_4$), концентрация н-валериановой и изовалериановой кислот 0,01 и 0,1 моль/л, в интервале температур 298, 308, 318 и 328К. [2,3,4]

При совместном анализе экспериментальных зависимостей окислительного потенциала (φ^o) от pH растворов, концентрации окисленной и восстановленной форм железа и концентрации кислоты установлено существование в изученных системах следующих комплексных соединений трёх- и двухвалентного железа: $Fe(OH)^{2+}$, FeL^{2+}, FeL_2^+, $FeLOH^+$, $Fe_3L_6(OH)_2^+$ и FeL^+.

Повышение температуры не влияет на состав гидроксильных, карбоксильных и гидроксокарбоксильных комплексов железа. Однако приводит к смещению области существования отдельных комплексных соединений в сторону меньших значений pH.

Величина стандартного окислительного потенциала возрастает с повышением температуры (таблица 1).

Таблица 1

φ, мв	749	755	759	769
T, K	298	308	318	328
$-lgK_{101}$	2,34	2,23	2,08	1,97

Значения констант устойчивости комплексов вычислены методом последовательного приближения и уточнены теоретическим расчётом экспери-ментальных кривых зависимостей $\varphi - \text{pH}$ с помощью уравнения окислительного потенциала, выведенного с учётом образующихся в исследованных системах комплексов (таблица 1 и 2).

Таблица 2. Значения логарифма констант устойчивости комплексных соединений

лиганд	Т, К	$Fe(OH)^{+}$	FeL^{2+}	FeL_2^{+}	$FeLOH^{+}$	$Fe_3L_6(OH)_2^{+}$	$Fe(OH)^{2+}$
валерат-ион	298	2,34	2,89	2,48	0,59	22,68	-2,34
	308	2,23	2,93	2,54	0,68	23,06	-2,23
	318	2,08	2,99	2,64	0,77	23,66	-2,08
	328	1,97	3,04	2,71	0,90	24,14	-1,97
изовалерат-ион	298	2,33	2,69	2,38	0,58	22,64	-2,34
	308	2,22	2,76	2,45	0,65	22,96	-2,25
	318	2,04	2,84	2,52	0,73	23,60	-2,00
	328	1,95	2,97	2,60	0,82	24,12	-1,96

Как следует из данных, приведённых в таблицах, с повышением температуры значения констант устойчивости одних и тех же комплексов при постоянной ионной силе увеличиваются.

По найденным при разных температурам константам устойчивости комплексов определены термодинамические функции реакций образования комплексов трёхвалентного железа.

Значения ΔH^{o} реакций образования комплексов $Fe(OH)^{2+}$, FeL^{2+}, FeL_2^{+}, $FeLOH^{+}$, $Fe_3L_6(OH)_2^{+}$ найдены по методу температурного коэффициента

$$\Delta H = -4{,}575\,\frac{\delta lgK}{\delta {}^{1}/_{T}}.$$

Изменение энтропии и свободной энергии рассчитаны по соответствующим уравнениям (таблицы 3 и 4):

$$\Delta G^{o} = -RTln\text{К}_{\text{уст}}, \qquad \Delta S = \frac{\Delta H}{\text{Т}}, \qquad \Delta G^{o} = \Delta H^{o} - T\Delta S$$

Значения термодинамических функций представлены в таблице 3

Термодинамические величины ΔH^{o} (ккал/моль), ΔG^{o} (ккал/моль) и ΔS^{o} (э.е.) при $I = 1{,}0$ моль/л и различных температурах для комплексов Fe(III), образующихся с анионами валериановой и изовалериановой кислотами

Таблица 3

Комплекс	Лиганд	Т,К / т.ф.	298	308	318	328
FeL^{2+}	валерат-ион	ΔG^{o}	-3,94	-4,14	-4,34	-4,56
		ΔH^{o}	1,6	2,1	2,7	3,6
		ΔS^{o}	19	20	22	25

FeL_2^+		ΔG^o ΔH^o ΔS^o	-3,38 2,6 20	-3,57 3,2 21	-3,89 3,7 24	-4,06 4,2 25
$FeLOH^+$		ΔG^o ΔH^o ΔS^o	-0,80 3,2 13	-0,96 4,0 16	-1,12 4,7 18	-1,32 5,8 22
$Fe_3L_6(OH)_2^+$		ΔG^o ΔH^o ΔS^o	-30,89 14,6 152	-32,44 19,6 169	-34,21 22,9 180	-36,16 26,8 191
FeL^{2+}	изовалерат-ион	ΔG^o ΔH^o ΔS^o	-3,66 2,5 21	-3,88 3,4 24	-4,13 -4,4 27	-4,45 6,2 32
FeL_2^+		ΔG^o ΔH^o ΔS^o	-3,24 2,7 20	-3,42 3,3 23	-3,65 4,3 25	-3,01 6,3 31
$FeLOH^+$		ΔG^o ΔH^o ΔS^o	-0,73 2,92 12	-0,91 3,59 15	-1,06 4,50 18	-1,23 5, 21
$Fe_3L_6(OH)_2^+$		ΔG^o ΔH^o ΔS^o	-30,83 15,1 154	-32,36 20,0 170	-34,29 23,7 102	36,29 29,5 201

Экзотермичность процессов образования валератных (изовалератных) и гидроксовалератных комплексов Fe(III) указывает на то, на разрушение связей акцептор – вода и лиганд – вода тратится больше энергии, чем выделяется при образовании новых связей акцептор – лиганд.

Небольшие положительные значения ΔH^o и заметно большие положительные величины ΔS^o свидетельствуют о том, что взаимодействие трёхвалент-ного железа с анионами валериановой и изовалериановой кислот приводит к образованию связей, близких по природе к электростатическим. [5]

При ступенчатом комплексообразовании происходит уменьшение изменения энтальпии и энтропии. Подобное изменение энтропии приводит к уменьшению устойчивости моноядерных комплексов по мере усложнения их состава.

При образовании соединения состава $Fe_3L_6(OH)_2^+$ резко возрастают положительные значения энтальпии и энтропии вследствие того, что образование циклического трёхъядерного комплекса сопровождается

вытеснением гораздо большего количества молекул воды, чем при образовании нециклического соединения.

С повышением температуры при постоянной ионной силе ΔH^o и ΔS^o для всех комплексных частиц возрастают, а величина ΔG^o становится более отрицательной, что может быть связано с увеличением вклада энтропийной составляющей в изменение свободной энергии.

Сравнение ΔG^o, ΔH^o и ΔS^o для комплексов, образующихся в водных растворах валериановой и изовалериановой кислот при различных температурах показывает, что отрицательная величина ΔG^o больше, а изменение энтальпии и энтропии образования комплексов с валератными лигандами меньше, чем для одинаковых по составу соединений с изовалератными лигандами. Вероятно, это связано с различным пространственным строением и изменением силы кислот при различных температурах. [6]

Литература

1. Никольский Б.П. Оксредметрия /Б.П.Никольский, В.В.Пальчевский, А.А.Пендин, Х.М. Якубов // Л.−Д: Химия, 1975.− С. 129 −218.
2. Исмаилова М.А. Координационные соединения железа с анионами н-валериановой и изовалериановой кислот / М.А. Исмаилова, Х.Ч. Камилов //Труды ТУТ.− вып. Х. – 2004. − С. 134−139.
3. Исмаилова М.А. Влияние анионов фонового электролита на процессы комплексообразования ионов железа в водных растворах валериановой кислоты / М.А.Исмаилова, Х.Ч. Камилов // Вестник Технологического университета Таджикистана. – 2004. −№4 (18). − С. 24-27.
4. Камилов Х.Ч. Влияние катионов фонового электролита на процессы комплексообразования ионов железа в водных растворах валериановой кислоты / Х.Ч.Камилов, М.А.Исмаилова // Материалы международной научно-практической заочной конференции «Актуальные проблемы естественных наук». − Новосибирск, 2011. – С. 106 −110.
5. Якубов Х.М. О взаимосвязи термодинамических характеристик и структуры гидроксо- и гидроксоацидных комплексов трёхвалентного железа / Х.М.Якубов, М.А.Исмаилова, Е.Я.Оффенгенден // Тез.докладов всесоюзной менделеевской дискуссии «Специфичность и чувствительность методов исследования растворов и возможности сопоставления их результатов. – Л.,1978. – С. 64−66.
6. Рахимова М.М. Координационные соединения железа с анионами одноосновных органических кислот: Модели процессов их образования /

М.М.Рахимова, Т.М. Нурматов, М.А.Исмаилова, З.Н. Юсупов, Э.Ф.Файзуллоев // −Ж.н.х. − Т.58. − №6. – 2013. – С.813−818.

ТЕРМОДИНАМИКАИ РАВАНДҲОИ ҲОСИЛШАВИИ КОМПЛЕКСҲОИ Fe(III) ДАР МАҲЛУЛҲОИ ОБИИ КИСЛОТАҲОИ ВАЛЕРАТ ВА ИЗОВАЛЕРАТ

Исмоилова М.А., Камилов Х.Ч.
Донишгоҳи технологии Тоҷикистон
Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар шаҳри Душанбе

Дар мақола натиҷаи таҳқиқи равандҳои ҳосилшавии комплексҳои Fe(III) ва Fe(II) дар маҳлулҳои обии кислотаҳои валерат ва изовалерат бо усули потенсиали оксидонӣ оварда шуда, ва таъсири ҳарорат ба таркиб, константаҳои устуворӣ ва функсияҳои термодинамикии комплексҳои ҳосилшуда нишон дода шудааст.

Калидвожаҳо: *комплексҳосилшавӣ, кислотаҳои валерат ва изовалерат,константаҳои устуворӣ, функсияҳои термодинамикӣ.*

THERMODYNAMICS OF COMPLEX FORMATION PROCESSES OF Fe(III) IN AQUEOUS SOLUTIONS OF VALERIC AND ISOVALERIC ACIDS

Ismailova M. A., Kamilov Kh. Ch.
Technological University of Tajikistan
Branch of MSU in Dushanbe

The article presents the results of studying the processes of complex formation of Fe(III) and Fe (II) in aqueous solutions of valerian and isovaleric acids by the method of oxidative potential and shows the effect of temperature on the composition, stability constants and thermodynamic characteristics and the resulting complexes.

Keywords: *complexation, n-valerian and isovaleric acids, stability constants, thermodynamic functions.*

Сведения об авторах. **Исмаилова Масуда Ахмедовна** – к.х.н., доцент, Технологический университет Таджикистана, Республика Таджикистан, г.Душанбе, тел.: 234-56-72 E-mail: masuda_41@mail.ru.

Камилов Хуршед Чулибаевич – к.х.н., Филиал МГУ имени М.В.Ломоносова в городе Душанбе, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Бохтар 35/1, тел.: 935555369. E-mail: hurshedkamilov@rambler.ru

УДК 556.38

ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКАЯ ИЗУЧЕННОСТЬ ИСТОЧНИКОВ ЛЕЧЕБНЫХ МИНЕРАЛЬНЫХ ВОД ЮЖНО-ГИССАРСКОГО ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКОГО МАССИВА

Разыков Б.Х.

Российско-Таджикский (Славянский) университет

В данной статье рассматриваются вопросы гидрогеологической изученности источников лечебных минеральных вод Южно-Гиссарского гидрогеологического массива с целью их дальнейшего использования для бальнеологического лечения.

Ключевые слова: *бальнеологическая группа, гидрогеологический массив, ионный состав, месторождение лечебных минеральных вод, минерализация вод, термальные воды.*

Подземные воды Таджикистана отличаются широким разнообразием химического и газового состава, минерализации, концентрации микрокомпонентов, температуры, что обусловлено взаимодействием сложного комплекса геологических и тектонических факторов, проявившихся в течение длительной геологической истории развития отдельных регионов. Наряду с обычными пресными подземными водами, которые повсеместно используются для хозяйственно-питьевого водоснабжения, широким распространением на исследуемой территории пользуются разнообразные по свойствам природные воды, которые могут быть использованы для лечебных целей, в химической промышленности и в энергетике. Такие воды называются природными минеральными.

К природным минеральным водам по определению Е.В. Посохова, Н.И. Толстихина относятся воды, имеющие лечебное значение (минеральные лечебные воды), которые могут быть использованы в химической промышленности для извлечения заключённых в них компонентов (промышленные воды) и воды термальные, имеющие энергетическое значение [2].

К лечебным минеральным водам относятся «природные воды, содержащие в повышенных концентрациях те или иные минеральные (реже органические) компоненты и газы и обладающие какими-либо физическими свойствами (радиоактивность, реакция среды и др.) благодаря чему эти воды оказывают на организм человека лечебное действие, в той или иной степени, отличающиеся от действия пресной воды» [1]. Среди минеральных лечебных вод в зависимости от их состава, свойств и лечебного воздействия В.В. Иванов и Г.А. Невраев выделяют шесть основных бальнеологических групп:

Группа А. Воды без «специфических» компонентов и свойств. Лечебное значение этих вод определяется только основным ионным составом и общей минерализацией, при наличии в их газовой составляющей, в основном, только азота и метана в незначительных количествах.

Группа Б. Воды углекислые. Лечебное значение этих вод определяется, прежде всего, наличием в них больших количеств растворённого CO_2, который в общем газовом составе этих вод занимает господствующее положение, а также их ионным составом и общей минерализацией (особенно при внутреннем их применении).

Группа В. Воды сульфатные. Эти воды выделены по наличию в их составе сульфидов (особенно сероводорода и гидросульфидного иона), которые ввиду очень большой фармакологической активности и определяют физиологическое и лечебное действие этих вод, используемых, как правило, для ванн. В качестве нижней границы, для отнесения природных минеральных вод к этой группе содержание сульфидов - 10 мг/л.

Группа Г. Воды железистые, мышьяковистые и с высоким содержанием Mn, Cu, Al и др. К этой группе отнесены воды, лечебное действие которых определяется одним или несколькими из перечисленных фармакологически активных компонентов. В качестве нормы для отнесения вод к железистым принято содержание Fe - 20 мг/л и к мышьяковистым As - 0,7 мг/л. Для содержания в водах Mn, Cu и Al количественных норм не установлено.

Группа Д. Воды бромные (Br), йодные (J) и с высоким содержанием органических веществ (С орг). Для отнесения вод к бромным и йодным (или йодо-бромным) принято содержание Br - 25 мг/л и J - 5 мг/л, однако, при условии, что общая минерализация этих вод допускает применение их в качестве питьевых минеральных вод. Для вод с высоким содержанием органических веществ достаточно обоснованных критериев для оценки содержания органики еще не разработано.

Группа Е. Воды радоновые (радиоактивные). К этой группе вод относятся все воды, содержащие в повышенных количествах радон - более 14 ед. Махе или 50 эман.

Группа Ж. Кремнистые термы. В эту группу вод включены широко распространённые в природе кремнистые термальные воды. В качестве условной нормы содержание в них H_2SiO_4 принято 50 мг/л, при температуре более 35^0С.

Термальными называются природные минеральные воды, обладающие температурой 20^0С и выше. В зависимости от температуры термальные воды

делятся на слаботермальные (20-50^{0}C), термальные (50-75^{0}C), высокотермальные (75-100^{0}C) и перегретые (100^{0}C и выше).

В пределах территории Таджикистана распространены лечебные минеральные воды всех бальнеологических групп.

В соответствии с принятой для монографии «Гидрогеология СССР» схемой гидрогеологического районирования территория Таджикистана является частью «Тянь-Шаньско-Джунгарско-Памирской гидрогеологической складчатой области с системой межгорных артезианских бассейнов». По геоструктурным признакам, определяющим условия формирования, движения и разгрузки подземных вод, в пределах исследуемой территории выделяются гидрогеологические районы первого порядка: а) гидрогеологические массивы, связанные с бассейнами трещинных вод и приуроченные к горноскладчатым областям и кристаллическим массивам; б) артезианские бассейны, связанные с межгорными впадинами (табл. 1).

Таблица 1. Схема гидрогеологического районирования территория Таджикистана

Артезианские бассейны I порядка	Артезианские бассейны II порядка	Гидрогеологические массивы	Гидрогеологические провинции
		1. Чаткало-Нарынский	
2. Ферганский	2а Центрально-Ферганский 2б Дигмай-Айританский 2в Уратюбинский		
		3. Алай-Кокшаальский	3а Туркестанская 3б Зеравшанская 3в Каратегинская
		4. Южно-Гиссарский	
5. Афгано-Таджикский	5а Сурханский 5б Душанбинский 5в Кафирниганский 5г Яванский 5д Вахшский 5е Кулябский 5ж Петро-Заалайский		
		6. Северо-Памирский	
		7. Южно-Памирский	7а Язгулем-Сассыкская 7б Мургаб-Бартангская 7в Аличурская 7г Шахдаринская

В пределах **горно-складчатых областей** выделяют следующие **гидрогеологические массивы I порядка**:

1. Чаткало-Нарынский.
2. Алай-Кокшаальский.

3. Южно-Гиссарский.
4. Северо-Памирский.
5. Южно-Памирский.

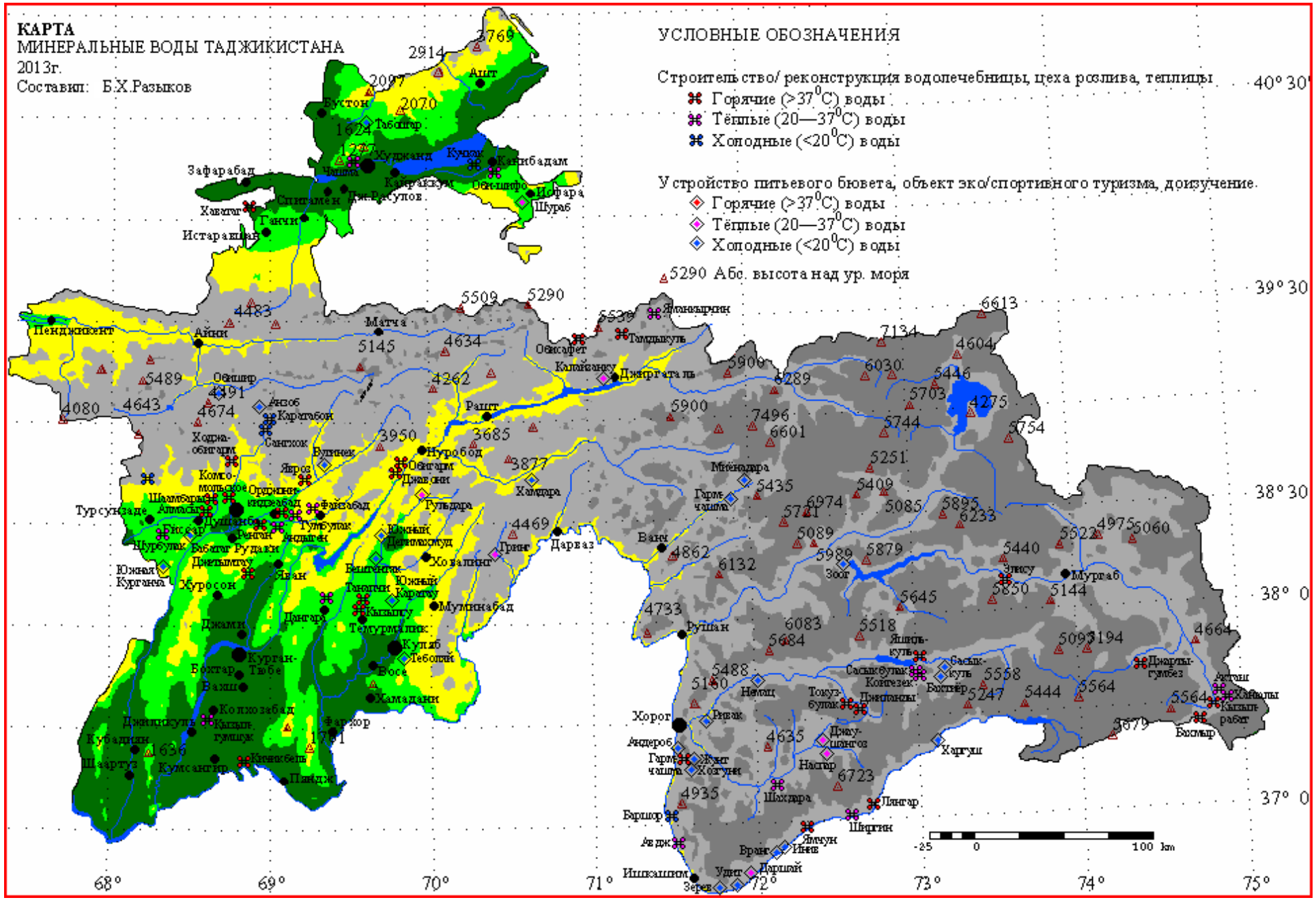
В пределах **межгорных впадин** различают **артезианские бассейны I порядка**:

1. Ферганский.
2. Афгано-Таджикский.

Таблица 2. Характеристика лечебных минеральных вод Южно-Гиссарского гидрогеологического массива

№ п/п	Наименование источника, площади	Возраст водовмещающих пород (индекс)	Дебит, д/с	Температура, ^{0}C	Минерализация, г/л	Преобладающие макрокомпоненты	Бальнеологически активные микрокомпоненты			
							Fe	H_6SiO_4	CO_2	Rn, эман
Воды без спецкомпонентов										
1	Каратаг, скв.2п	K_1a	0,25	27,1	4,0	SO_4, Na, Ca	2,0	28	4,2	18
2	Каратаг, скв.4п	Jgs	0,85	27,5	3,1	SO_4, Ca, Mg	8,0	23	21,0	26
Радоновые воды										
3	Бегар	γC_{2-3}	0,05	19,5	0,3	HCO_3, Ca	0,7	39	10,5	452,9
Кремнистые термы										
4	Ходжа-обигарм, куст скв.1	γC_{2-3}	4,38	93	0,6	HCO_3, Cl, Na	-	221	нет	51
5	Ходжа-обигарм, куст скв.2	γC_{2-3}	2,15	93	0,5	HCO_3, Cl, Na	0,3	205	0,88	234
6	Явроз, скв.9	γ-$\gamma\delta C_3$	1,6	42	2,3	Cl, Na, Ca	1,5	40	21	107
7	Явроз, скв.2н	γ-$\gamma\delta C_3$	0,21	45,5	0,8	Cl, Na, Ca	0,7	53	0,46	32,5
8	Явроз, скв.3	γ-$\gamma\delta C_3$	0,28	34	1,8	Cl, Na, Ca	0,7	62	12,6	36,2
9	Джавони	γ_1+$\gamma\delta_1 C_3$	1,0	39,5	0,5	SO_4, Cl, Na	0,5	75	18,4	15,6
10	Обигарм, скв.12	$\gamma_3 C_3$	2,18	41,7	0,7	SO_4, Cl, Na, Ca	-	54	0,05	14,6
11	Обигарм, скв.4х	Q_{II-III}	2,16	51	0,8	SO_4, Cl, Na, Ca	7,5	51	42	19,5

Южно-Гиссарский гидрогеологический массив представляет интерес для туристско-рекреационного комплекса Таджикистана в том плане, что здесь расположены детально исследованные месторождения термоминеральных вод на базе которых функционируют одноименные курорты республиканского значения – Ходжаобигарм и Обигарм, и на базе месторождения Явроз - водолечебницы «Зайрон» и «Шифои Ромит» (карта минеральных вод Таджикистана).


КАРТА
МИНЕРАЛЬНЫЕ ВОДЫ ТАДЖИКИСТАНА
2013г.
Составил: Б.Х.Разыков
УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ
Строительство/ реконструкция водолечебницы, цеха розлива, теплицы
Горячие (>37°С) воды
Тёплые (20—37°С) воды
Холодные (<20°С) воды
Устройство питьевого бювета, объект эко/спортивного туризма, доизучение
Горячие (>37°С) воды
Тёплые (20—37°С) воды
Холодные (<20°С) воды
5290 Абс. высота над ур. моря
Пенджикент
Айни
Матча
Истаравшан
Ганчи
Хаитаг
Спитамен
Зафарабад
Бустон
Ашт
Таболгар
Худжанд
Чашма
Канибадам
Исфара
Шураб
Оби-гарм
Кайраккум
Дж.Расулов
Обигарм
Нуробод
Джаванон
Рудаки
Гульдара
Файзабад
Турсунзаде
Душанбе
Бустон
Рогун
Яван
Вахш
Курган-Тюбе
Бохтар
Джами
Дангара
Кулоб
Тебошар
Восе
Хамадани
Фархор
Кубадиан
Шаартуз
Кумсангир
Пянджикент
Колхозабад
Кызыл-гумбаз
Джиликуль
Ховалинг
Мумининабад
Темурмалик
Кызылсу
Вахдат
Южная Курганча
Хуросон
Шурбулак
Бабатаг
Дигмытау
Ленгар
Ленинабад
Комсомольское
Шамбарыбай
Алмасай
Ораджинабад
Тумбулак
Андижан
Южный Дегмаймуд
Вешгентау
Таналгин
Южный Каратау
Кызылсу
Ханака
Дарваз
Грин
Ванч
Зоог
Рушан
Хорог
Андероб
Гарм чашма
Нисур
Ризак
Токуз булак
Джиликалы
Сасык булак
Кошезек
Сасык-куль
Яшиль-куль
Бостыр
Джиу-шангоз
Хуит
Хогуни
Шахдара
Барпшор
Авдж
Ишкашим
Зерев
Вранг
Ямчун
Инев
Ургут
Даршай
Ширгин
Ляшгар
Харгуш
Настар
Мургаб
Улису
Акгони
Кызыл-рабат
Бахмыр
Пиндиты-гумбез
Хайдолы
3769
2914
2997
2070
1624
1227
4483
5509
5290
5539
5145
4634
4262
5489
4191
4080
4643
4674
3950
3685
3877
4469
5900
6289
6613
7134
4604
6030
5446
5703
4275
7496
6601
5744
5754
5251
5435
5409
6974
5721
5085
5895
6233
4975
5060
5089
5989
5879
5440
5522
4862
6132
5850
5144
5645
4733
6083
5684
5518
5093
3194
4664
5488
5160
5558
5564
5247
5444
5564
4635
6723
4935
3679
1791
1636
68°
69°
70°
71°
72°
73°
74°
75°
40° 30'
39° 30
38° 30
38° 0
37° 0
-25
0
100 km

Для Южно-Гиссарского гидрогеологического массива характерно широкое распространение кремнистых терм. В качестве одиночных выходов отмечены радоновые воды и воды без «специфических» компонентов (см. табл. 2).

Лечебные минеральные воды без «специфических» компонентов выявлены в результате поисковых работ в долине реки Каратаг (Воронин, 1977). Это трещинно-пластовые подземные воды, приуроченные к мезозойским осадочным породам, залегающим на складчатом палеозойском фундаменте. В отложениях альба (скважина 2п) и верхней юры (скважина 4п) вскрыты напорные самоизливающие воды. Глубина вскрытия подземных вод составляет 300-310 м. Величина избыточного давления 5-28 атм. Дебит скважин при самоизливе 0,25-0,85 л/с. Состав лечебных минеральных вод сульфатный натриево-кальциевый в отложениях альба, и сульфатный кальциево-магниевый в отложениях верхней юры, минерализация - 3,1-4,0 г/л.

Вода скв.2п является аналогом воды Московская (Московская область РФ). Использование минеральной воды скв.2п нецелесообразно из-за ее низкого дебита. Вода скв.4п является аналогом источника Краинка (Тульская область РФ). Минеральную воду скв.4п без «специфических» компонентов и свойств можно использовать при болезнях органов пищеварения, движения, гинекологических и урологических. В качестве лечебно-столовой вода скв.4п без «специфических» компонентов и свойств показана по лечебному (внутреннему) применению при болезнях вне фазы обострения. В настоящее время вода Каратаг не разливается и население близлежащих кишлаков и туристы зон отдыха долины р. Каратаг используют их в качестве лечебно-столовых. На скважине 4п в перспективе можно построить водолечебницу на 100 процедур в сутки [3].

Радоновые воды выявлены в долине реки Варзоб на участке Бегар. Трещинно-жильные подземные воды приурочены к тектоническому разлому с рудной минерализацией. В процессе горно-проходческих работ вскрыт приток подземных вод с дебитом 0,05 л/с. Минерализация вод 0,3 г/л, состав гидрокарбонатный кальциевый. Для трещинно-жильных вод участка характерна высокая концентрация радона - 452,9 эман (см. табл. 2).

Радоновая вода Бегар является аналогом воды Хмельник (Винницкая область, Украина). Показаниями к применению радоновой воды Бегар служат болезни органов движения [3]. В связи с незначительным дебитом использование воды участка Бегар в целях бальнеолечения в настоящее время нецелесообразно, но, учитывая близость участка Бегар от г. Душанбе и благоприятные природно-климатические условия, здесь перспективна постановка поисково-разведочных работ на радоновые лечебные минеральные воды.

Кремнистые термы в пределах гидрогеологического массива широко известны. Это месторождения Ходжаобигарм, Явроз, Обигарм, источник Джавони. Имеются данные о наличии азотных термальных вод в верхней части долины р. Каратаг. Лечебные минеральные воды этих участков относятся к трещинно-жильным водонапорным системам, развитых в гранитоидах Гиссарского плутона.

Месторождение Ходжаобигарм расположено в верхней части долины р. Варзоб в 52 км к северу от г. Душанбе. Выходы азотных терм контролируются зоной Гушаринского (Ходжаобигармского) разлома субширотного простирания.

До производства разведочных работ в пределах месторождения вся разгрузка подземных вод происходила вдоль «термального склона». На октябрь месяц 1947 г. там было зафиксировано до 60 источников с температурой от 30 до 90^0С и суммарным дебитом около 4 л/с. В результате разведочных работ, проведенных с 1954 по 1957 год экспедицией «Таджикгеоминвод» почти весь поток подземных вод был каптирован восемью пробуренными скважинами. Суммарный дебит всех скважин составлял 7,32 л/с, температура 62-98^0С. По химическому составу воды гидрокарбонатно-хлоридные натриевые, минерализация 0,5-0,6 г/л.

Гидрогеологические исследования, проведенные в 1964-1967 годах, показали, что трещины Гушаринского разлома большей частью закрытые и лишь опущенный и несколько задвинутый к югу блок с «термальным склоном» характеризуется наличием открытой трещиноватости. Водовыводящий разлом вертикальный. В приповерхностной части, где происходит «вскипание» вод за счет перепада давлений, образуется пар с температурой 96-98^0С. Пар содержит бальнеологически активные элементы и используется в пароэманатории. В азотных термальных водах месторождения Ходжаобигарм содержится 205-221 мг/л кремнекислоты, до 234 эман радона, а также фтор.

По данным разведочных работ по месторождению ГКЗ СССР утверждены эксплуатационные запасы лечебных минеральных вод по категории А - 9,7 л/с, по категории В - 0,8 л/с, по категории $С_1$ - 2,7 л/с (протокол ГКЗ за № 5314 от 22 декабря 1967 г.). На базе лечебных минеральных вод месторождения Ходжаобигарм функционирует курорт республиканского значения.

Кремнистые термы Ходжаобигарм являются аналогом термальных вод Кульдур (Хабаровский край РФ). Показаниями к применению кремнистых терм Ходжаобигарм служат болезни органов движения, нервной системы, органов дыхания, гинекологические, кожи и системы кровообращения. Необходимо отметить, что аналогичные по физико-химическому составу минеральные воды пользуются особой популярностью в Японии. Современные достижения

геронтологии в стране Восходящего Солнца напрямую связывают с регулярным использованием высокотемпературных кремнистых терм. В перспективе можно увеличить емкость курорта Ходжаобигарм до 1000 мест круглогодично [3].

Месторождение лечебных минеральных вод Явроз расположено в пределах верхней части долины реки Кафирниган. Первоначально, до производства разведочных работ, разгрузка подземных вод происходила в пойме р.Кафирниган на правом борту. В 1958-1962 годах по результатам разведочных работ произведена оценка эксплуатационных запасов. В геоструктурном отношении месторождение Явроз приурочено к зоне сочленения Тугундукского и Безымянного разломов. Водовыводящей дислокацией является зона Тугундукского разлома. Безымянный разлом является подчиненным, магазинирующим лечебные минеральные воды. Азимут простирания Безымянного разлома в восточной части месторождения 75^0, а в западной - 45^0. Падение зоны разлома происходит на север под углом 45^0. Мощность зоны разлома достигает 230 м. Эффективная мощность - 50,0-116,0 м. В восточной части месторождения установлено наличие асимметричного гидродинамического купола, приуроченного к зоне пересечения Тугундукского разлома с Безымянным.

Состав вод месторождения хлоридный натриево-кальциевый, минерализация 0,3-2,3 г/л. Бальнеологическая ценность вод определяется повышенным содержанием кремнекислоты (62 мг/л) и радона (107 эман). Более высокая минерализация вод характерна для сводовой части гидродинамического купола. Величина эксплуатационных запасов по месторождению, утвержденных ГКЗ СССР (протокол № 3868 от 22 декабря 1962 г.) составляет по категории А - 3,0 л/с, по категории В - 7,3 л/с), по категории C_1 - 20,0 л/с. В настоящее время лечебные минеральные воды месторождения Явроз используются в бальнеологических целях водолечебницами ООО «Зайрон» и ООО «Шифои Ромит».

Хлоридная кальциево-натриевая очень слаборадоновая вода является аналогом воды Красноусольская (Республика Башкортостан РФ) и показана к применению при болезнях органов пищеварения, движения, нервной системы, гинекологических и кожи [3].

Месторождение лечебных минеральных вод Обигарм расположено в центральной части бассейна р. Обигарм, в пределах одноименной котловины. Первые детальные гидрогеологические работы по изучению и разведке лечебных минеральных вод были проведены в 1954-1957 годах экспедицией «Таджикгеоминвод». В процессе этих работ скважинами были вскрыты самоизливающиеся воды с температурой 39-53^0С. ГКЗ СССР протоколом №

2047 от 14 ноября 1957 года утверждены эксплуатационные запасы лечебных минеральных вод по категориям: A_2 - 53,2 л/с, В - 8,0 л/с, C_1 - 0,8 л/с.

По результатам специальных гидрогеологических работ с целью выявления влияния водохранилища проектируемой Рогунской ГЭС на минеральные воды месторождения Обигарм установлено, что гидрогеологические особенности Обигармской котловины обусловлены наличием двух потоков подземных вод: горизонтального потока пресных холодных вод в четвертичных отложениях и вертикального потока минеральных вод с температурой 53-55^{0}С из трещинно-жильной водонапорной системы в гранитах палеозоя. Внедрение сосредоточенного потока минеральных вод приводит к формированию в разрезе четвертичных отложений устойчивого во времени гидродинамического купола. Состав лечебных минеральных вод сульфатно-хлоридный натриево-кальциевый, минерализация 0,7-1,0 г/л. Из терапевтически активных компонентов в водах содержится кремнекислота (69 мг/л), фтор и радон. На базе лечебных минеральных вод месторождения действует курорт республиканского значения ЗАО «Курорт Обигарм».

Кремнистые термы Обигарм являются аналогом термальных вод Паратунка (Камчатская область РФ). Показаниями к применению терм Обигарм служат болезни органов движения, нервной системы, гинекологические, системы кожи и кровообращения. В перспективе можно увеличить емкость республиканского курорта Оби-Гарм до 200 мест зимой и 300 мест летом, осуществить теплофикацию поселка Обигарм и организовать тепличное хозяйство.

Источник Джавони расположен северо-западнее месторождения Обигарм. Выход азотных терм приурочен к трещинно-жильной водонапорной системе в гранитах палеозоя. По химическому составу и содержанию микроэлементов воды этой термы являются аналогами вод Абастумани (Республика Грузия) и показаны к применению при болезнях органов движения и системы кровообращения. Источник может войти в общий комплекс курорта Обигарм.

Литература

1. Иванов В.В. Классификация подземных минеральных вод / В.В. Иванов, Г.А. Невраев // – М.: Недра, 1964. − 167 с.
2. Посохов Е.В. Минеральные воды (Лечебные, промышленные, энергетические) / Е.В.Посохов, Н.И. Толстихин // Л.: Недра, 1977. − 240 с.
3. Разыков Б.Х. Особенности размещения и экономическая оценка минеральных вод Таджикистана // Душанбе, 2007. – 99 с.

ОМӮЗИШИ ГЕОЛОГИЯИ ОБИИ МАНБАЪҲОИ ОБҲОИ МАЪДАНИИ ШИФОБАХШИ КӮҲҲОИ ҲИСОРИ-ҶАНУБӢ

Розиқов Б.Х.

Донишгоҳи славянии Русияву Тоҷикистон

Дар мақолаи мазкур, ҳалли масъалаҳои таҳқиқоти гидрогелогии манбаъҳои оби маъданиноки шифобахши гидрогеологи Ҳисори-Ҷанубӣ, бо мақсади истифодаи минбаъдаи онҳо барои истифодаи табобат, ба воситаи обҳои шифобахши минералӣ муҳокима карда мешаванд.

Калидвожаҳо: *гурӯҳи балнеологӣ, сарчашмаи гидргеологӣ, таркиби ионҳо, сарчашмаи обҳои маъданиноки табобатӣ, минерализатсияи обҳо, обҳои гарм.*

HYDROGEOLOGICAL STUDY OF SOURCES OF MEDICINAL MINERAL WATERS OF THE SOUTHERN GISSAR HYDROGEOLOGICAL MASSIF

Razykov B.Kh.

Russian-Tajik (Slavonic) university

In this article are considered questions of hydrogeological study of sources of medicinal mineral waters of the Southern Gissar hydrogeological massif for the purpose of their further use for balneological treatment.

Keywords: *balneological group, hydrogeological massif, ionic structure, field of medicinal mineral waters, water mineralization, thermal waters.*

Сведения об авторе. **Б.Х. Разыков** - доцент кафедры «Менеджмент и туризм» Российско-Таджикского (Славянского) университета. Телефон: 919-13-23-34. E-mail: razykov@bk.ru

УДК 549.02, 549.08

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРИРОДНЫХ ОБРАЗЦОВ БИРЮЗЫ МЕСТОРОЖДЕНИЯ БИРЮЗАКАН И ЕЕ ИМИТАЦИЙ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ В МАГАЗИНАХ САМОЦВЕТНОГО СЫРЬЯ Г. ДУШАНБЕ

Еремина Е.Н., Салихов Ф.С., Боровикова Е.Ю., Кирюхина Г.В.

МГУ имени М.В. Ломоносова

Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе

Проведен сравнительный анализ природных образцов бирюзы из месторождения Бирюзакан (Таджикистан) и изделий, продаваемых под названием «бирюза» в многочисленных магазинах самоцветов г. Душанбе («Шелковый путь», ЦУМ и др.).

Методом рентгеновской порошковой дифракции и ИК-спектроскопии показано, что представленные в магазинах образцы не являются бирюзой, а представляют собой облагороженный и окрашенный «под бирюзу» магнезит $Mg(CO_3)$.

Ключевые слова: *бирюза природная, бирюза синтетическая, имитации бирюзы, магнезит, турквенит, ИК-спектроскопия, рентгенофазовый анализ.*

Введение. Минерал бирюза - гидратированный фосфат меди и алюминия красивого голубого и зеленого цвета с матовым блеском. Ее обобщенная химическая формула $CuAl_6[PO_4]_4(OH)_8\times4H_2O$. Вследствие ее высокой пористости плотность минерала непостоянная: 2,6-2,8, твердость колеблется от 5 до 6 по шкале Мооса [*Минчинская*, 1989]. Бирюза встречается в виде скрытокристаллических агрегатов, прожилков, корочек, сплошных масс и почковидных натечных образований. Название минерала происходит от персидского слова «фируза», что означает победоносный, дающий счастье. С древних времен бирюза считается одним из драгоценных камней; природные образцы ювелирного качества достаточно редки и высоко ценятся. Бирюза распространена на Земле довольно широко. Главные месторождения находятся в Иране, США, Китае и на Синайском полуострове. Известны также месторождения бирюзы в Афганистане, Польше, Чили, Эфиопии, Великобритании, Перу и в Монголии. А на территории бывшего СССР своими бирюзовыми месторождениями знаменит Таджикистан. Только в Северном Таджикистане зарегистрированы 6 месторождений бирюзы: Бирюзакан, Шарбулак, Карамазар, Кызылташ, Исфара и Самаркандак.

В силу редкости и неустойчивости природных образцов бирюзы и истощенности большинства мировых месторождений по сырью ювелирного качества на рынке представлены многочисленные облагороженные, укрепленные, прессованные, окрашенные имитации бирюзы, называемые турквенитом, сделанные из природных минералов (магнезит, говлит, одонтолит, варисцит, хризоколла и т.д.), а также синтетические имитации, включая пластиковые.

Целью настоящего исследования являлось проведение сравнительного анализа двумя независимыми экспериментальными методами образцов природной не облагороженной бирюзы месторождения Бирюзакан и предположительно имитации, продаваемой под названием «бирюза» во многих точках продаж самоцветов г. Душанбе.

Образцы, использованные для анализа. Для сравнительного исследования были отобраны два образца, представленные на рис. 1. Природный образец из месторождения Бирюказан был добыт из жилы брекчированного кварца, выполняющей Бирюзовый разлом, проходящий в

гранитоидах на контакте последних с эффузивными породами верхнего палеозоя. Образец, использованный для сравнения, был приобретен в магазине «Шелковый путь» (Душанбе, ул. Шотемура, 32). Как видно из рисунка 1, он обладает более насыщенным цветом, чем природный образец; его окраска более яркая и равномерная, что дает основание предполагать в данном случае природную или синтетическую имитацию.

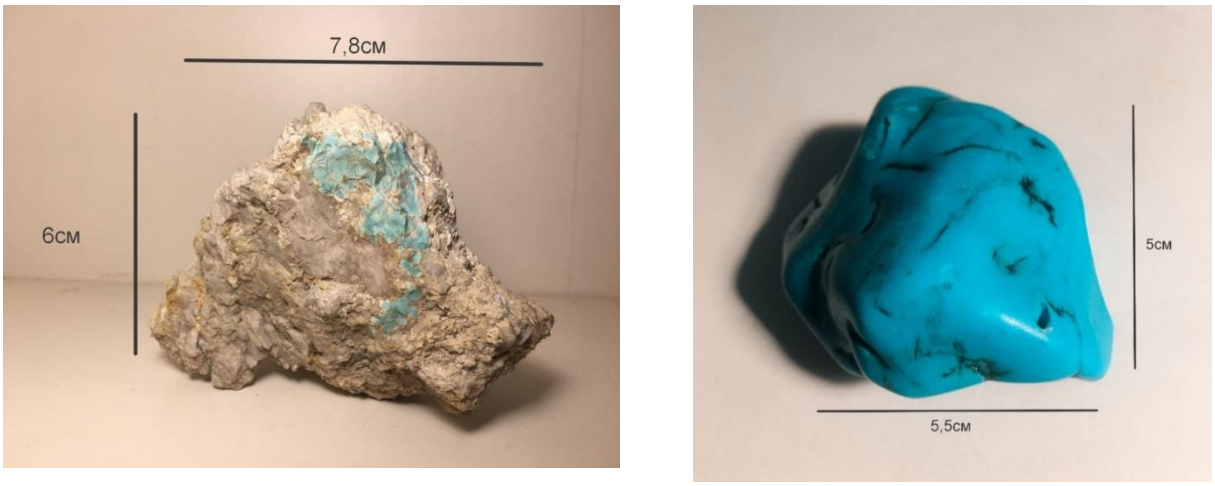


Рис. 1. Образцы, использованные для сравнительного анализа: слева природная бирюза месторождения Бирюзакан, справа – «бирюза», представленная в магазинах самоцветов.

Инфракрасная спектроскопия. Исследования образцов методом инфракрасной спектроскопии осуществлялись на ИК Фурье-спектрометре ФСМ-1201 в диапазоне волновых чисел 4000 - 400 $см^{-1}$ со спектральным разрешением ~ 2 $см^{-1}$. Небольшое количество образца измельчалось в вазелиновом масле, полученный порошок наносился тонким слоем на пластинку из KBr .

По результатам исследования природного образца было подтверждено, что его спектр (рис. 2) соответствует спектру бирюзы; были выявлены основные характеристические колебания структуры бирюзы [*Cˇejka*, 2015], пронумерованные на рисунке:

1) валентные колебания гидроксила (O-H);
2) валентные колебание O-H связей молекулы воды;
3) деформационное колебание молекулы H_2O;
4) валентные асимметричные колебания PO_4-тетраэдра;
5) валентные симметричные колебания PO_4-тетраэдра;
6) деформационные колебания Al-OH/Cu-OH;
7) вращательные колебания молекул H_2O;
8) деформационные асимметричные колебания PO_4^{3-} ионов, колебания Al - O и Cu -O связей;
9) деформационные симметричные колебания PO_4^{3-} ионов, колебания Cu-O связей.

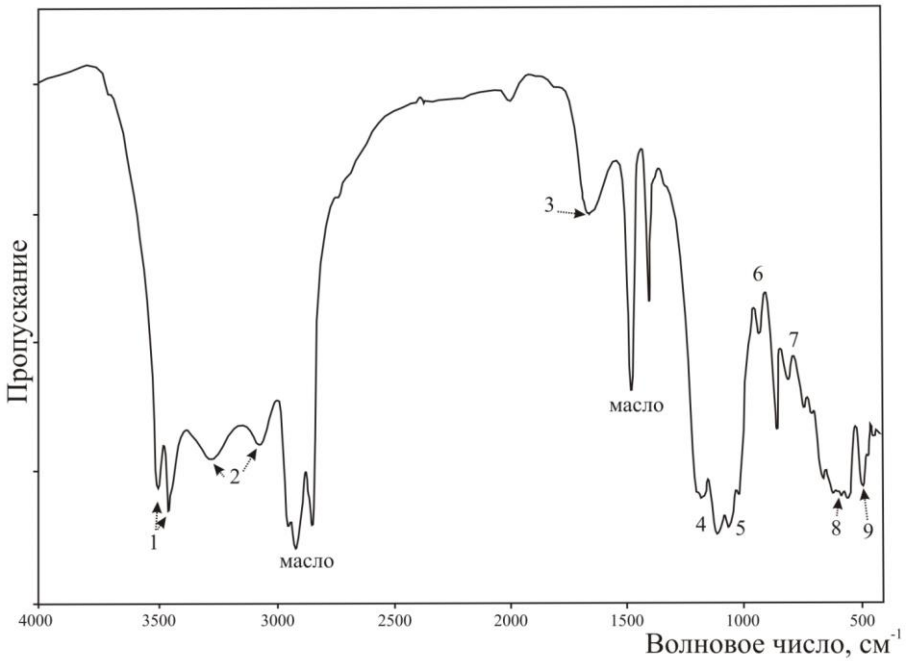


Рис. 2. Спектр природного образца бирюзы. Характеристические колебания пронумерованы в тексте.

Расшифровка ИК-спектра «бирюзы» из магазина самоцветов, показала отсутствие полос всех этих вышеперечисленных характеристических колебаний (рис. 3). Вместо этого в спектре присутствует широкая полоса (1) с максимумом ~ 1458 $см^{-1}$, соответствующая валентным асимметричным колебаниям треугольных групп CO_3 [*Плюснина*, 1976]. Спектральная картина является характерной для минерала магнезита (*Jones*, 2012)

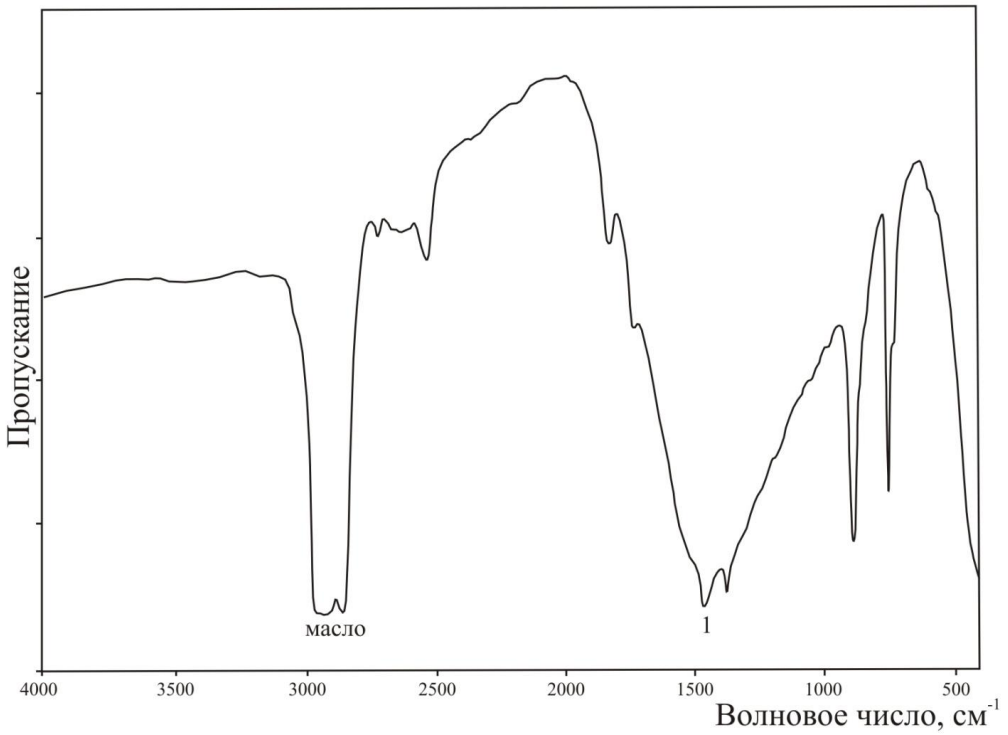


Рис. 3. Спектр «бирюзы» из магазина самоцветов. 1 – валентные асимметричные колебания CO_3-треугольника (1458 $см^{-1}$).

Порошковая рентгенография. Рентгенофазовый анализ образцов проводился в лаборатории кристаллохимии и рентгеноструктурного анализа кафедры кристаллографии и кристаллохимии Геологического факультета МГУ. Кристаллы природной бирюзы и «бирюзы» из магазина самоцветов растирались в корундовой ступке до состояния мелкозернистого порошка и с помощью ацетона наносились на кювету. Оба образца были сняты на порошковом автоматическом рентгеновском дифрактометре АДП-2 (Co-излучение, Fe-фильтр, 35 кВ, 25мА, шаг по углу 0.02°). Полученные спектры показаны на рисунках 4 и 5, из которых видно, что первый образец представляет собой бирюзу, поскольку все значительные пики экспериментальной дифрактограммы (показанные синим цветом) совпадают с пиками образца бирюзы $CuAl_6[PO_4]_4(OH)_8{\times}4H_2O$ [4] из порошковой базы данных ((показаны красным цветом).

Спектр второго образца купленной «бирюзы» совпадает по всем пикам со спектром магнезита $MgCO_3$ [5]. Таким образом, данные рентгенофазового анализа однозначно свидетельствуют о том, что образец, купленный в магазине самоцветов, является не бирюзой, а магнезитом.

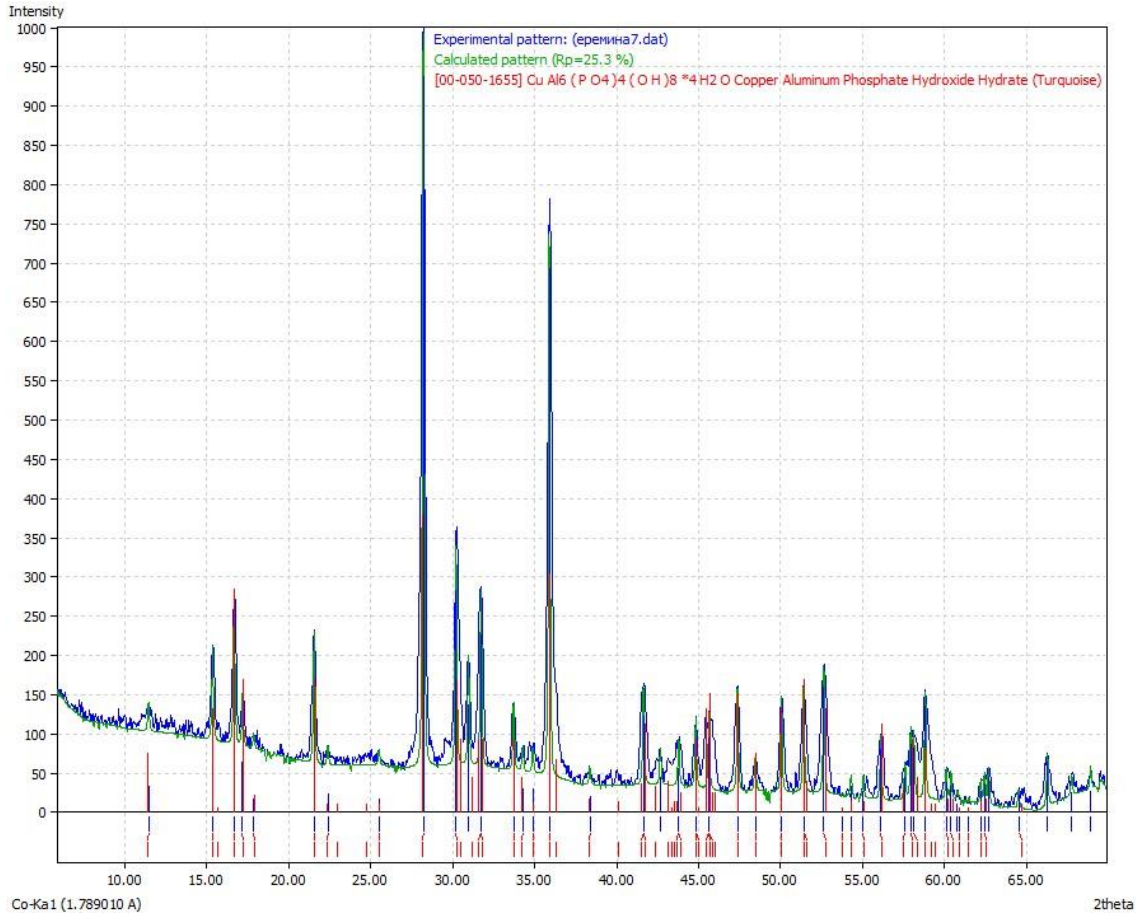


Рис. 4. Порошковая дифрактограмма природного образца бирюзы.

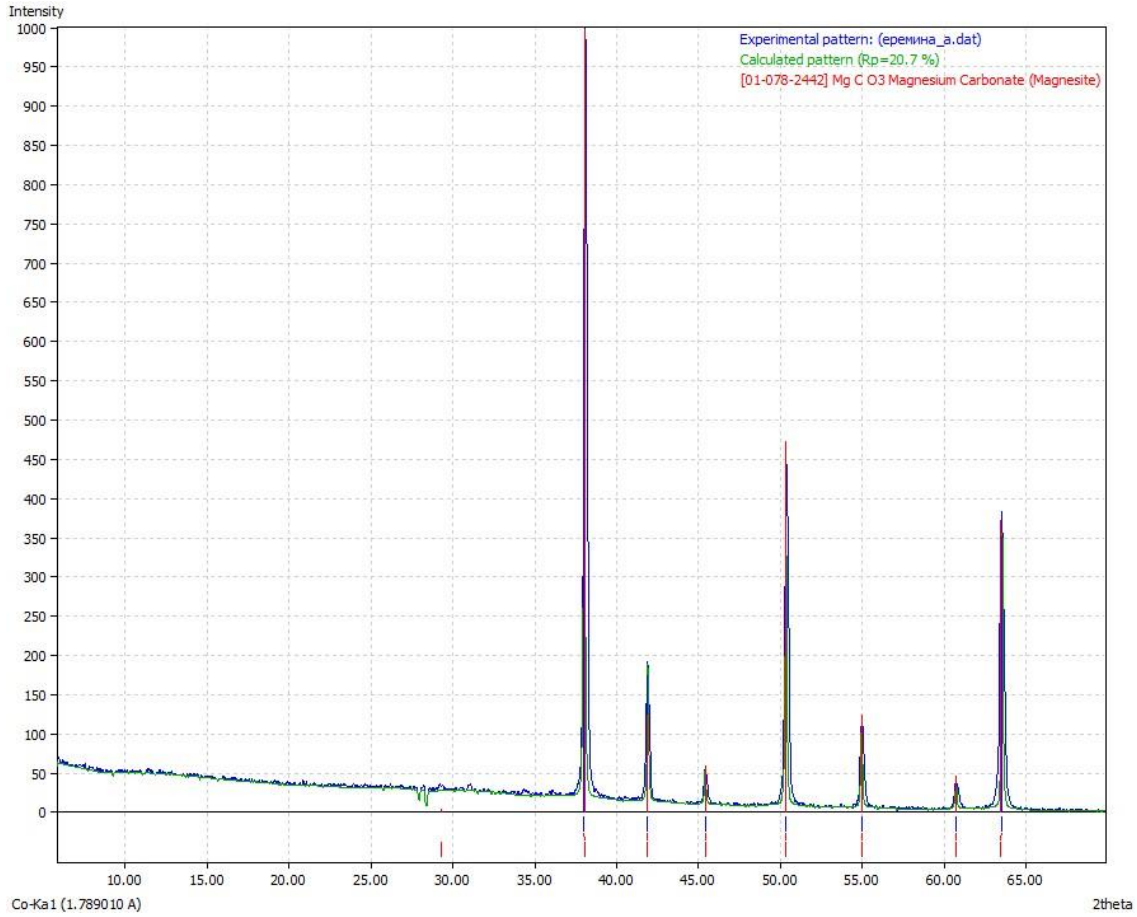


Рис. 5. Порошковая дифрактограмма «бирюзы» из магазина самоцветов.

Выводы

1. Методами инфракрасной спектроскопии и рентгеновской порошковой дифракции проведен сравнительный анализ природного образца бирюзы из месторождения Бирюзакан (Таджикистан) и образца, продаваемого в магазинах самоцветов г. Душанбе под тем же названием.

2. Два независимых экспериментальных метода установили подлинность природного образца бирюзы.

3. ИК и рентгеновские спектры образца из магазина самоцветов показали, что он является облагороженным и окрашенным в синий цвет магнезитом (турквенитом).

Литература

1. Менчинская Т.И. «Бирюза» // М.: «Недра», 1989. −222 с.
2. C˘ejka J. Raman and infrared spectroscopic study of turquoise minerals. / J.C˘ejka, J.Sejkora, I.Macek, R.Malikova, L.Wang, R. Scholz, R.L. Frost // Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy. − 149 (2015). − PP. 173–182.
3. Плюснина И.И. Инфракрасные спектры минералов // М.: Изд-во МГУ, 1976.−175с.

4. Jones G.C. Infrared Transmission Spectra of Carbonate Minerals / G.G.Jones, B Jackson // Springer Science & Business Media. − 2012. − 239 pages.
5. Foord E.E. A reexamination of the turquoise group: the mineral aheylite, planerite (redefined), turquoise and coeruleolactite / E.E. Foord, J.E. Jr.Taggart // Mineral. Magaz. − 1998.−V. 62(1). − PP. 93–111.
6. Göttlicher S. Electron-density distribution in magnesite (MgCO3) / S Göttlicher, A.Vegas // Acta Cryst. − 1988 − V. 44. − PP. 362–367.

ТАҲЛИЛИ МУҚОИСАВИИ НАМУНАҲОИ ФИРУЗАИ ТАБИИИ КОНИ ФИРУЗАКОН ВА ФИРУЗАИ ҚАЛБАКӢ АЗ МАҒОЗАҲОИ САНГҲОИ ОРОИШИИ Ш.ДУШАНБЕ

Еремина Е.Н., Солиҳов Ф.С., Боровикова Е.Ю., Кирюхина Г.В.
ДДМ ба номи М.В. Ломоносов
Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар ш. Душанбе

Таҳлили муқоисавии намунаҳои фирузаи табиӣ аз кони Фирузакон (Тоҷикистон) ва маснуоте, ки таҳти унвони "фируза" дар мағозаҳои сангҳои ороишии ш. Душанбе ("Роҳи абрешим", МУМ ва ғайра) фурӯхта мешавад, гузаронида шуд. Бо истифодаи усули дифраксияи хокаи рентгенӣ ва ИК-спектроскопия тасдиқ карда шуд, ки маснуоти дар мағозаҳои сангҳои ороишии ш. Душанбе фурӯхташаванда фируза набуда, балки магнезити $Mg(CO_3)$ рангуборшуда мебошад.

Калидвожаҳо: *фирузаи табиӣ, фирузаи синтетикӣ, тақлиди фируза, магнезит, турквенит, ИК-спектроскопия, таҳлили рентгенфазовӣ.*

COMPARATIVE ANALYSIS OF TURQUOISE NATURAL SAMPLES FROM OF BIRYUZAKAN DEPOSIT OF BIRYUZAKAN AND ITS IMITATIONS FROM DUSHANBE JEWELRY STORES

Eremina E.N., Salixov F.S., Borovikova E.Yu., Kuruxina G.V.
Lomonosov Moscow State University Geological Faculty
Dushanbe branch of Lomonosov Moscow State University

A comparative analysis of natural samples of turquoise from the Biryuzakan deposit (Tajikistan) and products sold under the same in various jewelry stores of Dushanbe city (Silk Road, Central Department Store, etc.) was carried out. With the help of X-ray powder diffraction and IR spectroscopy, it was shown that the samples presented in these stores are not turquoise, but are ennobled and colored magnesite $Mg(CO_3)$.

Keywords: *natural turquoise, synthetic turquoise, imitations of turquoise, magnesite, turquenite, IR spectroscopy, X-ray phase analysis.*

***Сведения об авторах*. Еремина Евгения Николаевна** – студентка кафедры минералогии Геологического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва. E-mail: z_eremina@mail.ru

Салихов Фарид Салохиддинович – заведующий лабораторией геологии естественнонаучного факультета Филиала МГУ в Душанбе. E-mail: ffaarriidd@bk.ru

Боровикова Елена Юрьевна – старший научный сотрудник кафедры кристаллографии и кристаллохимии Геологического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва. E-mail: amurr@mail.ru

Кирюхина Галина Викторовна – младший научный сотрудник кафедры кристаллографии и кристаллохимии Геологического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва. E-mail: g-biralo@yandex.ru

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

В научном журнале «Вестник Филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе» печатаются статьи, содержащие результаты научных исследований по естественным, гуманитарным и экономическим наукам. При направлении статьи в редколлегию авторам необходимо соблюдать следующие правила: размер статьи не должен превышать 10 страниц компьютерного текста, включая текст, таблицы, библиографию, рисунки и тексты аннотаций на таджикском, русском и английском языках. Статья должна быть подготовлена в системе Microsoft Word, при этом одновременно с распечаткой статьи в 2-х экземплярах сдаются также соответствующие файлы (для каждой статьи на отдельном диске). Рукопись должна быть отпечатана на компьютере (шрифт Times New Roman 14, формат А4, интервал 1,5, поля: верхнее – 3 см, нижнее – 2,5 см, левое – 3 см, правое – 2см;). Все листы статьи должны быть пронумерованы.

Текст статьи должен быть изложен кратко, тщательно отредактирован и подписан всеми авторами с указанием их фамилий, имен и отчеств, номера телефонов. Каждый экземпляр должен содержать: текст статьи, список литературы, тексты резюме на русском, таджикском и английском языках. В каждом резюме после заголовка статьи приводится название учреждения (-ий), в котором (-ых) выполнена данная работа. После каждого резюме отдельной строкой перечисляются ключевые слова на этих языках.

В верхнем правом углу первой страницы рукописи указывается раздел науки, которому соответствует статья, строкой ниже в левом углу страницы указывается индекс статьи по универсальной десятичной классификации (УДК). В центре следующей строки – инициалы и фамилия автора (-ов). Ниже приводится название статьи, затем указывается название организации. Ниже – краткая аннотация (на языке, на котором написана статья) с указанием конкретных результатов работы и вытекающих из них выводов, а также ключевые слова, наиболее полно отражающие область исследования и полученные в работе результаты (до 10 слов) через тире и адрес для корреспонденции (почтовый и электронный). Далее через строку следует основной текст. Сразу после текста статьи приводится список литературы (не более 10 названий) под заголовком «**Литература**» в порядке упоминания, тексты аннотаций и ключевые слова (например, на таджикском и английском языках, если статья написана на русском языке). Ссылки на цитируемую литературу даются в квадратных скобках, например [1].

Список литературы оформляется следующим образом: для книг – фамилия и инициалы автора (-ов), полное название книги, место издания, издательство, год издания, том или выпуск, общее количество страниц. Для периодических изданий – фамилия и инициалы автора (-ов), название статьи, год издания, том, номер, первая и последняя страницы статьи.

Формулы и символы должны быть напечатаны на компьютере в одном стиле. Написание математических формул в виде рисунков не допускается. Следует избегать громоздких обозначений. Занумерованные формулы пишутся с красной строки, номер формулы в круглых скобках ставится у правого края. Нумеруются лишь те формулы, на которые имеются ссылки.

Сокращения должны быть расшифрованы, за исключением общепринятых.

В десятичных дробях после целой части числа ставится точка.

При упоминании в тексте иностранных фамилий в скобках необходимо давать их оригинальное написание.

Первое упоминание в статье названия вида животного или растения приводится по-русски и по латыни.

В тексте необходимо дать ссылки на все приводимые таблицы, рисунки и фотографии.

Научные статьи, представленные в редакцию журнала, должны иметь направление учреждения, в котором выполнялась данная работа, и экспертное заключение о возможности опубликования. При выполнении работы в нескольких учреждениях представляются направления из каждого учреждения. К статье должна быть приложена заверенная рецензия специалиста.

Редколлегия оставляет за собой право производить сокращения и редакционные изменения статьи. Статьи, не отвечающие настоящим правилам, редколлегией не принимаются.

ПОРЯДОК РЕЦЕНЗИРОВАНИЯ НАУЧНЫХ СТАТЕЙ, ПРЕДСТАВЛЯЕМЫХ В ЖУРНАЛ «ВЕСТНИК ФИЛИАЛА МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В ГОРОДЕ ДУШАНБЕ»

Статьи, поступающие в редакцию, проходят предварительную экспертизу (проводится членами редколлегии – специалистами по соответствующей отрасли науки) и принимаются в установленном порядке. Требования к оформлению оригинала статей приводятся в каждом номере журнала.

Если рукопись принята, то редакция сообщает автору замечания по содержанию и оформлению статьи, которые необходимо устранить до передачи текста на рецензирование.

Затем статьи рецензируются в обязательном порядке членами редколлегии журнала или экспертами соответствующей специальности (кандидатами и докторами наук).

Рецензия должна содержать обоснованное перечисление качеств статьи, в том числе научную новизну проблемы, её актуальность, фактологическую и историческую ценность, точность цитирования, стиль изложения, использование современных источников, а также мотивированное перечисление её недостатков. В заключении дается общая оценка статьи и рекомендации для редколлегии – опубликовать статью, опубликовать её после доработки, направить на дополнительную рецензию специалисту по определенной тематике или отклонить. Объем рецензии - не менее одной страницы текста. Статья, принятая к публикации, но нуждающаяся в доработке, направляется авторам с замечаниями рецензента и редактора. Авторы должны внести все необходимые исправления в окончательный вариант рукописи и вернуть в редакцию исправленный текст, а также его идентичный электронный вариант вместе с первоначальным вариантом рукописи. После доработки статья повторно рецензируется, и редколлегия принимает решение о ее публикации. Статья считается принятой к публикации при наличии положительной рецензии и если её поддержали члены редколлегии. Порядок и очередность публикации статьи определяется в зависимости от даты поступления её окончательного варианта. Рецензирование рукописи осуществляется конфиденциально. Разглашение конфиденциальных деталей рецензирования рукописи нарушает права автора. Рецензентам не разрешается снимать копии статей для своих нужд. Рецензенты, а также члены редколлегии не имеют права использовать в собственных интересах информацию, содержащуюся в рукописи, до её опубликования.

Ответственный редактор: Абдукаримов М.Ф.

Технический редактор: Рахмет-Заде Т.Н.

Муҳаррири масъул: Абдукаримов М.Ф.

Муҳаррири техникӣ: Рахмет-Заде Т.Н.

Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова, 734003, г. Душанбе, ул. Бохтар, 35/1, тел.: +992 (37) 221-99-41, 221-99-04, E-mail: info@msu.tj, сайт: http://www.msu.tj

Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов, 734003, ш. Душанбе, кӯч. Бохтар, 35/1, тел.: +992 (37) 221-99-41, 221-99-04, E-mail: info@msu.tj, сайт: http://www.msu.tj

Подписано в печать 06.06.2019г.
Заказ 180. Тираж 100 экз.
Отпечатано в издательско-типографическом секторе Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе
г. Душанбе, ул. Бохтар, 35/1