ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В Г. ДУШАНБЕ

ФИЛИАЛИ ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ МОСКВА БА НОМИ М.В. ЛОМОНОСОВ ДАР Ш. ДУШАНБЕ

В Е С Т Н И К

ФИЛИАЛА МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В Г. ДУШАНБЕ

(научный журнал)

СЕРИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

1(1) 2017

П А Ё М И

ФИЛИАЛИ ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ МОСКВА БА НОМИ М.В. ЛОМОНОСОВ ДАР Ш. ДУШАНБЕ

(маҷаллаи илмӣ)

БАХШИ ИЛМҲОИ ТАБИӢ

ДУШАНБЕ

ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В Г. ДУШАНБЕ

ФИЛИАЛИ ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ МОСКВА БА НОМИ М.В. ЛОМОНОСОВ ДАР Ш. ДУШАНБЕ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ОСНОВАН В 2016 ГОДУ. МАҶАЛЛАИ ИЛМӢ СОЛИ 2016 ТАЪСИС ЁФТААСТ.

В журнале статьи печатаются на русском, таджикском и английском языках.
Дар маҷалла мақолаҳо бо забонҳои русӣ, тоҷикӣ ва англисӣ нашр мешаванд.

Уважаемые коллеги!

Представляем вашему вниманию первый номер нового издания нашего филиала — журнал «Вестник Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе». Название журнала выбрано не случайно, так как уже существует «Вестник МГУ», по примеру которого и мы решили выпустить свой журнал. Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе по праву стал учредителем данного издания. Сегодня МГУ имени М.В. Ломоносова - это один из ведущих российских вузов, а его филиал в городе Душанбе является одним из лучших в Таджикистане, в котором создана полноценная инфраструктура для учебы, выполнения научно-исследовательских работ и реализации инновационных проектов. В Филиале МГУ успешно действуют Лаборатории по химии, физики, геологии и научно-производственный технопарк.

Огромное внимание в нашем филиале уделяется развитию международного сотрудничества. Наши постоянные партнёры в инновационной сфере — Академия наук РТ, Таджикский национальный университет, РТСУ и другие научные учреждения Республики Таджикистан.

В филиале МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Душанбе наука развивается день за днем. Проведение Республиканских и Международных конференций, написание научных проектов, организация технологического парка, проведение еженедельного теоретического научного семинара, участие студентов в олимпиадах и конкурсах различного уровня и многое другое подтверждает наши слова. Однако мы считаем, что организация Вестника является основным достижением филиала в годы его существования.

Журнал «Вестник филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Душанбе» состоит из двух серий - серия естественных и серия гуманитарных наук, каждая из которых выпускается два раза в течение года.

Уверен, что наш журнал станет заметным периодическим научным изданием в области освещения научных и инновационных разработок, а также инструментом для решения научно-теоретических и научно-практических задач, направленных на совершенствование главного критерия — повышения качества жизни человека.

Пользуясь случаем, хочу поздравить всех сотрудников филиала в связи с выпуском первого номера научного журнала «Вестник филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Душанбе», пожелать удачи и успехов в работе редакционного коллектива.

Главный редактор, Исполнительный директор
филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Душанбе,
к.ф.-м.н., доцент Мирзоев С.Х.

СОДЕРЖАНИЕ - МУНДАРИҶА

М А Т Е М А Т И К А И И Н Ф О Р М А Т И К А

Ф И З И К А И Т Е Х Н И К А

Х И М И Я И Г Е О Л О Г И Я

УДК 517.958

К ТЕОРИИ ГРАНИЧНОГО УСРЕДНЕНИЯ[1]

Чечкин Г.А.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

В работе мы рассматриваем различные задачи граничного усреднения. Для исходных задач с малым параметром строим предельные (усреднённые) задачи и доказываются теоремы о сходимости решений и собственных пар.

Ключевые слова: *усреднение, асимптотические методы, малый параметр, микронеоднородные среды, соединения.*

Введение

Усреднение дифференциальных операторов и интегральных функционалов — сравнительно молодая часть теории уравнений с частными производными. Эта наука интенсивно развивается последние пол века (см., например, [1] - [7] и литературу, приведённую в этих монографиях). Основоположниками этой науки являются (в хронологическом порядке) такие выдающиеся математики современности как Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, Е.Я. Хруелов, В.А. Марченко, Е. Де Джорджи, К. Спаньоло, Н.С. Бахвалов, Ж. Л. Лионс, А. Бенсуссан, Дж. Папаниколау, В.В. Жиков, С.М. Козлов, О.А. Олейник, Э. Санчее-Паленеия. Список далеко не полный.

Обсудим главную идею теории усреднения. Она достаточно проста. Рассматривается среда с микронеоднородностями. Например, это может быть пористое тело, или слоистый (ячеистый) композиционный материал, или скелетон (решётчатая конструкция), или тело с шероховатой поверхностью, или тело с концентрированными (присоединёнными) массами. Математическая модель, описывающая поведение такой среды, включает довольно сложные дифференциальные уравнения, коэффициенты которых зависят от малого параметра (характерного размера микронеоднородностей), граничные и начальные условия, которые, в свою очередь, тоже зависят от малого параметра. Как правило, такие уравнения не решаются явно, а применение вычислительных средств затруднено. Численные методы для задач с малым параметром сводят решение краевых и начальных задач к решению систем алгебраических уравнений, в которых число неизвестных и число уравнений

[1] Работа частично поддержана РФФИ (проект No 15-01-07920).

критически велико. Такие задачи не решаются даже суперкомпьютерами в режиме реального времени. Идея теории усреднения состоит в следующем: надо построить задачу для другого дифференциального уравнения, быть может в более простой области и с другими краевыми и начальными условиями, так называемую “усреднённую” (или “предельную” при стремлении малого параметра к нулю), в которой не было бы зависимости от малого параметра, а решения мало в некоторой норме отличались от решений исходной задачи с малым параметром. По сути это означает, что построенная усреднённая (“предельная”) задача моделирует **эффективное поведение** среды на макро уровне, “не вдаваясь в подробности” о поведении на микро уровне.

Таким образом, мы рассматриваем среды с неоднородной микроструктурой. Микронеоднородности в области могут быть распределены равномерно или расположены в какой- то части области, так называемые полуперфорированные области. Один из интересных случаев, когда микронеоднородности локализованы в окрестности границы, такие задачи исследуются с помощью методов теории граничного усреднения. Рассмотрим несколько групп примеров, где используются методы теории граничного усреднения.

В качестве первого примера можно рассмотреть механизм, в котором детали взаимодействуют друг с другом, контактируя поверхностями. Внутренняя структура деталей механизма существенной роли в процессе работы не играет, а микрошероховатости поверхности становятся главным объектом исследования. Например, движение поршня в цилиндре двигателя внутреннего сгорания (см. рисунок 1) происходит в результате действия сил со стороны сгоревших газов, но стенки цилиндра и поршня при движении создают дополнительно силу трения, препятствующую движению. Чем грубее обработана поверхность, тем сильнее сила трения и наоборот. Для улучшения работы всего механизма необходимо сначала изучить влияние микрошероховатостей на границе на макроповедение всех деталей и по возможности уменьшить это влияние.

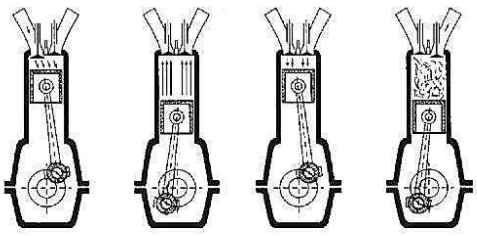


Рис. 1. Четырёхтактный двигатель

С точки зрения инженера решение этой задачи достаточно простое. Необходимо отполировать поверхность максимально качественно (т.е. сгладить все микрошероховатости). С другой же стороны, переходя на микроуровень

(например, посмотрев в микроскоп), легко убедиться, что все неровности поверхности сгладить не удастся, даже высококачественным инструментом. Поэтому влияние останется, а вот его расчёт выходит на первое место.

Поведение каждой детали можно смоделировать математически с помощью дифференциальных уравнений в области с “осциллирующей границей” со специальными осциллирующими граничными условиями. Такая задача будет включать в себя малый параметр и для её исследования необходимо построить усреднённую задачу без малого параметра (задачу в области с гладкой границей, но другими граничными условиями), т.е. задачу, которая бы описывала эффективное поведение трущихся поверхностей с учётом “осцилляции” границы. Решая исходную и усреднённую задачи, сравнивая особенности их решений, математик может дать конкретные рекомендации инженеру о материалах, из которых должны быть сделаны поршень и стенки цилиндра, о методах обработки поверхности, а также, как надо поменять “граничные условия” между трущимися поверхностями, т.е. какую смазку надо иметь в этом механизме.

Рассмотренная модель — это , так называемые задачи в областях с **быстрой осцилляцией границы.** Здесь предполагается, что высота “холмиков” на границе имеет тот же порядок малости, что и (или меньший, чем) расстояние между ними. Возможна ситуация, когда осцилляция периодическая, локально периодическая или случайная статистически однородная. Математические методы приведены в работах [8] - [11].

Другой пример — поведение частично закреплённых тел. Мембраны в громкоговорителе приклеиваются по периметру, но часто в клее оказываются пузырьки и граница мембраны смазывается клеем не сплошь, а с перерывами (см. рисунок 2).

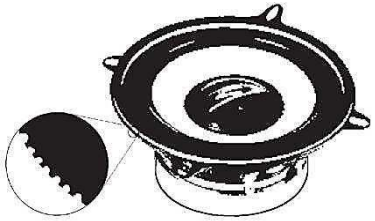


Рис. 2. Громкоговоритель

Возникает вопрос, какой процент “брака” можно допускать, чтобы громкоговоритель выдавал, всё-таки, нужные частоты? На этот вопрос опять дают ответ методы граничного усреднения. Оказывается, если расстояние между каплями клея и размер капель имеют один порядок (или же расстояние меньше), то собственные частоты (звук) такой мембраны будут близки к колебаниям полностью закреплённой. Это двумерный пример.

Аналогичные задачи возникают и в трёхмерном случае. Рассмотрим структуру поверхности многоразового космического корабля, обклеенную плитками термоизоляционного покрытия. Плитки сделаны из лёгкого пористого композиционного материала и их поверхность имеет много “раковин”. Вследствие этого клей наносится на поверхность “с перерывами”, а иногда, затекая в раковины, создаёт большие капли. При этом клей достаточно тяжёлый. Возникает вопрос, сколько в процентном отношении можно иметь “пропусков” без клея или больших капель клея, чтобы плитки не отрывались при сильном воздействии температур и трения об атмосферу. Отметим, что воздействие на плитки во время полёта достаточно сильное, а их отсутствие на некоторых участках является критическим для всей конструкции, вспомним катастрофу американского многоразового челнока “Columbia”.

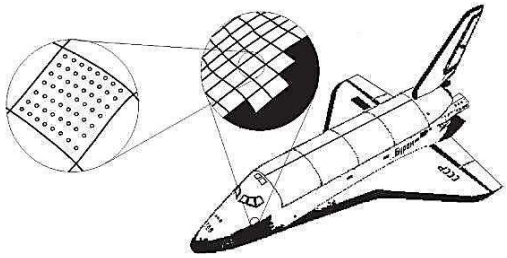


Рис. 3. Термоизоляционное покрытие корабля “Буран”

Применение методов граничного усреднения дало возможность рассчитать, какими свойствами должен обладать материал и его поверхность, чтобы плитка осталась на месте в течение всего полёта. Математически это означает, что исследовалась спектральная задача (задача на нахождение собственных значений и собственных функций оператора, которые описывают собственные частоты колебаний плитки) в области с частой сменой типа граничных условий, а также в области с большим количеством концентрированных масс, расположенных вдоль границы. Было показано, что при определённых условиях усреднённая задача имеет те же собственные значения, что и задача в области с полностью фиксированной границей без концентрированных масс.

В результате правильно проведённых расчётов после первого полёта многоразового корабля “Буран” оторвалось лишь четыре плитки из нескольких тысяч.

Вторая группа рассмотренных примеров приводит к так называемым задачам с быстро меняющимся типом граничных условий и к задачам с концентрированными массами, расположенными вдоль границы. Математические методы приведены в работах [12] - [23].

Задачи граничного усреднения возникают также в биологии. Биология давно привлекает учёных-математиков новыми интересными постановками задач. Проводимость биологических мембран (например, клеточных мембран)

детально изучена в работе [14] (см. рисунок 4).

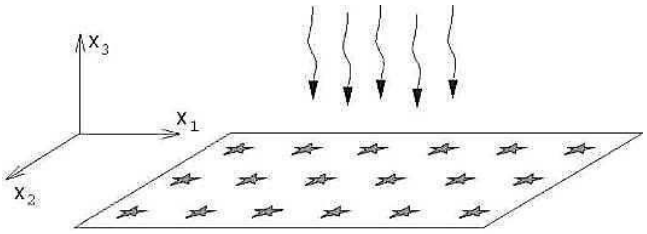


Рис. 4. Перфорированная мембрана

Задача о проводимости мембраны опять сводится к математической задаче в области с частой сменой типа граничного условия. На порах мембраны ставится условие одного типа, а между порами (где нет потока) ставится другое условие. В результате методы граничного усреднения позволяют построить задачу эффективной проводимости и описать свойства её решений (т.е. описать эффективный поток через мембрану).

Моделирование задач микробиологии приводит к появлению малого параметра в уравнениях, описывающих поведение рассматриваемых биологических объектов. Поведение сложных многоклеточных организмов под влиянием окружающей среды адекватно описывается на микроуровне, т.е. на клеточном или даже молекулярном уровне. Такая модель и включает уравнения с малым параметром, который связан с характерным размером клеток или молекул. Но даже исследование поведения простейших одноклеточных требует довольно сложного математического аппарата, включая методы усреднения.

Рассмотрим такой пример. Метаболизм (обмен веществ) и движение простейших типа инфузории происходит благодаря наличию ресничек на поверхности их тел (см. рисунок 5).

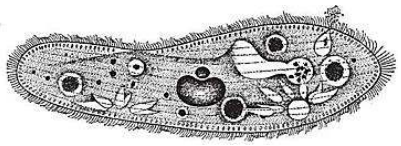


Рис. 5. Инфузория туфелька (Paramecium caudatum)

Простейшие имеют сложное внутреннее строение. Внутри клетки можно увидеть и более плотные включения (фибриллы, ядра, митохондрии), и пузырьки газа (сократительная вакуоль, трихоцисты), и включения, состоящие из жидкости, окруженные мембранами (пищеварительная вакуоль). Установившийся био-физический процесс (метаболизм) в таких клетках может быть смоделирован краевой задачей в перфорированной области с быстро осциллирующей границей. Амплитуда осцилляции (высота ресничек), при этом, много больше периода (толщины ресничек). Строение клеток инфузорий подсказывает, что необходимо рассматривать области со случайной микроструктурой и осцилляцию границы, несогласованную с внутренним строением. Такая задача была рассмотрена, но отсутствие некоторой

упорядоченности внутренней структуры и рассогласование внутренней и граничной структур не позволяют получить “хорошие” оценки отклонения решений исходной задачи от решений усреднённой, хотя построение усреднённой задачи в этом случае успешно осуществляется. Отметим, что некоторые виды инфузорий имеют ярко выраженные локально периодические включения - пузырьки, например, инфузория Strobilidium rapulum (см. рисунок 6).

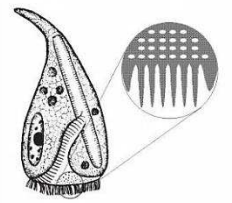


Рис. 6. Инфузория Strobilidium rapulum

Процессы в таких клетках можно моделировать уравнениями в локально периодической области с осциллирующей границей. При этом осцилляция границы согласована с внутренним строением области. Рассматривается краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных в локально периодической перфорированной области с очень быстро осциллирующей границей. Предполагается, что осцилляция границы согласована с внутренним строением области и амплитуда осцилляции много больше периода. При этом на границе полостей и на осциллирующей границе ставится краевое условие, которое характеризует установившийся обмен веществ (или диффузию веществ). Методами граничного усреднения получаются константы, которые дают численное значение эффективного метаболизма (обмена веществ) в клетках инфузорий.

Задачи в перфорированных областях с осциллирующей границей изучались в работе [9], где рассмотрен случай, когда осцилляция границы имеет “обычную” структуру. Амплитуда и период осцилляции имеют одинаковый порядок. Модельная задача в области с **очень быстро осциллирующей границей,** т.е. когда амплитуда и период имеют разный порядок, рассматривалась в [8], см. также применение к биологии в работах [24], [25].

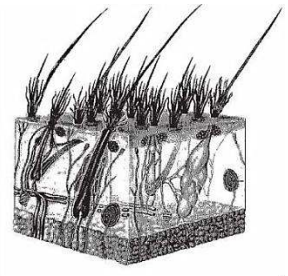


Рис. 7. Фрагмент эпителия млекопитающих

О таких задачах мы поговорим подробнее в работе. Математически такие модели сводятся к изучению краевых задач в областях с каскадными многоуровневыми осциллирующими границами. При этом в “трансмиссионном” слое возможно появление эффекта концентрированных масс. Такие задачи исследованы в работах [27] — [32].

Ещё один пример связан с поведением тел, перфорированных вдоль границы (см. рисунок 8).

Рис. 8. Сосуд с жидкостью и заглубленными полыми поплавками

Нами рассмотрены несколько групп примеров, в которых естественным образом возникают задачи граничного усреднения. Можно ещё привести множество различных примеров, где такие задачи возникают, но мы затронули, по сути, основные типы возникающих классических задач граничного усреднения. Из необычных (неклассических) примеров можно привести один интересный пример, который, правда, подробно обсуждать не будем. Это исследование электрической проводимости корродированных контактов. Оказывается, что при построении математической модели здесь приходится говорить о дифференциальных уравнениях на фракталах. Такие задачи тоже рассматривались, но в этой ситуации приходится давать новые определения понятия производных и пользоваться неклассическими методами функционального анализа.

Подводя итог, скажем, что прикладные задачи в областях с микронеоднородностями в последнее время успешно решаются, а развитый аппарат позволяет рассматривать множество других типов и классов таких задач.

Далее в работе подробно будут обсуждаться модели в каскадных соединениях с концентрированными массами, а также задача для операторного пучка, возникающая в гидродинамике, которая связана с малыми колебаниями жидкости в сосуде с заглубленными поплавками.

1. О новых типах колебаний густых каскадных соединений с концентрированными массами

Этот параграф написан по материалам работы [26]. Задачи в областях типа

густого каскадного соединения начали изучаться сравнительно недавно (см. [27, 28]). Было получено новое условие сопряжения на интерфейсе, которое диктуется поведением малых отростков. В работе [30] обнаружено влияние концентрированных масс на малых отростках на изменение условий сопряжения. Было доказано, что для спектральной задачи в таком соединении с лёгкими и средними массами спектральный параметр возникает ещё и в условиях сопряжения, т.е. возникает усреднённая оператор-функция. При увеличении плотности массы оказывается, что длинные отростки начинают колебаться, повторяя колебания малых отростков. Возникает эффект объёмной (толстой) кожи в твёрдом теле, так называемый *"объёмный скип эффект.*

Настоящая статья посвящена, как раз, изучению новых эффектов, таких как, появление аналога поверхностных волн в твёрдом теле, возникновение объёмного скип эффекта и т.п. (см. некоторые подробности в [30], которые появляются в густых каскадных соединениях при наличии концентрированных масс.

Если говорить о колебаниях систем с концентрированными массами, то надо упомянуть экспериментальные работы, где было установлено, что наличие концентрированной массы на малом множестве диаметра O(e) ведёт к сильному изменению частот собственных колебаний тел. Но строгое изучение влияния концентрированных масс на поведение таких объектов начинается только с появлением математических методов и подходов, таких как асимптотический анализ и теория усреднения. В пионерской работе Е. Санчес- Паленсии [31] был изучен эффект локальных колебаний. В дальнейшем появилось много других математических работ по этой теме. Читатель может найти подробную библиографию работ, посвящённых спектральным задачам с концентрированными массами в [30, 5]. Впервые скип-эффект был обнаружен в работе [34].

1.1. Постановка задачи

Пусть $a,\ b_1,\ b_2,\ h_1,\ h_2$ — положительные числа, удовлетворяющие неравенствам $0 < b_1 < b_2 < \frac{1}{2},\quad 0 < b_1 - \frac{h_1}{2},\quad b_1 + \frac{h_1}{2} < b_2 - \frac{h_1}{2},\quad b_2 + \frac{h_1}{2} < \frac{1}{2} - \frac{h_2}{2}$. Легко увидеть, что интервалы $\left(b_1 - \frac{h_1}{2}\ , b_1 + \frac{h_1}{2}\right),\ \left(b_2 - \frac{h_1}{2}\ , b_2 + \frac{h_1}{2}\right),\ \left(\frac{1-h_2}{2}\ , \frac{1+h_2}{2}\right),\quad \left(1 - b_2 - \frac{h_1}{2}\ , 1 - b_2 + \frac{h_1}{2}\right)$ и $\left(1 - b_1 - \frac{h_1}{2}\ , 1 - b_1 + \frac{h_1}{2}\right)$ не пересекаются и лежат на $(0,1)$.

Разделим отрезок $[0, a]$ на N одинаковых отрезков $[\varepsilon j, \varepsilon(j+1)]$, $j = 0, \dots, N-1$. Здесь N — большое натуральное число и поэтому $\varepsilon = a/N$ — малый дискретный параметр.

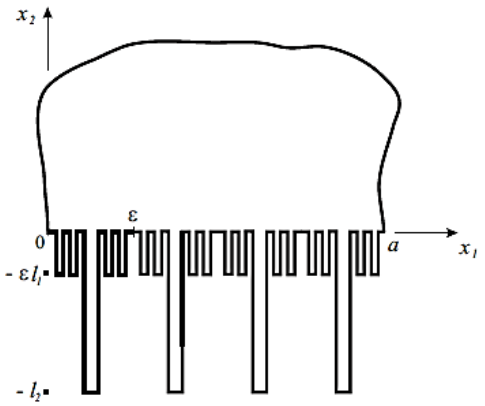


Рис. 9. Густое каскадное соединение Ω_ε.

Модельное *густое каскадное соединение* Ω_ε (см. рисунок 9) состоит из тела соединения

$$\Omega_0 = \{x \in R^2 \colon\ 0 < x_1 < a, \quad 0 < x_2 < \gamma(x_1)\ \},$$

где $\gamma \in C^1([0,a])$, $\min_{[0,a]}\gamma =: \gamma_0 > 0$ и большого количества тонких прямоугольников

$$G_j^{(1)}(d_k,\varepsilon) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon\ |x_1 - \varepsilon\,(j + d_k)| < \frac{\varepsilon h_1}{2}, \quad x_2 \in (-\varepsilon\, l_1, 0]\right\}, \quad k = 1,\dots,4,$$

$$G_j^{(2)}(\varepsilon) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon\ |x_1 - \varepsilon\,(j + \frac{1}{2})| < \frac{\varepsilon h_2}{2}, \quad x_2 \in (-l_2, 0]\right\}, \quad j = 0,1,\dots,N-1,$$

где $d_1 = b_1,\ d_2 = b_2,\ d_3 = 1 - b_2,\ d_4 = 1 - b_1$. Таким образом, $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(1)} \cup G_\varepsilon^{(2)}$, где

$$G_\varepsilon^{(1)} = \bigcup_{j=0}^{N-1}\ (\bigcup_{k=1}^{4}\ G_j^{(1)}(d_k,\varepsilon)), \qquad G_\varepsilon^{(2)} = \bigcup_{j=0}^{N-1}\ G_j^{(2)}(\varepsilon).$$

Число тонких прямоугольников равно $5N$; тонкие прямоугольники подразделяются на два класса $G_\varepsilon^{(1)}$ и $G_\varepsilon^{(2)}$ в зависимости от их длины и ширины. Длина и ширина прямоугольников первого класса равна εl_1 и εh_1 соответственно, а l_2 и εh_2 — длина и ширина, соответственно, прямоугольников второго класса. Более того, тонкие прямоугольники каждого класса ε-периодически чередуются вдоль зоны присоединения, отрезка $I_0 = \{x \colon x_1 \in [0,a], \quad x_2 = 0\}$.

Мы будем рассматривать колебания Ω_ε, которые зависят от времени, как $\exp(-i\sqrt{\lambda}\ t)$, поэтому в области Ω_ε рассматривается следующая спектральная задача :

$$\begin{cases} -\Delta_x\ u(\varepsilon,x) &=& \lambda(\varepsilon)\rho_\varepsilon(x)u(\varepsilon,x), & x \in \Omega_\varepsilon; \\ -\partial_\nu u(\varepsilon,x) &=& 0, & x \in \Upsilon_\varepsilon^{(1)} \cup \Upsilon_\varepsilon^{(2)} \cup \Gamma_\varepsilon; \\ u(\varepsilon,x) &=& 0, & x \in \Gamma_1; \\ [u]_{|_{x_2=0}} &=& \left[\partial_{x_2} u\right]_{|_{x_2=0}} = 0, & x_1 \in Q_\varepsilon. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $\partial_\nu = \partial/\partial\nu$ — производная вдоль внешней единичной нормали; квадратными скобками $[\cdot]$ обозначен скачок соответствующих функций; $\Upsilon_\varepsilon^{(i)}$ — объединение боковых сторон и нижних оснований прямоугольников i-ого класса, $i = 1,2$; $\Gamma_1 = \{x\colon\ x_2 = \gamma(x_1), x_1 \in [0,a]\}$; $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \backslash (\Upsilon_\varepsilon^{(1)} \cup \Upsilon_\varepsilon^{(2)} \cup \Gamma_1)$; функция плотности имеет вид

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)}, \\ \varepsilon^{-\alpha}, & x \in G_\varepsilon^{(1)}; \end{cases}$$

параметр $\alpha \in \mathbb{R}$ (если $\alpha > 0$, то имеем концентрацию массы на тонких прямоугольниках первого класса $G_\varepsilon^{(1)}$); $Q_\varepsilon = Q_\varepsilon^{(1)} \cup Q_\varepsilon^{(2)}$, $Q_\varepsilon^{(i)} = G_\varepsilon^{(i)} \cap \{x\colon x_2 = 0\}$, $i = 1,2$.

Легко видеть, что для любого фиксированного значения ε существует счётный набор собственных значений

$$0 < \lambda_1(\varepsilon) < \lambda_2(\varepsilon) \le \cdots \le \lambda_n(\varepsilon) \le \cdots \to +\infty \quad (\text{при } n \to \infty) \qquad (2)$$

задачи (1). Соответствующие собственные функции $\{u_n(\varepsilon,\cdot)\colon\ n \in N\}$, принадлежащие пространству H_ε, могут быть ортонормированы следующим образом:

$$(u_n, u_m)_{L^2(\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)})} + \varepsilon^{-\alpha}(u_n, u_m)_{L^2(G_\varepsilon^{(1)})} = \delta_{n,m}, \quad \{n,m\} \in N. \qquad (3)$$

Здесь и далее $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера, а H_ε — пространство Соболева $\{u \in H^1(\Omega_\varepsilon)\colon u|_{\Gamma_1} = 0$ в смысле следов$\}$ со скалярным произведением

$$(u,v)_{H_\varepsilon} := \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall\ u, v \in H_\varepsilon.$$

Целью нашего исследования является изучение асимптотического поведения собственных значений $\{\lambda_n(\varepsilon)\colon\ n \in N\}$ и собственных функций $\{u_n(\varepsilon,\cdot)\colon\ n \in N\}$ при $\varepsilon \to 0$, при этом число присоединённых прямоугольников обоих классов бесконечно возрастает, а их толщина стремится к нулю.

Надо отметить, что переход к пределу сопровождается увеличением плотности концентрированных масс в прямоугольниках первого класса. Фактически в задаче (1) присутствует два типа возмущений: возмущение геометрии области и возмущение плотности. Мы исследуем влияние обоих факторов на асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций.

1.2. Основные результаты

Комбинируя метод согласования асимптотических разложений (см. [35]) и метод двухмасштабных разложений (см. [3]), мы выявили пять различных случаев асимптотического поведения собственных функций и собственных значений задачи (1) при $\varepsilon \to 0$, а именно, случай *"лёгких"* концентрированных масс $(\alpha \in (0,1))$, *"средних"* концентрированных масс $(\alpha = 1)$, *"умеренно*

тяжёлых" (*"slightly heavy"* или *"moderate heavy"*) концентрированных масс ($\alpha \in (1,2)$), *"тяжёлых"* (*"heavy"* or *"intermediate heavy"*) концентрированных масс ($\alpha = 2$), и *"сверхтяжёлых"* (*"super heavy"* или *"very heavy"*) концентрированных масс ($\alpha > 2$).

В работе [30] был подробно изучен случай "лёгких" и "средних" концентрированных масс. В этом случае возмущение области играет определяющую роль в асимптотическом поведении собственных значений и собственных функций.

Если $\alpha \in (0,1)$, то спектр усреднённой (предельной) задачи совпадает со спектром задачи в области без концентрированных масс, где были обнаружены некоторые интересные особенности в геометрической структуре спектра, присутствие *лакун*; см. также работу [21], где влияние "лёгких" концентрированных масс проявляется во второстепенных членах асимптотики, а предельная (усреднённая) задача концентрированных масс "не чувствует"). Концентрированные массы в этом случае не оказывают влияние на главный член асимптотики, в частности, асимптотическое разложение для собственных значений $\lambda_n(\varepsilon)$ имеет следующий вид (индекс n мы опускаем):

$$\lambda(\varepsilon) \approx \lambda_0 + \varepsilon^{1-\alpha}\lambda_{1-\alpha} + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^{2-\alpha}\lambda_{2-\alpha} + \cdots \tag{4}$$

Для собственных функций $u_n(\varepsilon,\cdot)$ задачи (1) асимптотический анзац ищется в форме

$$u(\varepsilon,x) \approx$$
$$\approx v_0^+(x) + \varepsilon^{1-\alpha}v_{1-\alpha}^+(x) + \varepsilon v_1^+(x) + \varepsilon^{2-\alpha}v_{2-\alpha}^+(x) + \cdots, \text{ в области } \Omega_0; \tag{5}$$

$$\begin{aligned} u(\varepsilon,x) \quad &\approx v_0^-(x_1,x_2,\eta_1 - j) + \varepsilon^{1-\alpha}v_{1-\alpha}^-(x_1,x_2,\eta_1 - j) + \varepsilon v_1^-(x_1,x_2,\eta_1 - j) + \\ &+\varepsilon^{2-\alpha}v_{2-\alpha}^-(x_1,x_2,\eta_1 - j) + \cdots, \qquad \eta_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}, \end{aligned} \tag{6}$$

в тонких прямоугольниках $G_j^{(2)}(\varepsilon)$ $(j = 0,\dots,N-1)$ и в окрестности зоны соединения тела и тонких прямоугольников обоих классов в виде:

$$\begin{aligned} u(\varepsilon,x) \quad &\approx v_0^+(x_1,0) + \varepsilon^{1-\alpha}v_{1-\alpha}^+(x_1,0) + \varepsilon\textstyle\sum_{i=1}^2 Z_1^{(i)}(\eta)\,\partial_{x_i}v_0^+(x_1,0) + \\ &+\varepsilon^{2-\alpha}(Z_{2-\alpha}^{(0)}(\eta)v_0^+(x_1,0) + \textstyle\sum_{i=1}^2 Z_{2-\alpha}^{(i)}(\eta)\,\partial_{x_i}v_{1-\alpha}^+(x_1,0)) + \cdots, \eta = \frac{x}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $\beta = (\beta_1,\beta_2)$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2$, $\beta_i \in N_0$, $D^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}}$ и $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Подставляя эти суммы в исходную задачу и приравнивая соответствующие члены при одинаковых степенях ε получаем задачи для определения коэффициентов разложений (5)–(7). Так, функция

$$v_0(x) = \begin{cases} v_0^+(x), & x \in \Omega_0, \\ v_0^-(x), & x \in D_2 \end{cases} \tag{8}$$

и число λ_0 удовлетворяют задаче

$$\begin{cases} -\Delta_x\ v_0^+(x) &= \lambda_0 v_0^+(x), & x\in\Omega_0,\\ -\partial^2_{x_2x_2}\ v_0^-(x) &= \lambda_0\ v_0^-(x), & x\in D_2,\\ \partial_\nu\ v_0^+(x) &= 0, & x\in\Gamma_2,\\ v_0^+(x) &= 0, & x\in\Gamma_1,\\ v_0^+(x_1,0) &= v_0^-(x_1,0), & x_1\in(0,a),\\ \partial_{x_2}v_0^+(x_1,0) &= h_2\,\partial_{x_2}v_0^-(x_1,0), & x_1\in(0,a),\\ \partial_{x_2}v_0^-(x_1,-l_2) &= 0, & x_1\in(0,a), \end{cases} \quad (9)$$

которая называется *усреднённой спектральной задачей* для задачи (1) в случае $\alpha\in(0,1)$, где $D_2=(0,a)\times(-l_2,0)$, $\Gamma_2:=\partial\Omega_0\backslash(\Gamma_1\cup I_0)$, и имеет место теорема

Теорема 1. *Спектр задачи* (9) *содержит нормальные собственные значения и левосторонние точки накопления* $\left\{P_m=(\frac{\pi+2\pi(m-1)}{2l_2})^2\right\}_{m\in N}$, *которые делят собственные значения на последовательности*

$$P_{m-1}<\lambda_0^{(m,1)}\le\cdots\le\lambda_0^{(m,n)}\le\cdots\to\ P_m \quad \text{при } n\to\infty, m\in \mathrm{N}, P_{-1}=0\,.$$

Из условия разрешимости краевой задачи для

$$v_{1-\alpha}(x)=\begin{cases} v^+_{1-\alpha}(x), & x\in\ \Omega_0,\\ v^-_{1-\alpha}(x), & x\in\ D_2, \end{cases}$$

определяем число

$$\lambda_{1-\alpha}=-4h_1l_1\lambda_0\int_{I_0}(v_0^+)^2dx_1. \quad (10)$$

Концентрированные массы начинают проявляться в усреднённой задаче в случае $\alpha=1$.

Действуя аналогично, мы ищем главные члены асимптотики собственных значений в виде

$$\lambda(\varepsilon)\approx\lambda_0+\varepsilon\lambda_1+\cdots \quad (11)$$

Разложение собственных функций в этом случае ищется аналогично (5), (6), (7) с учётом того, что $\alpha=1$. Собирая соответствующие члены после подстановки анзацев в исходную задачу, получаем для функции v_0 (см. (8)) и числа λ_0 следующую спектральную задачу:

$$\begin{cases} -\Delta_x\ v_0^+(x) &= \lambda_0 v_0^+(x), & x\in\Omega_0,\\ -\partial^2_{x_2x_2}\ v_0^-(x) &= \lambda_0\ v_0^-(x), & x\in D_2,\\ \partial_\nu\ v_0^+(x) &= 0, & x\in\Gamma_2,\\ v_0^+(x) &= 0, & x\in\Gamma_1,\\ v_0^+(x_1,0) &= v_0^-(x_1,0), & x_1\in(0,a),\\ \partial_{x_2}v_0^+(x_1,0)-h_2\,\partial_{x_2}v_0^-(x_1,0) &= -4h_1l_1\lambda_0\,v_0^+(x_1,0), & x_1\in(0,a),\\ \partial_{x_2}v_0^-(x_1,-l_2) &= 0, & x_1\in(0,a) \end{cases} \quad (12)$$

с необычным условием скачка со спектральным параметром на интерфейсе. Такая постановка задачи близка к известным задачам в гидродинамике (см.

[36]), где имеются внутренние и поверхностные волны в жидкости и спектральный параметр присутствует как в уравнении, так и в краевом условии, т.е. в нашей задаче появляется аналог поверхностных волн в твёрдом теле, но на интерфейсе.

В работе [30] доказана Хаусдорфова сходимость, а также низко- и высокочастотная сходимость спектра задачи (1) к спектру соответствующей усреднённой задачи при $\varepsilon \to 0$. Также были получены соответствующие асимптотические оценки для собственных функций и собственных значений. Более того, были обнаружены псевдоколебания для задачи (1), которые имеют быстроосциллирующий характер и при которых различные длинные прямоугольники исходного соединения колеблются независимо, т.е. каждый прямоугольник имеет свою собственную частоту.

Случай $\alpha > 1$ характеризуется тем, что массы начинают играть ведущую роль в асимптотическом поведении собственных значений и собственных функций. Как отмечалось выше, асимптотика в этом случае будет различаться для $\alpha < 2$, $\alpha = 2$ и $\alpha > 2$. Ведущие члены остаются теми же, а поправочные члены будут переставляться местами. Мы подробно останавливаемся только на случае $\alpha \in (1,2)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Принципиальным отличием случая "тяжёлых" масс от предыдущих случаев является тот факт, что все собственные значения $\{\lambda_n(\varepsilon)\}$ стремятся к нулю со скоростью $\varepsilon^{\alpha-1}$ при $\varepsilon \to 0$ (см. лемму 1) и асимптотический анзац имеет вид

$$\lambda(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\alpha-1}\lambda_0 + \varepsilon^{2\alpha-2}\lambda_{\alpha-1} + \cdots; \qquad (13)$$

амплитуда соответствующих собственных колебаний имеет порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{\alpha-1}{2}})$ и эти колебания имеют тип *объёмного скин—эффекта* (см. рисунок 10).

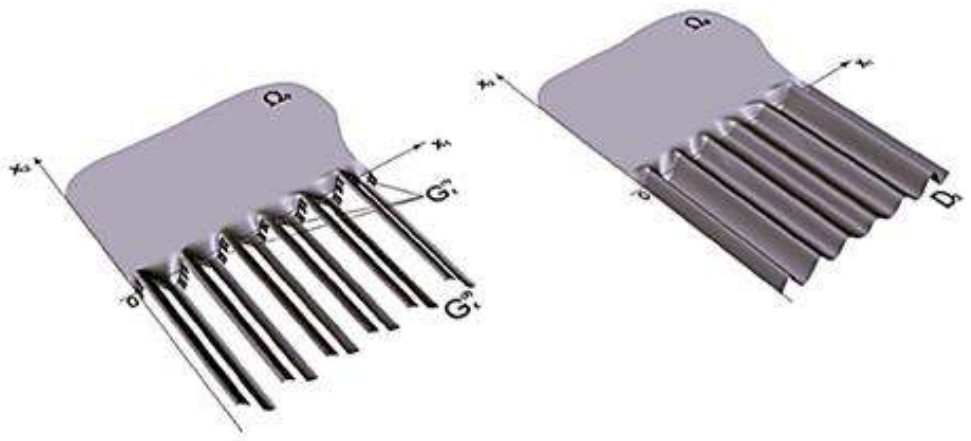


Рис. 10. Исходные и усреднённые собственные колебания с *объёмным скин—эффектом*

Лемма 1. *Для любого достаточно малого ε имеют место оценки низкочастотного спектра и соответствующих собственных функций вида*

$$c_0\,\varepsilon^{\alpha-1} \le \lambda_n(\varepsilon) \le C_0(n)\,\varepsilon^{\alpha-1}, \qquad \| u_n \|_{H_\varepsilon} \le C_1(n)\,\varepsilon^{\frac{\alpha-1}{2}}. \tag{14}$$

На основании леммы 1 мы перемасштабируем собственные значения и собственные функции следующим образом :

$$\lambda(\varepsilon) = \varepsilon^{\alpha-1}\Lambda(\varepsilon), \qquad u(\varepsilon,x) = \varepsilon^{\frac{\alpha-1}{2}} v(\varepsilon,x). \tag{15}$$

При этом задача (1) переписывается в виде

$$\begin{cases} -\Delta_x\ v(\varepsilon,x) &=& \varepsilon^{\alpha-1}\Lambda(\varepsilon)v(\varepsilon,x), & x \in \Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(2)}; \\ -\Delta_x\ v(\varepsilon,x) &=& \varepsilon^{-1}\Lambda(\varepsilon)v(\varepsilon,x), & x \in G_\varepsilon^{(1)}; \\ -\partial_\nu v(\varepsilon,x) &=& 0, & x \in \Upsilon_\varepsilon^{(1)} \cup \Upsilon_\varepsilon^{(2)} \cup \Gamma_\varepsilon; \\ v(\varepsilon,x) &=& 0, & x \in \Gamma_1; \\ [v]_{|_{x_2=0}} &=& \left[\partial_{x_2} v\right]_{|_{x_2=0}} = 0, & x_1 \in Q_\varepsilon. \end{cases} \tag{16}$$

Теперь, асимптотические разложения ищем в виде

$$\Lambda(\varepsilon) \approx \lambda_0 + \varepsilon^{\alpha-1}\lambda_{\alpha-1} + \cdots \tag{17}$$

$$v(\varepsilon,x) \approx v_0^+(x) + \varepsilon^{\alpha-1} v_{\alpha-1}^+(x) + \cdots \quad \text{в области } x \in \Omega_0 \tag{18}$$

$$v(\varepsilon,x) \approx v_0^-(x_1,x_2,\eta_1 - j) + \varepsilon^{\alpha-1} v_{\alpha-1}^-(x_1,x_2,\eta_1 - j) + \varepsilon v_1^-(x_1,x_2,\eta_1 - j) + \cdots \tag{19}$$

в тонких прямоугольниках $G_j^{(2)}(\varepsilon)$ $(j = 0, \dots, N-1)$ и в окрестности зоны присоединения

$$v(\varepsilon,x) \approx v_0^+(x_1,0) + \varepsilon^{\alpha-1} v_{\alpha-1}^+(x_1,0) +$$

$$+\varepsilon\left(Z_1^{(0)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v_0^+(x_1,0) + \sum_{i=1}^{2} Z_1^{(i)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_{x_i} v_0^+(x_1,0) \right) +$$

$$+\varepsilon^\alpha \left(Z_\alpha^{(0)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v_0^+(x_1,0) + X_\alpha^{(0)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v_{\alpha-1}^+(x_1,0) + \sum_{i=1}^{2} X_\alpha^{(i)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_{x_i} v_{\alpha-1}^+(x_1,0) \right) + \cdots \tag{20}$$

Далее, действуя аналогично предыдущим случаям, получаем, что $v_0^- \equiv$ $\equiv v_0^+(x_1,0)$ в D_2, а для функции v_0^+ и числа λ_0 следующую спектральную задачу Стеклова :

$$\begin{cases} \Delta_x\ v_0^+(x) &=& 0, & x \in \Omega_0 \\ \partial_\nu\ v_0^+(x) &=& 0, & x \in \Gamma_2, \\ v_0^+(x) &=& 0, & x \in \Gamma_1, \\ \partial_{x_2} v_0^+(x_1,0) &=& -4h_1 l_1 \lambda_0\, v_0^+(x_1,0), & x_1 \in (0,a). \end{cases} \tag{21}$$

Второй член асимптотики для собственного значения в этом случае определяется по формуле

$$\lambda_{\alpha-1} = -\frac{\lambda_0}{4h_1 l_1}\left(h_2 l_2 + \int_{\Omega_0} (v_0^+)^2\, dx\right) \tag{22}$$

(ср. с формулой (10) для случая $\alpha \in (0,1)$).

Пусть $\lambda_0^{(n+1)} = \cdots = \lambda_0^{(n+r)}$ — r-кратное собственное значение усреднённой задачи (21). Для упрощения формулировки предположим, что следующие члены асимптотики удовлетворяют неравенствам $\lambda_{\alpha-1}^{(n+1)} < \lambda_{\alpha-1}^{(n+2)} < \cdots < \lambda_{\alpha-1}^{(n+r)}$.

Имеет место утверждение

Теорема 2. *Для любого $\delta > 0$ и $i \in \{1, \dots, r\}$ имеем*

$$\left|\varepsilon^{1-\alpha}\lambda_{n+i}(\varepsilon) - (\lambda_0^{(n+i)} + \varepsilon^{\alpha-1}\lambda_{\alpha-1}^{(n+i)})\right| \leq C_1(n,\delta)\,\varepsilon^{1-\delta},$$

$$\| \varepsilon^{-\frac{\alpha-1}{2}} u_{n+i}(\varepsilon,\cdot) - \frac{R_\varepsilon^{(n+i)}}{\| R_\varepsilon^{(n+i)} \|_{H_\varepsilon}} \|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_2(n,\delta)\varepsilon^{1-\delta},$$

где $R_\varepsilon^{(n+i)}$ — аппроксимирующая функция, построенная с помощью (18)–(20)*, которая удовлетворяет неравенству*

$$\| R_\varepsilon - (\lambda_0 + \varepsilon^{\alpha-1}\lambda_{\alpha-1})A_\varepsilon R_\varepsilon \|_{H_\varepsilon} \leq c(\delta)\,\varepsilon^{1-\delta},$$

а $A_\varepsilon : H_\varepsilon \mapsto H_\varepsilon$ – оператор соответствующий задачи (16).

2. О колебании жидкости с заглубленной под свободной поверхностью «крупноячеистой» сетью с поплавками

Этот параграф основан на совместных результатах с моим учеником из Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе Ёровым Собиром Таировичем. Мы изучаем плоский аналог задачи о низкочастотных колебаниях тяжёлой вязкой несжимаемой жидкости в сосуде с помещённой под свободной поверхностью сетью с поплавками. Рассматривается случай нормальных колебаний, т.е. ситуация, когда зависимость скорости жидкости от времени имеет экспоненциальную форму $e^{-\lambda t}$. Для простоты рассмотрен модельный двумерный скалярный случай. В таком предположении получается спектральная задача для квадратичного операторного пучка, которая исследована с помощью схемы Копачевского–Крейна (см. [36]).

2.1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — гладкая область в нижней полуплоскости, граница которой $\partial\Omega$ — кусочно гладкая. Предполагается, что $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, часть Γ_2 — отрезок на оси абсцисс $[-1,1]$. Часть Γ_1 вертикальна в окрестности концов отрезка $[-1,1]$. Пусть B — круг $\{\xi : \xi_1^2 + (\xi_2 + \frac{1}{2})^2 < a^2\}$, $0 < a < \frac{1}{2}$. Обозначим

$B_\varepsilon^j = \{x \in \Omega: \varepsilon^{-1}(x_1 - x_1^j, x_2) \in B\}$, $j \in \mathbb{N}$, $B_\varepsilon = \bigcup_j^{\mathcal{N}_\varepsilon} B_\varepsilon^j$, $\Gamma_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$. Точки x_1^j расположены непериодически на оси. При этом в объединение B_ε входят только те шары, которые целиком попали в область Ω. Более того, предполагается, что $\mathcal{N}_\varepsilon$ имеет порядок $\mathcal{O}(|\ln\varepsilon|^\alpha)$, $\alpha \in (0,1)$, т.е. количество шаров при стремлении ε к нулю растёт достаточно «медленно». Определим область Ω_ε как $\Omega \backslash \overline{B_\varepsilon}$ (см. рис. 11).

Пусть $H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_1 \cup \Gamma_\varepsilon)$ — множество функций из соболевского пространства $H^1(\Omega_\varepsilon)$ с нулевым следом на $\Gamma_1 \cup \Gamma_\varepsilon$. Аналогично, через $H^1(\Omega, \Gamma_1)$ будем обозначать подмножество функций из $H^1(\Omega)$ с нулевым следом на Γ_1.

Замечание 1. *В дальнейшем будем отождествлять функции из пространства* $H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_1 \cup \Gamma_\varepsilon)$ с функциями из $H^1(\Omega)$, равными нулю в B_ε, а функции из пространства $L_2(\Omega_\varepsilon)$ с функциями из $L_2(\Omega)$, равными нулю в B_ε. С другой стороны, для сужения функций из $L_2(\Omega)$ на Ω_ε будем сохранять их обозначения.

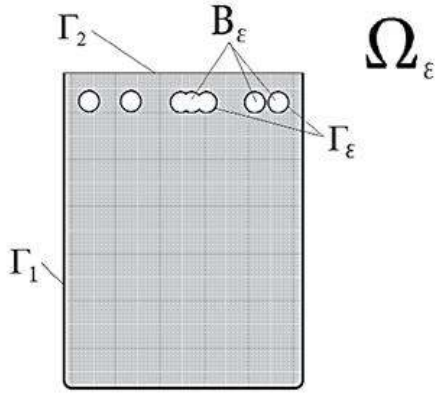


Рис. 11. Область Ω_ε, непериодически перфорированная вдоль поверхности

Рассматриваются следующие спектральные задачи:

$$\begin{cases} \Delta s_\varepsilon^k = -\lambda_\varepsilon^k s_\varepsilon^k \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon, \\ s_\varepsilon^k = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \cup \Gamma_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial s_\varepsilon^k}{\partial x_2} = 0 \text{ на } \Gamma_2, \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} \Delta w_\varepsilon^k = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon, \\ w_\varepsilon^k = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \cup \Gamma_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial w_\varepsilon^k}{\partial x_2} = -\lambda_\varepsilon^k w_\varepsilon^k \text{ на } \Gamma_2 \end{cases} \tag{24}$$

и

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon^k = -\lambda_\varepsilon^k u_\varepsilon^k \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon^k = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \cup \Gamma_\varepsilon, \\ \lambda_\varepsilon^k \frac{\partial w_\varepsilon^k}{\partial x_2} - q u_\varepsilon^k = 0 \text{ на } \Gamma_2. \end{cases} \tag{25}$$

Предполагается, что $q \equiv const > 0$. Будем изучать асимптотику собственных элементов этих задач при $\varepsilon \to 0$.

Отметим, что сингулярно возмущённые задачи с условием Стеклова (как в задаче (24)) изучались также в работах [37], [38], [39].

Построим усреднённые задачи и докажем сходимость собственных функций и собственных значений исходных задач к соответствующим собственным функциям и собственным значениям усреднённых (предельных) задач. Отметим, что первая задача в непериодическом случае изучалась. Также отметим, что вторая задача приводит к изучению усреднения операторных пучков (см., например, [40], [41], [42], [43]).

Основной целью работы является исследование асимптотического поведения собственных значений и собственных функций задачи (25). Будет показано, что задача (25) эквивалентна задаче об асимптотическом поведении собственных элементов операторного пучка. Схема из [36] позволяет свести задачу об асимптотиках собственных элементов пучка к двум более простым спектральным задачам для оператора Лапласа, одна из которых — это задача (23).

Далее, в конце этой работы мы покажем, что задача (25) является скалярным аналогом классической задачи из линейной гидродинамики (см. [36]).

2.2. Об усреднении краевой задачи в области, непериодической перфорированной вдоль границы. Обозначения и формулировка основных результатов

Известно, что задачи (23) и (24) имеют дискретный спектр, состоящий из счётного числа собственных значений конечной кратности. Считаем, что собственные значения $\{\lambda_\varepsilon^k\}$ занумерованы в порядке неубывания, т.е. $0 < \lambda_\varepsilon^1 < \lambda_\varepsilon^2 \leq \cdots \leq \lambda_\varepsilon^k \leq \cdots$, и повторяются с учётом кратности. При этом

$$\int_\Omega s_\varepsilon^k s_\varepsilon^l dx = \delta_{kl}, \qquad \int_\Omega w_\varepsilon^k w_\varepsilon^l dx = \delta_{kl}.$$

Приведём далее результат, который будут доказан позднее. Рассмотрим краевые задачи

$$\begin{cases} \Delta s^{\varepsilon} = -f \quad \text{в} \quad \Omega_{\varepsilon}, \\ s^{\varepsilon} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_{\varepsilon}, \\ \dfrac{\partial s^{\varepsilon}}{\partial x_2} = 0 \quad \text{на } \Gamma_2, \end{cases} \tag{26}$$

которая соответствует спектральной задаче (23),

$$\begin{cases} \Delta w^{\varepsilon} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_{\varepsilon}, \\ w^{\varepsilon} = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \cup \Gamma_{\varepsilon}, \\ \dfrac{\partial w^{\varepsilon}}{\partial x_2} = -g \quad \text{на } \Gamma_2, \end{cases} \tag{27}$$

которая соответствует спектральной задаче (24), а также

$$\begin{cases} \Delta s^{0} = -f \quad \text{в} \quad \Omega, \\ s^{0} = 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial s^{\varepsilon}}{\partial x_2} = 0 \quad \text{на } \Gamma_2 \end{cases} \tag{28}$$

и

$$\begin{cases} \Delta w^{0}(x) = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ w^{0}(x) = 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial w^{0}(x)}{\partial x_2} = -g \quad \text{на } \Gamma_2. \end{cases} \tag{29}$$

Имеет место теорема.

Теорема 3. *Пусть* $s^{\varepsilon} \in H^1(\Omega_{\varepsilon}; \Gamma_1 \cup \Gamma_{\varepsilon})$ *и* $s^{0} \in H^1(\Omega; \Gamma_1)$ *— обобщенные решения задач* (26) *и* (28)*, соответственно, тогда*

$$s^{\varepsilon} \to s^{0} \quad \text{сильно в} \quad H^1(\Omega) \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Пусть также $w^{\varepsilon} \in H^1(\Omega_{\varepsilon}; \Gamma_1 \cup \Gamma_{\varepsilon})$ *и* $w^{0} \in H^1(\Omega; \Gamma_1)$ *— обобщенные решения задач (27) и (29), соответственно, тогда*

$$w^{\varepsilon} \to w^{0} \quad \text{сильно в} \quad H^1(\Omega) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Теперь приведём спектральные задачи

$$\begin{cases} \Delta s_0^k = -\lambda_0^k s_0^k \quad \text{в} \quad \Omega, \\ s_0^k = 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial s^{\varepsilon}}{\partial x_2} = 0 \quad \text{на } \Gamma_2, \end{cases} \tag{30}$$

соответствующую краевой задача (28) и

$$\begin{cases} \Delta w_0^k = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ w_0^k = 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial w_0^k}{\partial x_2} = -\lambda_0^k s_0^k \quad \text{на } \Gamma_2, \end{cases} \tag{31}$$

соответствующую краевой задача (29).

Для спектральных задач (23) и (30) справедливо утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\lambda_\varepsilon^k, \lambda_0^k$ *являются собственными значениями задач* (23) *и* (30)*, соответственно. Тогда*

$$|\lambda_\varepsilon^k - \lambda_0^k| \to 0 \qquad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Если кратность собственного значения λ_0^l задачи (30) равна r, то есть $\lambda_0^l = \lambda_0^{l+1} = \cdots = \lambda_0^{l+r-1}$, то для любой собственной функции s_0^l задачи (30), соответствующей собственному значению λ_0^l, $\| s_0 \|_{L_2(\Omega)} = 1$, существует линейная комбинация $\overline{s_\varepsilon}$ собственных функций $s_\varepsilon^l, \dots, s_\varepsilon^{l+r-1}$ задачи (23), соответствующих собственным значениям $\lambda_\varepsilon^l, \dots, \lambda_\varepsilon^{l+r-1}$ такая, что

$$\| \overline{s_\varepsilon} - s_0^l \|_{L_2(\Omega)} \to 0 \qquad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Пусть также $\lambda_\varepsilon^k, \lambda_0^k$ являются собственными значениями задач (24) и (31), соответственно. Тогда

$$|\lambda_\varepsilon^k - \lambda_0^k| \to 0 \qquad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Если кратность собственного значения λ_0^l задачи (31) равна r, то есть $\lambda_0^l = \lambda_0^{l+1} = \cdots = \lambda_0^{l+r-1}$, то для любой собственной функции w_0^l задачи (31), соответствующей собственному значению λ_0^l, $\| w_0 \|_{L_2(\Omega)} = 1$, существует линейная комбинация $\overline{w_\varepsilon}$ собственных функций $w_\varepsilon^l, \dots, w_\varepsilon^{l+r-1}$ задачи (24), соответствующих собственным значениям $\lambda_\varepsilon^l, \dots, \lambda_\varepsilon^{l+r-1}$ такая, что

$$\| \overline{w_\varepsilon} - w_0^l \|_{L_2(\Omega)} \to 0 \qquad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

2.3. Асимптотическое поведение собственных элементов операторного пучка

2.3.1. Сведение задачи к операторному пучку

Вернёмся к исследованию задачи (25).

Функция $u_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_1 \cup \Gamma_\varepsilon)$ является решением задачи, если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon(x) \nabla v(x) dx - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{q}{\lambda_\varepsilon} u_\varepsilon(x) v(x) dl = \int_{\Omega_\varepsilon} \lambda_\varepsilon u_\varepsilon(x) v(x) dx$$

для любой $v \in H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_1 \cup \Gamma_\varepsilon)$.

Продолжим, как обсуждали в начале функции нулём в объединение шаров и оставим за ними те же обозначения. Обозначим скалярное произведение в пространстве $H^1(\Omega; \Gamma_1 \cup \Gamma_\varepsilon)$:

$$(u, v)_{1,0} = \int_\Omega (\nabla u(x), \nabla v(x)) \; dx.$$

Также обозначим

$$(u, v)_0 \equiv \int_\Omega u(x) \, v(x) \; dx$$

скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Перепишем интегральное тождество с учётом обозначений в виде

$$(u_\varepsilon, v)_{1,0} - \frac{q}{\lambda_\varepsilon}(u_\varepsilon, v)_{L_2(\Gamma_\varepsilon)} = \lambda_\varepsilon (u_\varepsilon, v)_0. \quad (32)$$

По теореме Рисса существуют линейные самосопряжённые положительные компактные операторы A_ε и B_ε такие, что

$$\int_\Omega (\nabla \mathrm{A}_\varepsilon[u_\varepsilon](x), \nabla v(x))\ dx = \int_\Omega u_\varepsilon(x) v(x)\, dx \quad (33)$$

и

$$\int_\Omega (\nabla \mathrm{B}_\varepsilon[u_\varepsilon](x), \nabla v(x))\ dx = \int_{\Gamma_\varepsilon} u_\varepsilon(x) v(x)\, ds. \quad (34)$$

При этом интегральное тождество (32) переписывается в виде

$$(u_\varepsilon, v)_{1,0} - \frac{q}{\lambda_\varepsilon}(\mathrm{B}_\varepsilon[u_\varepsilon], v)_{1,0} = \lambda_\varepsilon (\mathrm{A}_\varepsilon[u_\varepsilon], v)_{1,0}.$$

Обозначим

$$L_\varepsilon(\lambda_\varepsilon) = I - \lambda_\varepsilon \mathrm{A}_\varepsilon - \frac{q}{\lambda_\varepsilon}\mathrm{B}_\varepsilon, \quad (35)$$

где I — тождественный оператор.

Найдём краевые задачи, которым соответствуют операторы A_ε и B_ε.

Напишем интегральное тождество краевой задачи (26). Имеем

$$\int_\Omega (\nabla s^\varepsilon(x), \nabla v(x))\ dx = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx \quad (36)$$

для всех $v \in H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_1 \cup \Gamma_\varepsilon)$. Учитывая интегральное тождество (36) и равенство (33), заключаем, что оператор A_ε даёт обобщённое решение краевой задачи (26), т.е. $\mathrm{A}_\varepsilon[f] = s_\varepsilon$, где s_ε — решение задачи (26). Отметим, что обратный оператор $\mathrm{A}_\varepsilon^{-1}$ имеет дискретный спектр, состоящий из счётного числа положительных собственных значений $\{\lambda_\varepsilon^n(\mathrm{A}_\varepsilon^{-1})\}_{n=1}^\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_\varepsilon^n(\mathrm{A}_\varepsilon^{-1}) = +\infty$, которые являются собственными значениями задачи (23).

Запишем интегральное тождество задачи (27). Имеем

$$\int_\Omega (\nabla w^\varepsilon(x), \nabla v(x))dx = \int_{\Gamma_\varepsilon} g(x) v(x)\, ds, \quad (37)$$

которое имеет место для всех $v \in H^1(\Omega_\varepsilon; \Gamma_1 \cup \Gamma_\varepsilon)$. Учитывая интегральное тождество (37) и равенство (34), заключаем, что оператор B_ε даёт решение краевой задачи (29), т.е. $\mathrm{B}_\varepsilon[\varphi] = w_\varepsilon$, где w_ε — решение задачи (29). Отметим, что оператор $\mathrm{B}_\varepsilon^{-1}$ имеет дискретный спектр, состоящий из счётного числа положительных собственных значений $\{\lambda_\varepsilon^n(\mathrm{B}_\varepsilon^{-1})\}_{n=1}^\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_\varepsilon^n(\mathrm{B}_\varepsilon^{-1}) = +\infty$, которые являются собственными значениями спектральной задачи (24).

2.3.2. Свойства операторных пучков

В этом пункте мы приводим некоторые известные определения и утверждения из [36], которые нам понадобятся для анализа исходной задачи усреднения в области с концентрированными массами на границе.

Пусть E — сепарабельное гильбертово пространство. Рассмотрим следующую задачу:

$$\varphi = \lambda \mathrm{A}[\varphi] + \lambda^{-1}\mathrm{B}[\varphi] \qquad (\lambda \neq 0), \tag{38}$$

где $\mathrm{A}: E \to E$ — компактный положительный оператор и $\mathrm{B}: E \to E$ — компактный неотрицательный оператор. Функция φ называется собственной функцией задачи (38), если она удовлетворяет (38) для некоторого λ. Число λ называется собственным значением.

Назовём операторным пучком задачи (38) выражение вида

$$L(\lambda) = I - \lambda \mathrm{A} - \lambda^{-1}\mathrm{B}. \tag{39}$$

Теорема 5. *Если выполнено условие*

$$4 \parallel \mathrm{A} \parallel \parallel \mathrm{B} \parallel < 1, \tag{40}$$

то спектр операторного пучка $L(\lambda)$ в $\mathbb{R}$ состоит из счётного множества собственных значений, которые имеют конечную кратность. Собственные значения расположены на интервалах $(0, r_-)$, $(r_+, +\infty)$ действительной оси, где

$$r_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|}}{2\|\mathbf{A}\|}, \qquad 0 < r_- < r_+,$$

и состоит из двух семейств $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^{\infty}$ с точками накопления $+\infty$ и 0, соответственно, т.е. $\lambda_n^- \to 0$ при $n \to \infty$, и $\lambda_n^+ \to +\infty$ при $n \to \infty$, при этом $\lambda_k^- \neq \lambda_j^+$, $k, j \in \mathbb{N}$.

Имеют место следующие формулы:

$$\lambda_n(\mathrm{B}) \leq \lambda_n^- \leq \frac{\lambda_n(\mathrm{B})}{1 - 2\lambda_n(\mathrm{B})\|\mathrm{A}\|} \qquad (n = 1,2,\cdots),$$

т.е.

$$\lambda_n^- = \lambda_n(\mathrm{B})(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad \mathrm{n} \to +\infty$$

и

$$\frac{1}{\lambda_n(\mathrm{A})} - 2 \parallel \mathrm{B} \parallel \leq \lambda_n^+ \leq \frac{1}{\lambda_n(\mathrm{A})} \qquad (n = 1,2,\cdots),$$

т.е.

$$\lambda_n^+ = \frac{1}{\lambda_n(\mathrm{A})} + O(1) \qquad \text{при } \mathrm{n} \to +\infty.$$

2.3.3. Необходимые замечания

Таким образом, наша задача об усреднении операторного пучка (35) распадается на задачи об усреднении двух классических краевых задач (23) и (24), что соответствует схеме из монографии [36].

В соответствии со свойствами вспомогательных задач, оператор A_ε — компактный и положительный, оператор B_ε — компактный и неотрицательный. Следовательно, (35) — частный случай операторного пучка (39) с $\mathrm{A} = \mathrm{A}_\varepsilon$, $\mathrm{B} = q\mathrm{B}_\varepsilon$.

Выберем константу q таким образом, чтобы выполнялось условие (40).

Из теоремы 5 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6. *Задача (35) обладает следующими свойствами.*

• *Спектр задачи (35) дискретный и состоит из счётного множества действительных собственных значений конечной кратности, которые расположены на интервалах* $(0, r_-)$, $(r_+, +\infty)$ *действительной оси, где*

$$r_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4q\|A_\varepsilon\|\,\|B_\varepsilon\|}}{2\|A_\varepsilon\|}, \qquad 0 < r_- < r_+,$$

и состоит из двух семейств $\{(\lambda_\varepsilon^k)^+\}_{k=1}^\infty$, $\{(\lambda_\varepsilon^k)^-\}_{k=1}^\infty$ *с точками накопления* $+\infty$ *и* 0, *соответственно, т.е.* $(\lambda_\varepsilon^k)^- \to 0$ *при* $k \to \infty$, *и* $(\lambda_\varepsilon^k)^+ \to +\infty$ *при* $k \to \infty$, *при этом* $\lambda_k^- \neq \lambda_j^+$, $k, j \in \mathbb{N}$.

• *Справедливы следующие оценки и асимптотические формулы:*

$$\frac{1}{\lambda_\varepsilon^k(\mathrm{A}_\varepsilon)} - 2q \parallel \mathrm{B}_\varepsilon \parallel \leq (\lambda_\varepsilon^k)^+ \leq \frac{1}{\lambda_\varepsilon^k(\mathrm{A}_\varepsilon)} \quad (k = 1,2,\cdots),$$

$$(\lambda_\varepsilon^k)^+ = \frac{1}{\lambda_\varepsilon^k(\mathrm{A}_\varepsilon)}[1 + o(1)] \qquad \text{при} \qquad k \to +\infty,$$

$$q\lambda_\varepsilon^k(\mathrm{B}_\varepsilon) \leq (\lambda_\varepsilon^k)^- \leq \frac{q\lambda_\varepsilon^k(\mathrm{B}_\varepsilon)}{1 - 2q\lambda_\varepsilon^k(\mathrm{B}_\varepsilon)\|\mathrm{A}_\varepsilon^{-1}\|} \ (k = 1,2,\cdots),$$

$$(\lambda_\varepsilon^k)^- = q\lambda_\varepsilon^k(\mathrm{B}_\varepsilon)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

2.3.4. Теорема усреднения

Перепишем интегральное тождество задачи (28) в виде

$$(s^0, v)_{1,0} = (f, v)_0. \tag{41}$$

По теореме Рисса для линейного непрерывного функционала $(f, v)_0$ в пространстве $H^1(\Omega; \Gamma_1)$ существует оператор A_{hom}, такой что

$$(\mathrm{A}_{hom}[f], v)_{1,0} = (f, v)_0. \tag{42}$$

Учитывая интегральное тождество (41) и равенство (42), заключаем, что оператор A_{hom} даёт обобщённое решение краевой задачи (28), т.е. $\mathrm{A}_{hom}[f] = s^0$, где s^0 — решение краевой задачи (28). Отметим, что обратный оператор A_{hom}^{-1} имеет дискретный спектр, состоящий из счётного числа положительных собственных значений $\{\lambda_0^n(\mathrm{A}_{hom}^{-1})\}_{n=1}^\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_0^n(\mathrm{A}_{hom}^{-1}) = +\infty$, которые являются собственными значениями спектральной задачи (30).

Теперь перепишем интегральное тождество краевой задачи (29) с учётом обозначений, введённых ранее. Имеем

$$(w^0, v)_{1,0} = (g, v)_{L_2(\Gamma_2)}. \tag{43}$$

По теореме Рисса для линейного непрерывного функционала $(g, v)_{L_2(\Gamma_2)}$ в пространстве $H^1(\Omega; \Gamma_1)$ существует оператор B_{hom}, такой что

$$(\mathrm{B}_{hom}[g], v)_{1,0} = (g, v)_{L_2(\Gamma_2)}. \tag{44}$$

Учитывая интегральное тождество (43) и равенство (44), заключаем, что оператор B_{hom} даёт обобщённое решение краевой задачи (29), т.е. $\mathrm{B}_{hom}[\varphi] = w^0$, где w^0 — решение краевой задачи (29). Отметим, что оператор B_{hom}^{-1} имеет дискретный спектр, состоящий из счётного числа положительных собственных значений $\{\lambda_0^n(\mathrm{B}_{hom}^{-1})\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_0^n(\mathrm{B}_{hom}^{-1}) = +\infty$, которые являются собственными значениями спектральной задачи (31).

Имеют место утверждения.

Теорема 7. *Пусть $\lambda_\varepsilon^k(A_\varepsilon)$ — собственные значения оператора A_ε, такие что $\lambda_\varepsilon^1(A_\varepsilon) > \lambda_\varepsilon^2(A_\varepsilon) \geq \cdots > 0$; $\lambda_\varepsilon^k(B_\varepsilon)$ — собственные значения оператора B_ε, такие что $\lambda_\varepsilon^1(B_\varepsilon) > \lambda_\varepsilon^2(B_\varepsilon) \geq \cdots > 0$; $\lambda_0^k(A_{hom})$ — собственные значения оператора A_{hom}, такие что $\lambda_0^1(A_{hom}) > \lambda_0^2(A_{hom}) \geq \cdots > 0$, и пусть $\lambda_0^k(B_{hom})$ — собственные значения оператора B_{hom}, такие что $\lambda_0^1(B_{hom}) > \lambda_0^2(B_{hom}) \geq \cdots > 0$. Здесь все наборы собственных значений перенумерованы с учётом кратности.*

Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеет место сходимость

$$\left|\lambda_\varepsilon^k(\mathrm{A}_\varepsilon) - \lambda_0^k(\mathrm{A}_{hom})\right| \to 0, \qquad \left|\lambda_\varepsilon^k(\mathrm{B}_\varepsilon) - \lambda_0^k(\mathrm{B}_{hom})\right| \to 0.$$

Теорема 8. *Пусть u_ε — собственная функция задачи* (25)*, тогда $u_\varepsilon u_0$ слабо в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$, где*

$$\begin{cases} \Delta u_0 = -\lambda u_0 & \text{в} \quad \Omega, \\ u_0 = 0 & \text{на } \Gamma_1, \\ \frac{\lambda\, \partial u_0}{\partial x_2} - q u_0 = 0 & \text{на } \Gamma_2. \end{cases} \tag{45}$$

Напишем интегральное тождество задачи (45) с учётом введённых ранее обозначений. Имеем

$$(u_0, v)_{1,0} - \frac{q}{\lambda}(u_0, v)_{L_2(\Gamma_2)} = \lambda(u_0, v)_0. \tag{46}$$

С учётом (42) и (44) переписываем тождество (46) следующим образом:

$$(u_0, v)_{1,0} - \frac{q}{\lambda}(\mathrm{B}_{hom}[u_0], v)_{1,0} = \lambda(\mathrm{A}_{hom}[u_0], v)_{1,0}.$$

Соответствующий операторный пучок имеет вид

$$\hat{L}(\lambda) = I - \lambda \mathrm{A}_{hom} - \frac{q}{\lambda}\mathrm{B}_{hom}.$$

Определение 1. *Назовём операторный пучок $\hat{L}(\lambda)$* — **усреднённым операторным пучком** *для исходного операторного пучка $L_\varepsilon(\lambda_\varepsilon)$, заданного в* (35).

2.4. Малые колебания вязкой неоднородной жидкости в открытом неподвижном сосуде с заглубленной около свободной поверхности сетью с поплавками. Нормальные колебания

В этом разделе мы приводим рассуждения из [36, гл.7].

Предполагается, что под открытой поверхностью жидкости находится мелкоячеистая жёсткая сетка с поплавками.

Считаем, что тяжёлая вязкая жидкость плотности ρ заполняет неподвижный открытый сосуд и занимает в состоянии покоя область Ω, ограниченную твёрдой стенкой S, жёсткой сеткой γ_ε на поверхности и свободной поверхностью Γ_ε. Классическая постановка задачи о малых движениях, близких к состоянию покоя включает в себя линеаризованные уравнения Навье–Стокса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta u + f, \qquad div\ u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{47}$$

где $u = u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x))$ — поле скоростей, $p = p(t,x)$ — динамическое давление, $f(t,x)$ — поле внешних сил, ν — вязкость жидкости.

На твёрдой стенке S и сетке γ_ε выполняется условие прилипания

$$u = 0 \qquad \text{на } S \cup \gamma_\varepsilon, \tag{48}$$

а на свободной поверхности Γ_ε выполняются динамические и кинематические условия. Если свободная поверхность Γ_ε задаётся неизвестной функцией

$$x_2 = \Xi(t, x_1, x_2),$$

то эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i}\right) = 0, \qquad i = 1,2, \\ &-p + 2\rho\nu\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \rho g \Xi, \qquad \frac{\partial \Xi}{\partial t} = -\gamma_n u \qquad \text{на } \Gamma_\varepsilon, \end{aligned} \tag{49}$$

- где $\gamma_n u := u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3$, а $n = (n_1, n_2, n_3)$ — вектор единичной внешней нормали к границе области.

Рассмотрим нормальные колебания, т.е. такие решения однородной задачи (47)–(49), для которых

$$\begin{aligned} u(t,x) &= e^{-\lambda t} u(x), \\ p(t,x) &= e^{-\lambda t} p(x), \\ \Xi(t,x_1,x_2) &= e^{-\lambda t}\Xi(x_1,x_2). \end{aligned} \tag{50}$$

Подставляя (50) в уравнение (47) и в краевые условия (48), (49), получаем задачу

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\nabla p - \nu\Delta u = \lambda u, & div\, u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{на} \quad S \cup \gamma_\varepsilon, \\ \left(\frac{\partial u_\text{i}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_\text{i}}\right) = 0, & i = 1,2, \\ -\text{p} + 2\rho\nu\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \rho g \frac{1}{\lambda}\gamma_n u & \text{на } \Gamma_\varepsilon \end{cases} \tag{51}$$

Далее, рассматриваются две вспомогательные задачи

• Первая задача с однородным условием на Γ_ε:

$$\begin{cases} \nabla p_1 - \nu\Delta\, s \;\; = \Psi, \qquad div\;\; s \;\; = 0 \qquad \text{в} \quad \Omega, \\ \quad s = 0 \qquad \text{на} \quad S \cup \gamma_\varepsilon\,, \\ \left(\frac{\partial s_{\mathrm{i}}}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_{\mathrm{i}}}\right) = 0, \quad i = 1{,}2, \\ -\mathrm{p} + 2\nu\,\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \qquad \text{на} \;\; \Gamma_\varepsilon, \end{cases} \tag{52}$$

• Вторая задача — с однородной правой частью уравнения и неоднородным условием на Γ_ε:

$$\begin{cases} \nabla p_2 - \nu\Delta\, w = 0, \qquad div\, w \;\; = 0 \qquad \text{в} \quad \Omega, \\ \quad w \;\; = 0 \qquad\qquad \text{на} \;\; S \cup \gamma_\varepsilon, \\ \left(\frac{\partial w_{\mathrm{i}}}{\partial x_3} + \frac{\partial w_3}{\partial x_{\mathrm{i}}}\right) = 0, \qquad i = 1{,}2, \\ -\mathrm{p} + 2\nu\,\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \qquad \text{на} \;\; \Gamma_\varepsilon, \qquad \int_{\Gamma_\varepsilon} \chi d\Gamma = 0\,. \end{cases} \tag{53}$$

Пусть теперь функции $u = u(x)$ и $p = p(x)$ являются классическими решениями задачи (51). Тогда можно представить

$$u\,(x) = \;\; s\,(x) + \; w\,(x), \qquad \frac{1}{\rho}p(x) = p_1(x) + p_2(x), \tag{54}$$

где $s\;(x), p_1(x)$ — решение краевой задачи (52) с правой частью $\Psi = \lambda\, u\;$, а $w\,(x), p_2(x)$ — решение краевой задачи (53) с неоднородностью $\chi = g\frac{1}{\lambda}\gamma_n\, u\;$.

Напишем задачу (51) в операторной форме. Пусть A — оператор, такой что $\nu^{-1}\mathrm{A}[\Psi] = \; s\;$, где $s\;$ — решение задачи (52), а B — оператор, такой что $\mathrm{B}[\chi] = w\;$, где $w\;$ — решение задачи (53). Положим $\Psi = \lambda\, u\;$ и $\chi = g\frac{1}{\lambda}\gamma_n \;\; u\,.$ Тогда в операторной форме задачи (52) и (53) имеют вид

$$\begin{aligned} \nu\mathrm{A}^{-1}[\,s\,] \;\; &= \lambda\, u\,, \\ \nu\;\; w \qquad &= g\frac{1}{\lambda}\mathrm{B}[\,u\,], \\ u \qquad &= s \;+\; w\,. \end{aligned} \tag{55}$$

Исключаем $u\;(x)$ из равенств (55). Имеем

$$\begin{aligned} -\lambda\, s \qquad &= -\nu\mathrm{A}^{-1}[s\,] + g\nu^{-1}\mathrm{B}[\,s \;\; + w], \\ -\lambda\, w \qquad &= -g\nu^{-1}\mathrm{B}[s \;\; + \; w]. \end{aligned} \tag{56}$$

Складывая оба уравнения, выводим

$$\nu\, s \;\; = \lambda\mathrm{A}[\,s \;\; + \; w\,], \qquad \nu\, w \;\; = \frac{g}{\lambda}\mathrm{B}[\,s \;\; + \; w\,].$$

Если теперь снова сложить уравнения, учитывая (54), то приведём к основной спектральной задаче

$$\nu\;\; u \;\; = \lambda\mathrm{A}[\;\; u \;\;] + \frac{g}{\lambda}\mathrm{B}[\,u \;\;]. \tag{57}$$

Здесь оператор A — положительный и компактный, а B — бесконечномерный неотрицательный компактный оператор с бесконечномерным ядром.

Операторный пучок, соответствующий задаче (57), имеет вид

$$L(\lambda) = \nu I - \lambda \mathrm{A} - \frac{g}{\lambda}\mathrm{B}. \qquad (58)$$

Замечание 2. *Для этого пучка справедлива теорема* 5. *При этом*

- *Собственные значения* λ_k^+ *соответствуют нормальным колебаниям вязкой жидкости, называемым внутренними диссипативными волнами.*
- *Собственные значения* λ_k^- *соответствуют нормальным колебаниям вязкой жидкости, называемым поверхностными гравитационными волнами.*

Операторный пучок (35) имеет ту же структуру и те же свойства коэффициентов, что и операторный пучок (58). В силу этого можно говорить о рассмотренной задаче (25), как о плоском скалярном аналоге уравнений линейной гидродинамики.

Литература

1. Марченко В.А. Краевые задачи в областях с мелко-зернистой границей. / В.А. Марченко, К.Я. Хруслов - Киев, 1974.
2. Bensoussan A. Asymptotic analysis for periodic structures. / A. Bensoussan, J.L. Lions, and G. Papanieolau - Amsterdam: North-Holland, 1978.
3. Бахвалов Н.С. Осреднение процессов в периодических средах. / Бахвалов Н.С., Панаеенко Г.П. – Москва, 1984.
4. Sanehez-Paleneia E. Homogenization Techniques for Composite Media. / Berlin-New York: Springer-Verlag, 1978.
5. Oleinik O.A. Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization / O.A. Oleinik, G.A. Yosifian, A.S. Shamaev – Amsterdam, 1992.
6. Жиков В.В. Усреднение дифференциальных операторов / В.В. Жиков, С.М. Козлов, О.А. Олейник - Москва, 1993.
7. Пятницкий А. Л. Усреднение, методы и некоторые приложения. / А. Л. Пятницкий, Г.А. Чечкин, А.С. Шамаев / Новосибирск, 2007.
8. Cheehkin G.A. The Boundary Value Problem in Domains with Very Rapidly Oscillating Boundary / G.A. Cheehkin**,** A. Friedman, A.L. Piatnitski // Journal of Mathematical Analysis and Applications (JMAA). - 1999. - V. 231. - № 1. P. 213-234.
9. Беляев А.Г. Асимптотическое поведение решения краевой задачи в перфорированной области с осциллирующей границей / А.Г.Беляев, А.Л. Пятницкий, Г.А. Чечкин // Сиб. мат. журнал. - 1998. - Т. 39. - № 4. - С. 730-754.
10. Amirat Y. Boundary homogenization in domains with randomly oscillating boundary / Y. Amirat, O. Bodart, G.A. Cheehkin, A.L. Piatnitski // Stochastic Processes and their Applications. - 2011. - V. 121. - № 1. - P. 1-23.

11. Gaudiello A. Asymptotic Behavior of Non-homogenious Neumann Problems in Domains with Oscillating Boundary / A. Gaudiello // Ricerche di Math. - 1994. - V. 43. - P. 239-292.
12. Чечкин Г.А. О краевых задачах для эллиптического уравнения второго порядка е осциллирующими граничными условиями / Г.А. Чечкин // Неклассические дифференциальные уравнения в частных производных. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1988. - С. 95-104.
13. Чечкин Г.А. Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий / Г.А. Чечкин // Мат. сборник, 1993. - Т. 184. - № 6. - С. 99-150.
14. Belyaev A.G. Effective Membrane Permeability: Estimates and Low Concentration Asymptotics / A.G. Belyaev**,** G.A. Cheehkin**,** R. R. Gadyl'shin // SIAM J. Appl, Math. - 2000. - V. 60. - № 1. - P. 84-108.
15. Brillard A. Homogeneisation de Frontieres par Epi-convergence en Elastieite Lineaire / A. Brillard, M. Lobo**,** E. Perez. // RAIRO Modil. Math. Anal. Numer 1990. - V. 24(1). - P. 5-26.
16. Damlamian A. Boundary Homogenization for Elliptic Problems / **A.** Damlamian. Li Ta-Tsien // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. - 1987. - V. 66. - P**.** 351-361.
17. Gadylshin R.R. On the eigenvalue asymptotics for periodically clamped membranes / R.R. Gadylshin // St. Peterburg Math. Journal. - 1999. – V. 10**. –** P. 1-14.
18. Lobo M. Asymptotic Behavior of an Elastic Body with a Surface Having Small Stuck Regions / M.Lobo, E, Perez // RAIRO Model. Math. Anal. Numer. – 1988. - V. 22(4). - P. 609-624.
19. Чечкин Г.А. Расщепление кратного собственного значения в задаче о концентрированных массах. / Г.А. Чечкин // УМН. - 2004. - Т. 59, вып. 4. - С. 205-206.
20. Чечкин Г.А. Об оценке решений краевых задач в областях е концентрированными массами, периодически расположенными вдоль границы. Случай "лёгких" масс / Г.А. Чечкин // Мат. Заметки. - 2004. - Т. 76. - № 6. - С. 928-944.
21. Чечкин Г.А. Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций эллиптического оператора в области с большим количеством близко расположенных на границе "лёгких" концентрированных масс. Двумерный случай / Г.А. Чечкин // Известия РАН. - 2005. - Т.69. - №4,- С. 161-204.
22. Чечкин Г.А. Асимптотическое разложение собственных элементов оператора Лапласа в области е большим количеством "лёгких"

концентрированных масс, редко расположенных на границе. Двумерный случай / Г.А. Чечкин // Труды Моск. Мат. Общества, - 2009. - Т. 70. - С. 102-182.
23. Cheehkin G.A. On Boundary Value Problem with Singular Inhomogeneitv Concentrated on the Boundary / G.A. Cheehkin, D. Cioraneseu, A. Damlamian, A.L. Piatnitski // Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. - 2012. - V. 98. - №2. - P. 115-138.
24. Чечкин Г.А. Об усреднении задач в областях типа “инфузории" / Г.А. Чечкин, Т.П. Чечкина // Труды семинара им. И.Г. Петровского. - 2003. - Т. 23. - С. 379-400.
25. Чечкин Г.А. Теорема усреднения для задач в областях типа “инфузории” с несогласованной структурой / Г.А. Чечкин, Т.П. Чечкина // Итоги науки и техники, Совр. матем. и ее прилож. Тематические обзоры. Уравнения е частными производными, ВИНИТИ, 1111-1 кибернетики АН Грузии, Тбилиси. - 2003. - Т. 2. - С. 139-154.
26. Мельник Г.А. О новых типах колебаний густых каскадных соединений с концентрированными массами / Г.А. Мельник, Г.А. Чечкин // Доклады РАН. – 2013. - Т. 448. - № 6. – С. 642-647.
27. Мельник Г.А. Усреднение краевой задачи в густом каскадном соединении / Г.А. Мельник, Г.А. Чечкин // Проблемы математического анализа. - 2008. - Т. 37- С. 47-72.
28. Мельник Г.А. Асимптотический анализ краевых задач в густых трёхмерных многоуровневых соединениях / Г.А. Мельник, Г.А. Чечкин // Математический сборник. - 2009. - Т. 200. - №3. - С. 49-74.
29. Cheehkin G.A. Asymptotic Analysis of a Boundary Value Problem in a Cascade Thick Junction with a Random Transmission Zone / G.A. Cheehkin, T.P. Cheehkina, C. D’Apice, U De Maio, T.A. Mel’nyk // Applicable Analysis. - 2009. - V. 88. - №10-11. - P. 1543-1562.
30. Cheehkin G.A. Asymptotics of Eigenelements to Spectral Problem in Thick Cascade Junction with Concentrated Masses / G.A. Cheehkin, T.A Mel’nyk // Applicable Analysis. - 2012. - V. 91. - P. 1055-1095.
31. Cheehkin G.A. Spatial-Skin Effect for Eigenvibrations of a Thick Cascade Junction with “Heavy” Concentrated Masses / G.A. Cheehkin, T.A Mel’nyk // Mathematical Methods in Applied Sciences (M2AS). - 2014. - V. 37. - P. 56-74.
32. Мельник Г.А. Собственные колебания густых каскадных соединений со “сверхтяжёлыми” концентрированными массами / Г.А. Мельник, Г.А. Чечкин // Известия РАН. - 2015. - Т. 79. - №3. - С. 41-86.
33. Sanehez-Paleneia E, B кн,: Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics, Lecture Notes in Phys. 195, B.: Springer Verlag. - 1984. - P. 346-

368.
34. Lobo M. A Skin Effect for Systems with Many Concentrated Masses / M. Lobo M.E. Perez // C.E. Acad. Sei. Paris. Serie II b. – 1999. - V. 327. - P. 771-776.
35. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач / А.М. Ильин – Москва. 1989.
36. Копачевский Н.Д. Операторные методы в линейной гидродинамике, Эволюционные и спектральные задачи / Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Зуй Каи Нго. - Москва, 1989.
37. Чечкина А.Г. О сходимости решений и собственных элементов краевой задачи типа Стеклова с быстро меняющимся типом граничных условий / А.Г. Чечкина // Проблемы математического анализа. Вып. - 2009. - Т. 42. - С. 129-143.
38. Садовничий В.А. Об оценке собственных функций задачи типа Стеклова е малым параметром в случае предельного вырождения спектра / В.А. Садовничий, А.Г. Чечкина // Уфимский математический журнал. - 2011. – Т. 3. – С. 127-139.
39. Чечкина А.Г. О сингулярном возмущении задачи типа Стеклова е вырождающимся спектром / А.Г. Чечкина // Доклады РАН. - 2011. - № 5. - Т. 440. С. 603-606.
40. Cheehkin G.A. Vibration of Fluids in a Vessel with a Net on the Surface / G.A. Cheehkin // Homogenization and Applications to Material Sciences. - 1997. - Vol, 9. - PP. 95-112.
41. Cheehkin G.A. Operator Pencil in a Domain with Concentrated Masses, A Scalar analogue of Linear Hydrodynamics / G.A. Cheehkin // International mathematical Series. - 2010. - Vol. 12. - P. 61-94.
42. Чечкин Г.А. Плоский скалярный аналог линейной вырождающейся гидродинамической задачи с непериодической микроструктурой на свободной поверхности / Г.А. Чечкин, Т.П. Чечкина // Проблемы математического анализа. - 2015. - Т. 78. – С. 201-213.
43. Чечкина Т.П. Скалярная гидродинамическая задача с непериодически расположенными концентрированными массами на поверхности / Т.П. Чечкина // Вестник Национального исследовательского ядерного университета “МИФИ”. - 2015. - Т.4. - №1. - С. 25-34.

ДОИР БА НАЗАРИЯИ САРҲАДИИ МИЁНАКУНОНӢ

Чечкин Г.А.

Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В. Ломоносов

Дар кор мо масъалаҳои гуногуни миёнакунонии сарҳадиро дида мебароем. Барои ин гуна масъалаҳо бо параметри хурд масъалаҳои ҳудудӣ сохта шуда, теоремаҳо дар бораи наздикшавии ҳалҳо ва ҷуфтҳои хос исбот карда мешаванд.

Калимаҳои калидӣ: миёнакунонӣ, усулҳои асимптотикӣ, параметри хурд, муҳитҳои микроғайриякҷинсавӣ, пайвасткуниҳо.

THE THEORY OF BOUNDARY AVERAGING

Chechkin G.A.

Lomonosov Moscow State University

In the paper we consider various problems of boundary homogenization. For the initial problems with small parameter we construct limit (homogenized) problems and prove the convergence theorems for solutions and eigenpairs.

Key words: homogenization, asymptotic methods, small parameter, microinhomogeneous media, junctions.

Сведения об авторе. **Чечкин Григорий Александрович,** доктор физико математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений Механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, 119991 Москва, Ленинские Горы, д.1, Механико-математический факультет. Тел. +7 (495) 939-1631. E-mail: chechkin@mech.math.msu.su

УДК 517.956

О НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пиров Р.

Таджикский государственный педагогический университет имени С. Айни

В работе рассматриваются нелинейные системы пяти дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной и двумя неизвестными функциями. Получены явные условия совместности, обеспечивающие однозначную разрешимость задач с начальными данными.

Ключевые слова: *условия совместности, многообразия решений, переопределенные системы.*

1. Введение

В монографии [1] рассматривались системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной неизвестной функцией (1921 г).

Начиная с 70-х годов прошлого века, переопределенные системы дифференциальных уравнений (д.у) в частных производных с двумя, тремя и более неизвестными изучены в ряде работ математической школы академика Михайлова Л.Г. (см. к примеру [2-4]).

В данной работе рассматриваются нелинейные системы вида

$$U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}, U_{yz}, U_{zz} = f^i\big(x, y, z, U, U_x, U_y, U_z, U_{xz}\big), i = \overline{1,5}, (x, y, z) \in R^3 \quad (1.1)$$

и

$$U_{xx}, U_{yy}, V_{xx}, V_{xy}, V_{yy} = f^i\big(x, y, U, U_x, U_y, V_x, V_y, U_{xy}\big), i = \overline{1,5}, (x, y) \in R^2. \quad (1.2)$$

Одинаковые обозначения f^i для функций, зависящих от различного числа аргументов (8 и 9 соответственно), оправдано тем, что эти системы изучаются независимо друг от друга.

Оговоримся сразу, что неизвестные функции $U(x, y, z)$ в (1.1) и $U(x, y), V(x, y)$ в (1.2) ищутся в классе C^4.

Основной метод исследования состоит в замене производных первого и второго порядков правых частей на новые неизвестные функции, переходе к системам с большим числом неизвестных функций и в установлении связей с достаточно изученными системами в полных дифференциалах (п.д.-система). Отметим, что этим методом рассмотрены системы изученные в [5-8].

2. Переопределенные системы из пяти уравнений с одной неизвестной

Пусть дана система (1.1). Через $\Pi = \Pi(a; b)$ обозначим прямоугольник в пространстве R^8, заданный неравенствами: $|x - x_0| \le a$, $|y - y_0| \le a$, $|U - U_0| \le b$, $|V - V_0| \le b$, $|U_x - U_x^0| \le b$, $\left|U_y - U_y^0\right| \le b$, $|V_x - V_x^0| \le b$, $\left|V_y - V_y^0\right| \le b$, $\left|U_{xy} - U_{xy}^0\right| \le b$.

Индекс "нолик" означает значения функций в точке (x_0, y_0, z_0).

В силу замен $U_x = P(x, y, z)$, $U_y = q(x, y, z)$, $U_z = W(x, y, z)$, $U_{xz} = p_z = R(x, y, z)$ (1.1) можно привести к системе

$$\begin{cases} U_x = p, \ U_y = q, \ U_z = W, \\ p_x = f^1, \ p_y = f^2, \ p_z = R, \\ q_x = f^2, \ q_y = f^3, \ q_z = f^4, \\ W_x = R, \ W_y = f^4, \ W_z = f^5, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $f^i = f^i(x, y, z; U, U_x, p, q, W, R), i = \overline{1,5}$. Операции перекрестного дифференцирования (о.п.д) $p_{xy} = p_{yx}$, $p_{yz} = p_{zy}$, $p_{xz} = p_{xy}$, $q_{xy} = q_{yx}$, $q_{zx} = q_{xz}$, $q_{zy} = q_{yz}$, $W_{xy} = W_{yx}$, $W_{yz} = W_{zy}$, $W_{xz} = W_{xy}$ приводят к девяти неразрешенным уравнениям

$$f_R^2 R_x - f_R^1 R_y = f_y^1 - f_x^2 + f_U^1 q - f_U^2 P + f_P^1 f^2 - f_P^2 f^1 - f_q^1 f^3 - f_q^2 f^2 + \\ + f_W^1 f^4 - f_W^2 R (\equiv h^1(x, y, z; U, p, q, W, R)),$$

$$R_y - f_R^2 R_x = f_z^2 + f_U^2 W + f_P^2 R + f_q^2 f^4 + f_W^2 f^5 \big(\equiv h^2(x, y, z; U, p, q, W, R)\big),$$

$$-R_x + f_R^1 R_z = f_z^1 + f_U^1 W + f_p^1 R + f_q^1 f^4 + f_W^1 f^5 \big(\equiv h^3(x, y, z; U, p, q, W, R)\big),$$

$$f_R^3 R_x - f_R^2 R_y = -f_x^3 + f_y^2 - f_U^3 p + f_U^2 q - f_p^3 f^1 + f_p^2 f^2 - f_q^3 f^2 + f_q^2 f^3 - \\ - f_W^3 R + f_W^2 f^4 \big(\equiv h^4(x, y, z; U, p, q, W, R)\big),$$

$$f_R^4 R_y - f_R^3 R_z = f_y^4 + f_z^3 - f_U^4 q + f_U^3 W - f_p^4 f^2 + f_p^3 R + f_q^4 f^3 - f_q^3 f^4 +$$
(2.2)
$$+f_W^4 f^4 \ - f_W^3 f^5 \big(\equiv h^5(x,y,z;U,p,q,W,R)\big),$$
$$f_R^2 R_z - f_R^4 R_x = f_z^3 - f_x^4 + f_U^3 q - f_U^4 p + f_p^3 R - f_p^4 f^1 + f_q^4 f^4 - f_q^3 f^2 + f_W^3 f^5 -$$
$$-f_W^4 R\big(\equiv h^6(x,y,z;U,p,q,W,R)\big),$$
$$f_R^4 R_x - R_y = f_x^4 + f_U^4 p + f_p^4 f^1 + f_q^4 f^2 + f_W^4 R\big(\equiv h^7(x,y,z;U,p,q,W,R)\big),$$
$$f_R^5 R_y - f_R^4 R_z = f_z^4 - f_y^5 + f_U^4 q - f_U^9 W + f_p^4 f^1 - f_p^5 R + f_q^4 f^2 - f_q^5 f^4 + f_W^4 f^5 -$$
$$-f_W^4 f^4\big(\equiv h^8(x,y,z;U,p,q,W,R)\big),$$
$$-f_R^5 R_x + R_z = f_x^5 + f_U^5 p + f_p^5 f^1 + f_q^5 f^2 + f_W^5 R\big(\equiv h^9(x,y,z;U,p,q,W,R)\big)$$

для которых имеют места следующие легко проверяемые равенства:

$$H^1(x,y,z;U,p,q,W,R) \equiv \ h^1 + f_R^3 h^2 + f_R^2 h^3 = 0,$$
$$H^2(x,y,z;U,p,q,W,R) \equiv f_R^4 \ h^4 + f_R^2 h^5 + f_R^3 h^6 = 0, \qquad (2.3)$$
$$H^3(x,y,z;U,p,q,W,R) \equiv \ h^1 + f^8 + f_R^4 h^9 = 0.$$

Учитывая это, (2.2) перепишем в виде

$$\begin{cases} f_R^2 R_x - f_R^1 R_y = h^1, \ \ R_z - f_R^2 R_y = h^2, \\ f_R^3 R_x - f_R^2 R_y = h^4, \ \ R_y - f_R^3 R_z = h^5, \\ f_R^4 R_x - R_y = h^7, \ \ f_R^5 R_y - f_R^4 R_z = h^8, \\ H^i(x,y,z;U,p,q,W,R) \equiv 0, \ \ i = \overline{1,3}, \end{cases} \qquad (2.4)$$

где $H^i, i = \overline{1.3}$ имеют явный вид (2.3). Если $H^i \equiv 0$, тогда при $f_R^1 f_R^3 - (f_R^2)^2 \neq 0$ и $f_R^2 \neq 0$ из (2.4) можно найти R_x и R_y:

$$R_x, R_y = f^k(x,y,z;U,p,q,W,R), k = 6,7\ , \qquad (2.5)$$

где

$$\lfloor f_R^1 f_R^3 - (f_R^2)^2 \rfloor f^6 = h^4 f_R^1 - f^1 f_R^2,$$
$$\lfloor f_R^1 f_R^3 - (f_R^2)^2 \rfloor f^7 = f_R^2 h^4 - f^1 f_R^3, \qquad (2.6)$$

Подставляя найденные значения R_y в (2.4) при $f_R^2 \neq 0$, находим

$$R_z = f^8(x,y,z;U,p,q,W,R), \qquad (2.7)$$

где

$$f_R^2 f^8 = h^7 - h^2. \qquad (2.8)$$

С целью сохранения совместности (2.4) отметим, что найденные значения R_x, R_y и R_z, должны удовлетворять остальным трем дифференциальным уравнениям (2.4), т.е. имеют место

$$f_R^4 f^7 - f_R^3 f^8 \equiv 0, \qquad f_R^4 f^6 - f^7 \equiv 0,$$
$$f_R^5 f^7 - f_R^4 f^8 \equiv 0. \qquad (2.9)$$

Присоединяя (2.5) и (2.7) к (2.1), получим п.д.-систему с пятью неизвестными U, p, q, W, R:

$$\begin{cases} U_x = p(x,y,z),\ \ U_y = q(x,y,z), U_z = W(x,y,z), \\ p_x, p_y = f^i(x,y,z;U,p,q,W,R), i = 1,2, p_z = R(x,y,z), \\ q_x, q_y, q_z = f^k(x,y,z;U,p,q,W,R),\ \ k = 2,3,4, \\ W_x = R(x,y,z), W_y, W_z = f^i(x,y,z;U,p,q,W,R), i = 4,5, \\ R_x, R_y, R_z = f^s(x,y,z;U,p,q,W,R), s = 6,7,8. \end{cases} \quad (2.10)$$

Система (2.10), эквивалентная исходному, совместна при выполнении трех условий (остальные выполняются автоматически)

$$D_y f^6 \equiv D_x f^7, D_z f^7 \equiv D_y f^8, D_z f^6 \equiv D_x f^8 \quad (2.11)$$

Применяем к (2.10) п.д.-теорию (см. к примеру [9]) со следующей задачей с начальными данными:

$$[U]_0 = c_1, [p]_0 = c_2, [q]_0 = c_3, [W]_0 = c_4, [R]_0 = c_5\ . \quad (2.12)$$

Эта задача по отношению к (1.1) примет вид:

$$[U]_0 = c_1, [U_x]_0 = c_2, \left[U_y\right]_0 = c_3, [U_z]_0 = c_4, [U_{xz}]_0 = c_5 \quad (2.13)$$

Теорема 1. Пусть в системе (1.1) $f^i \epsilon\ C^2(\Pi), i = \overline{1,5}\ . f_R^1 f_R^3 - (f_R^2)^2 \neq 0, f_R^2 \neq 0$ и имеют место условия (2.3) и (2.9). Если соотношения (2.11) в некоторой окрестности точки $\left(x_0, y_0, z_0, U_0, U_x^0, U_y^0, U_z^0, U_{xy}^0\right)$ выполняются тождественно, то на $\Pi(\alpha, b)$, где $\alpha \leq min\left(a, \frac{b}{M}\right). M = max\left|f^i\right|, i = \overline{1,5},$ задача (1.1) (2.13) разрешима единственным образом.

Замечание. Из этой теоремы следует, что многообразие решений системы (1.1) содержит пять произвольных постоянных c_1, c_2, c_3, c_4, c_5.

3. Нелинейная система (1.2)

Через $\Pi = \Pi(a; b)$ обозначим прямоугольник в пространстве R^9, заданный неравенствами: $|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq a, |U - U_0| \leq b, |V - V_0| \leq b, |U_x - U_x^0| \leq b, \left|U_y - U_y^0\right| \leq b, |V_x - V_x^0| \leq b, \left|V_y - V_y^0\right| \leq b, \left|U_{xy} - U_{xy}^0\right| \leq b.$

В отличие от системы (1.1) здесь будем снабжать значения тех или иных функций в точке (x_0, y_0).

Пусть $f^i \epsilon\ C^2(\Pi), i = \overline{1,5}$. Осуществляем замену $U_x = p(x; y), U_y = q(x; y), V_x = \tau(x; y), V_y = \theta(x, y), U_{xy} = p_x = t(x, y).$ Тогда имеют место очевидные тождества: $p_y \equiv q_x, \tau_y \equiv \theta_x.$ В силу этих замен система (1.2) примет вид:

$$\begin{cases} U_x = p(x;y), U_y = q(x;y), V_x = \tau(x;y), V_y = \theta(x;y), \\ p_x = f^i(x,y;U,V,p,q,\tau,\theta,t), p_y = t(x;y), \\ q_x = t(x;y), q_y = f^2(x,y;U,V,p,q,\tau,\theta,t), \\ \tau_x, \tau_y = f^j(x,y;U,V,p,q,\tau,\theta,t), j = 3,4, \\ \theta_x, \theta_y = f^k(x,y;U,V,p,q,\tau,\theta,t),\ \ k = 4,5. \end{cases} \quad (3.1)$$

За счет перекрестного дифференцирования, т.е. приравнивания $(p_x)_y$ и $(p_y)_x$, $(q_x)_y$ и $(q_y)_x$ выводим еще два уравнения, неразрешенные относительно t_x и t_y:

$$t_x - t_t^1 \cdot t_y = f_y^1 + f_U^1 \cdot q + f_V^1 \cdot \theta + f_p^1 t + f_q^1 \cdot f^2 + f_\tau^1 f_t^4 + f_\theta \cdot f^5, (\equiv L_1),$$
$$-f_t^2 \cdot l_x + l_y = f_x^2 + f_U^2 \cdot p + f_V^2 \cdot \tau + f_p^2 f^1 + f_q^2 \cdot l + f_\tau^2 f^3 + f_\theta^2 f^4, (\equiv L_2). \quad (3.2)$$

Ясно, что при $1 - f_l^1 \cdot f_l^2 \neq 0, f_l^1 \neq 0, f_l^2 \neq 0$ из (3.2) можно найти:

$$t_x, t_y = f^n(x, y; U, V, p, q, \tau, \theta, t), n = 6,7, \quad (3.3)$$

где f^6 и f^7 имеют вид:

$$(1 - f_t^1 \cdot f_t^2) \cdot f^6 = L_1 + f_l^1 L_2, (1 - f_t^1 \cdot f_t^2) \cdot f^7 = L_2 + f_t^2 \cdot L_1. \quad (3.4)$$

Присоединяя (3.3) к (3.1), получим п.д.-систему с семью неизвестными функциями $x, y; U, V, p, q, \tau, \theta, t$.

Проверка равенств вторых смещенных производных $U_{xy} = U_{yx}$, $V_{xy} = V_{yx}, p_{xy} = p_{yx}$ и $q_{xy} = q_{yx}$ в системах (3.1), (3.3) осуществляется простым подсчетом: кстати, они однажды использовались при пополнении системы. Остальные три равенства $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \theta_{xy} = \theta_{yx}$ и $t_{xy} = t_{yx}$ в конечном итоге преобразуются в следующие:

$$H^1(x, y; U, V, p, q, \tau, \theta, t) \equiv f_y^3 - f_x^4 + f_U^3 \cdot p - f_U^4 \cdot p + f_p^3 \cdot t - f_p^4 \cdot f^1 -$$
$$-f_q^4 \cdot t + f_\tau^3 \cdot f^4 - f_\tau^4 \cdot f^3 + f_\theta^3 \cdot f^5 - f_\theta^4 \cdot f^4 + f_t^3 f^7 - f_t^4 \cdot f^6 = 0,$$
$$H^2(x, y; U, V, p, q, \tau, \theta, t) \equiv f_y^4 - f_x^5 + f_U^4 \cdot p - f_U^5 \cdot q + f_V^4 \cdot \theta - f_V^5 \cdot \tau +$$
$$+f_p^4 \cdot t - f_p^5 \cdot f^1 + f_q^3 \cdot f^2 - f_q^5 \cdot t + f_\tau^4 \cdot f^4 - f_\tau^4 f^3 + f_\theta^4 \cdot f^5 - f_\theta^5 \cdot f^4 +$$
$$+f_t^4 \cdot f^7 - f_t^5 \cdot f^6 = 0, \quad (3.5)$$
$$H^3(x, y; U, V, p, q, \tau, \theta, t) \equiv f_y^6 - f_x^7 + f_U^6 \cdot q - f_U^7 \cdot p + f_V^6 \cdot \theta - f_V \cdot \tau + f_p^6 \cdot t -$$
$$-f_p^7 \cdot f^1 + f_q^6 f^2 - f_q^7 t + f_\tau^6 f^4 - f_\tau^7 f^3 + f_\theta^6 \cdot f^5 - f_\theta^7 \cdot f^4 + f_t^6 \cdot f^7 - f_t^7 f^6 = 0$$

Поскольку (3.1) и (3.3) получены эквивалентными преобразованиями из (1.2), то начальные условия для этой системы задаются в виде

$$[U]_0 = c_1, [V]_0 = c_2, [U_x] = c_3, \left[U_y\right]_0 = c_4, [V_x]_0 = c_5, \left[V_y\right]_0 = c_6, \left[U_{xy}\right]_0 = c_7. \quad (3.6)$$

На основе вышеизложенной схемы исследования, приводящей нелинейную систему к квазилинейной системе в полных дифференциалах, можно считать доказанной следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $f^i \in C^2(\Pi)$ и выполняются условия $f_t^1 \neq 0, f_t^2 \neq 0, 1 - f_t^1 \cdot f_t^2 \neq 0$. Если тождественно относительно $U, V, U_x, U_y, V_x, V_y, U_{xy}$ выполняются все три условия (3.5) и $\alpha \leq min\left(a, \frac{b}{M}\right). M = max\left|f^i\right|$, то на $\Pi(a, b)$ задача (1.2), (3.6) разрешима единственным образом.

Иными словами, при выполнении условий теоремы 2 многообразие решений системы (1.2) содержит семь произвольных постоянных $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$.

Литература

1. Goursat E. Lecons sur l'inteqration des equations aux derives partielles du premier ordre. – Paris. - 1921. - 454 p.
2. Михайлов Л.Г. Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. - Душанбе, 1986. - 116 с.
3. Пиров Р. Исследования некоторых переопределенных нелинейных систем уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями на плоскости // Автореферат диссертации на соискание учёной степени к.ф.-м.н., Душанбе, 1984. - 11 с.
4. Пиров Р. Исследование некоторых нелинейных систем уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией на плоскости. // Крайові задачі для диференціалних рівнянь. Выпуск 14. - Чернівці. Прут. 2006. - С.313-320.
5. Пиров Р. Об условиях совместности и многообразия решения некоторых систем пяти дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка на плоскости / Р. Пиров, Ф. Ш. Рахимов // Вестник педуниверситета. - Душанбе, 2007. - С. 6-7.
6. Пиров Р. К теории нелинейных систем трёх и четырёх дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией в пространстве // Международная конференция «Функциональные пространства и теория приближения функций», посвящённая 110-летию академика С.М. Никольского. МИ АН. - Москва (тезисы докладов), 2015. - С. 199-201.
7. Пиров Р. Условия совместности и многообразия решений одной нелинейной системы пяти дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в пространстве. // Труды математического центра имени. Н.И. Лобачевского «Теория функций, её приложения и смежные вопросы». – Казань, 2015. - Т.51. - С.348-352.
8. Пиров Р. К теории нелинейных переопределенных систем, состоявших из трёх и четырёх дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией в пространстве // Изв. АН РТ. отд.физ-мат., хим,геог. техн.н. - 2015. № 1,(158). - С.32-41.
9. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Мир, 1970. - 720 с.

ДАР БОРАИ БАЪЗЕ СИСТЕМАҲОИ ҒАЙРИХАТИИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ БО ҲОСИЛАҲОИ ХУСУСИИ ТАРТИБИ ДУ

Пиров Р.

Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С. Айнӣ

Дар кор системаҳои ғайрихатии панҷ муодиладори ҳосилаҳои хусусидори тартиби дуи як ва ду номаълум дошта омӯхта шудаанд. Барояшон шартҳои ошкори ҳамҷоягӣ ёфта шудаанд, ки мавҷудият ва ягонагии ҳалли масъаларо бо шартҳои ибтидоӣ таъмин менамояд.

Калимаҳои калидӣ: шартҳои ҳамҷоягӣ, маҷмуаи ҳалҳо, системаҳои барзиёдмуайяншуда.

ABOUT OF THE NONLINEAR SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF SECOND ORDER

Pirov R.

Tajik State Pedagogical University named by S. Ayni

In the paper the one nonlinear system, the five differential equation in the partial differential the second order with the one unknow function in the place. Obtain the explicit conditions compatibility, securing the unique solvability problems with initial data.

Key words: compatibility conditions, the variety of solutions, overdetermined systems.

Сведения об авторе. **Пиров Рахмон,** к.ф.-м.н., профессор кафедры математического анализа ТГПУ имени С. Айни. 734003, Душанбе, ул. С. Носирова 27, кв.93, тел: 919437075, Email: pirov_60@mail.ru.

УДК 517.968.2.

О НЁТЕРОВОСТИ И ИНДЕКСЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОДВИЖНЫМИ И ФИКСИРОВАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Джангибеков Г.[1], Одинабеков Д.М. [2], Худжаназарова Г.Х. [1]

[1]***Таджикский национальный университет***

[2] ***Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе***

В работе изучаются некоторые классы двумерных сингулярных интегральных операторов с подвижными и фиксированными особенностями по ограниченной области. Найдены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости операторов в лебеговых пространствах и получена формула для вычисления индекса.

Ключевые слова: *сингулярные интегральные операторы, нётеровость оператора, индекс оператора, символ оператора.*

Пусть D конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Г и содержащая внутри точку $z = 0$; $\overline{D} = D \cup \Gamma$.

В весовом пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$:

$$L_{\beta-2/p}(D) = \{f(z): |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L_{\beta-2/p}} = ||F||_{L_p}\}$$

$(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ будем рассматривать интегральное уравнение

$$\begin{aligned}(Af)(z) \equiv\ & a(z)f(z) + b(z)\left(\frac{z}{|z|}\right)^n (Sf)(z) + c(z)(Bf)(z) + d(z)\left(\overline{B}f\right)(z) + \\ +\ & e(z)\left(B\overline{f}\right)(z) + q(z)\left(\overline{B}\overline{f}\right)(z) + \lambda(z)\left(SB\overline{f}\right)(z) + \mu(z)\left(\overline{B}S\overline{f}\right)(z) + \\ +\ & \nu(z)\left(SB\overline{S}f\right)(z) + \gamma(z)(SBf)(z) + \delta(z)\left(B\overline{S}f\right)(z) + \\ +\ & (H_1 f)(z)K + (H_2 f)(z) = g(z), \quad z \in D, \end{aligned} \tag{1}$$

где n – целое число,

$a(z), b(z), c(z), d(z), e(z), q(z), \lambda(z), \mu(z), \nu(z), \gamma(z), \delta(z)$ непрерывные в $\overline{D}$ функции, а операторы $K, S, \overline{S}, B, \overline{B}, H$ действуют по формулам

$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, \quad (Sf)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(\zeta - z)^2}, \quad \overline{S} = KS,$$

$$(Bf)(z) = \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\omega\prime(z)\overline{\omega\prime(\zeta)}f(\zeta)}{(1-\omega(z)\overline{\omega(\zeta)})^2} ds_\zeta, \quad \overline{B} = KB,$$

$$(H_1 f)(z) = \frac{1}{|z|^2}\left(\frac{z}{|z|}\right)^{n-2} \iint_D Q_1(z,\zeta) h_1\left(\frac{\zeta}{z}\right)\overline{f(\zeta)}ds_\zeta,$$

$$(H_2 f)(z) = \frac{1}{|z|^2}\iint_D Q_2(z,\zeta) h_2\left(\frac{\zeta}{z}\right) f(\zeta)ds_\zeta,$$

где $\omega(z)$ – однолистное комформное отображение области D на единичный круг с центром в начале координат, причем $\omega(0) = 0, \omega'(0) > 0$. Штрих обозначает производную, черта над функцией – операцию комплексного сопряжения, $Q_j(z,\zeta)$ $(j = 1,2)$ – измеримые ограниченные функции, имеющие пределы

$$\lim_{z,\zeta \to 0} Q_j(z,\zeta) = Q_j(0,0);$$

$h_1(\sigma)$ - измеримые на всей плоскости функции, причем

$$\iint_{|\sigma|<1} |h_j(\sigma)||\sigma|^{-\beta} ds_\sigma < \infty, \tag{2}$$

где β - некоторое число из интервала $(0,2)$, ds_σ - элемент плоской меры Лебега.

Поскольку уравнение (1) содержит комплексно сопряженное значение искомой функции, то пространство $L^p_{\beta-2/p}(D)$ будем считать вещественным, т.е. рассматривать его как линейное множество над полем вещественных чисел.

Тогда все операторы из (1) будут обычными линейными ограниченными операторами.

Характерной особенностью уравнения (1) является, то, что оно содержит как интеграл с подвижной $\zeta = z$ (сингулярный) особенностью, так и интегралы с неподвижной $\zeta = z$ особенностью, причем коэффициент при сингулярном интеграле имеет в точке $z = 0$ существенный разрыв вида $(z/|z|)^n, n$ - целое число. Как выясняется, наличие этого разрыва существенно влияет на нетеровость и индекс уравнения (1). Различные частные случаи уравнения (1) изучены в работах [1-5] (см.таже монографию [6]). Интегральным операторам с суммируемыми однородными ядрами посвящены работы [7-10].

1. Некоторые вспомогательные утверждения

Прежде всего заметим, что ограниченность в весовом пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D), 1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$ сингулярного оператора S и операторов H_1, H_2, с суммируемыми однородными ядрами степени (-2), соответственно следует из [11] и [7,10]. Далее имеет место

Лемма 1. *Пусть $a(z)$ непрерывна в $\overline{D}$. Тогда оператор $aS - Sa$ вполне непрерывен в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D),\ 1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2$.*

Для того, чтобы убедиться в справедливости этой леммы, достаточно равномерно аппроксимировать $a(z)$ функциями, непрерывными по Г и сослаться затем на [12] (стр.38).

Лемма 2. *Если $f(z) \in L^p_{\beta-2/p}(D)$, то*

$$(S\overline{S}f)(z) = f(z) - (Bf)(z) + (Tf)(z), \quad z \in D,$$

где T - вполне непрерывный в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ оператор.

Следствие 1. *Операторы B и $\overline{B}$ ограничены в $L^p_{\beta-2/p}(D)$.*

Лемма 3. *Операторы $S\overline{B}, BS, B\overline{B}, \overline{B}SB$ вполне непрерывны в $L^p_{\beta-2/p}(D)$.*

Лемма 4. *Интегральные операторы $B, SB, \overline{B}S, SB\overline{S}$ не являются вполне непрерывными в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$, причем их ядра теряют непрерывность, лишь при совпадении обеих переменных на границе Γ.*

Лемма 5. *Если $c(z)$ непрерывна в $\overline{D}$ и $c(t) = 0$ при $t \in \Gamma$, то оператор $c(z)B$ вполне непрерывен в $L^p_{\beta-2/p}(D)$.*

Доказательство лемм 2-5 можно найти в работе [4].

2. Модельное интегральное уравнение с однородными ядрами

В этом пункте будем рассматривать следующее модельное интегральное уравнение

$$\begin{aligned}(A_0 f)(z) \quad &\equiv a(0)f(z) - \frac{b(0)}{\pi}\left(\frac{z}{|z|}\right)^n \iint_D \frac{\overline{f(\zeta)}}{(\zeta - z)^2}\, ds_\zeta + \\ &+ \frac{c_0}{\pi}\iint_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(1 - z\bar{\zeta})^2} + \frac{Q_1(0,0)}{|z|^2}\left(\frac{z}{|z|}\right)^{n-2} \iint_D h_1\left(\frac{\zeta}{z}\right)\overline{f(\zeta)}ds_\zeta + \\ &+ \frac{Q_2(0,0)}{|z|^2}\iint_D h_2\left(\frac{\zeta}{z}\right) f(\zeta)ds_\zeta = g(z), \quad z \in D,\end{aligned} \tag{3}$$

где $c_0 = 0,$ если $a(0) \neq 0,$ равно 1, если $a(0) = 0;$ n – целое число. Временно будем считать, что $D = \{z: |z| < 1\}$.

Как показано в [3] модельное уравнение (3) редуцируется к бесконечной совокупности интегральных уравнений с ядрами однородными порядка -1 относительно коэффициентов Фурье $f_k(r)$ искомой функции $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(r)e^{ik\varphi}, \quad f_k(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)e^{-ik\varphi}d\varphi, \quad z = re^{i\varphi}.$$

Доказывается, что найденная из этих уравнений система функций $\{f_k(r)\}$ - образует совокупность коэффициентов Фурье некоторый функции из пространства $L^p_{\beta-2/p}(D)$. Затем применяя к этим одномерным интегральным уравнениям результаты из [9], для уравнения (3) получим необходимые и достаточные условия нетеровости и вычислен их индекс.

Положим

$$\mathcal{G}_m(x;\beta) = \frac{1}{|a(0)|^2 - |b(0)|^2}\left[\mathcal{H}_m^{(2)}(x;\beta)\widetilde{\mathcal{H}}_{-m+n-2}^{(2)}(x;\beta) - \right.$$

$$\left. - \widetilde{\mathcal{H}}_m^{(1)}(x;\beta)\mathcal{H}_{-m+n-2}^{(1)}(x;\beta)\right], \tag{4}$$

где $m = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots, \beta -$ число из (2), $-\infty < x < \infty,$

n_0 – целая часть числа $\frac{n-1}{2}$;

$$\mathcal{H}_\nu^{(1)}(x;\beta) = b(0)\frac{\nu + \beta - ix}{\nu + 2 - \beta + ix} + Q_1(0,0)\iint_{|\sigma|<\infty} h_1(\sigma)e^{-i\nu\alpha}|\sigma|^{-\beta+ix}ds_\sigma,$$

$$\widetilde{\mathcal{H}}_\nu^{(1)}(x;\beta) = \overline{b(0)}\frac{\nu + \beta - ix}{\nu + 2 - \beta + ix} + \overline{Q_1(0,0)}\iint_{|\sigma|<\infty} \overline{h_1(\sigma)}e^{-i\nu\alpha}|\sigma|^{-\beta+ix}ds_\sigma,$$

$$\mathcal{H}_\nu^{(2)}(x;\beta) = a(0) + Q_2(0,0)\iint_{|\sigma|<\infty} h_2(\sigma)e^{-i\nu\alpha}|\sigma|^{-\beta+ix}ds_\sigma,$$

$$\widetilde{\mathcal{H}}_\nu^{(2)}(x;\beta) = \overline{a(0)} + \overline{Q_2(0,0)}\iint_{|\sigma|<\infty} \overline{h_2(\sigma)}e^{-i\nu\alpha}|\sigma|^{-\beta+ix}ds_\sigma,$$

ν- целое число, $\alpha = arg\sigma$.

Функции $\mathcal{G}_m(x;\beta)$ непрерывны при $-\infty < x < \infty$, причем её предел на бесконечности $\lim_{|x|\to\infty}\mathcal{G}_m(x;\beta) = 1$.

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение (3) было нетеровым в* $L^p_{\beta-2/p}(D)(1<p<\infty, 0<\beta<2)$, *необходимо и достаточно выполнение условий:*

$$a) \quad |a(z)| \neq |b(z)|, \quad z \in \overline{D},$$

$$b) \quad G_m(x;\beta) \neq 0, \ -\infty < x < \infty, \ m = n_0, n+1, \ldots,$$

причем индекс уравнения (3) равен

$$æ = 2\sum_{k=n_0+1}^{N_0} Ind_{-\infty<x<\infty} G_m(x;\beta) + \mu Ind_{-\infty<x<\infty} G_{n_0}(x;\beta),$$

где N_0 *- некоторое натуральное число, μ=1, если* n *четно и μ=2, если* n *нечетно*

Теорема 2. *Если условия a), b) нарушены, то оператор* A_0 *из (3) не может иметь ни левого, ни правого ограниченных регуляризаторов в* $L^p_{\beta-2/p}(D)$.

3. Алгебра сингулярных операторов с непрерывными коэффициентами

В этом пункте рассмотрим алгебру $\mathcal{R}$, порожденную всеми действующими в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(1<p<\infty, 0<\beta<2)$ операторами вида

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = \ & aI + bSK + cB + d\overline{B} + eBK + q\overline{B}K + \lambda SBK + \\ & + \mu\overline{B}SK + \nu SB\overline{S} + \gamma SB + \delta B\overline{S} + T, \end{aligned} \tag{5}$$

где все коэффициенты – непрерывные в $\overline{D}$ функции, T - вполне непрерывный оператор.

Лемма 6. *Оператор* $\mathcal{M}$, *заданный формулой (5), является элементом алгебры* $\mathcal{R}$; *и обратно всякий оператор из алгебры* $\mathcal{R}$ *представим в виде (5), при этом, если операторы* $\mathcal{M}_j$ *с коэффициентами* $a_j, b_j, c_j, d_j, e_j, q_j, \lambda_j, \mu_j, \nu_j, \gamma_j, \delta_j$ $(j = 0,1)$ *имеют вид (5), то оператор* $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$ *имеет такой же вид, причём его коэффициенты находятся по следующим формулам:*

$$\begin{aligned} a &= a_1a_2 + b_1\overline{b_2}, \quad b = a_1b_2 + \overline{a_2}b_1, c = (a_1+c_1)c_2 + c_1a_2 + e_1\overline{q_2} + \delta_1\gamma_2 - b_1\overline{b_2}, \\ & d = (a_1+d_1)d_2 + \left(\overline{b_2} + \overline{\lambda_2}\right)\mu_1 + a_2d_1 + q_1\overline{e_2} + b_1\overline{\lambda_2}, \\ & e = (a_1+c_1)e_2 + (b_2+\lambda_2)\delta_1 + \left(\overline{a_2} + \overline{d_2}\right)e_1, \\ & q = (a_1+d_1)q_2 + (\overline{a_2} + \overline{c_2})q_1 + (b_1+\mu_1)\overline{\gamma_2}, \\ & \lambda = (a_1+d_1)\lambda_2 + \left(\overline{a_2} + \overline{d_2}\right)\lambda_1 + b_2\nu_1 + b_1\overline{d_2} + \gamma_1e_2, \\ & \mu = (a_1+d_1)\mu_2 + (\overline{a_2} + \nu_2)\mu_1 + b_2d_1 + b_1\overline{\nu_2} + q_1\overline{\delta_2}, \\ & \nu = (a_1+\nu_{01})\nu_2 + a_2\nu_1 + \overline{b_2}\lambda_1 + \gamma_1\delta_2 + (\lambda_1+b_2)\overline{\mu_2}, \\ & \gamma = (a_1+\nu_1)\gamma_2 + (a_2+c_2)\gamma_1 + (b_1+\lambda_1)\overline{q_2}, \\ & \delta = (a_1+c_1)\delta_2 + (a_2+\nu_2)\delta_1 + \left(\overline{b_2} + \overline{\mu_2}\right)e_1. \end{aligned} \tag{6}$$

Каждому оператору $\mathcal{M} \in \mathcal{R}$ сопоставим в качестве символа матрицу вида

$$\sigma_{\mathcal{M}}(z,t) = \begin{pmatrix} \Delta(z) & 0 \\ 0 & D(t) \end{pmatrix},$$

где

$$\Delta(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ \overline{b(z)} & \overline{a(z)} \end{pmatrix},\ z \in \overline{D},$$

$$D(t) = \begin{pmatrix} a(t)+c(t) & e(t) & \delta(t) \\ \overline{q(t)} & \overline{a(t)}+\overline{d(t)} & \overline{b(t)}+\overline{\mu(t)} \\ \gamma(t) & b(t)+\lambda(t) & a(t)+\nu(t) \end{pmatrix},\ t \in \Gamma,$$

т.е. матрица-функция $\sigma_{\mathcal{M}}(z,t)$ непрерывна на компакте $\overline{D} \times \Gamma$. Множество определенных таким образом символов обозначим через $\mathcal{N}$.

Лемма 7. *Символ $\sigma_{\mathcal{M}}(z,t) \in \mathcal{N}$ оператора $\mathcal{M} \in \mathcal{R}$ тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда $\mathcal{M} \in \mathcal{T}$, где $\mathcal{T}$ обозначает идеал содержащихся в $\mathcal{R}$ вполне непрерывных операторов.*

Теорема 3. *Для того чтобы произвольный оператор $\mathcal{M}$ из алгебры $\mathcal{R}$ был нетеровым в $L^p_{\beta-2/p}(D)(1<p<\infty, 0<\beta<2)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$|a(z)| \neq |b(z)| \ \text{ при } z \in \overline{D},\ detD(t) \neq 0 \text{ при } t \in \Gamma.$$

При выполнении этих условий индекс оператора $\mathcal{M}$ равен

$$æ = -\frac{1}{\pi}[\mathrm{arg det} D(t)]_{\Gamma}.$$

4. Исходное интегральное уравнение (1)

В этом пункте в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)(1<p<\infty, 0<\beta<2)$ рассматривается исходное сингулярное интегральное уравнение (1).

Лемма 8. *Пусть $a(z), b(z), c(z), d(z), e(z), q(z), \lambda(z), \mu(z), \nu(z), \gamma(z), \delta(z),\ Q_1(z), Q_2(z), h_1(\sigma), h_2(\sigma)$ удовлетворяют указанным выше условиям и $|a(0)| \neq |b(0)|$. Тогда*

$$A = A_0\mathcal{M} + T, \tag{7}$$

где T – вполне непрерывный оператор, A_0 и $\mathcal{M}$ соответственно операторы из (3) и (5) причем все коэффициенты оператора $\mathcal{M}$ непрерывны в $\overline{D}$ и определяются через коэффициенты операторов A и A_0 в соответствии с формулой (6). При этом коэффициент при сингулярном операторе S в $\mathcal{M}$ обращается в точке $z=0$ в ноль.

Теперь зная результаты для операторов $A_0, \mathcal{M}$, на основе известных фактов теории линейных операторов можем получить условия нетеровости уравнения (1) в $L^p_{\beta-2/p}(1<p<\infty, 0<\beta<2)$ и формулу для вычисления его индекса в случае, когда $D = \{z: |z| < 1\}$.

Пусть теперь D – произвольная область, описанная в начале статьи. Произведем в уравнении (1) замену переменных: $z = \chi(\sigma), \zeta = \chi(w)$, где $\chi(\sigma)$ – отображение, обратное к $\omega(z)$ из формулы для ядра оператора B. В результате, учитывая некоторые свойства конформного отображения (см.[13,с.399,411]), получим эквивалентное A_0 оператор

$$A_{01} =$$

$$= a_{01}(\sigma)f_1(\sigma) + \frac{b_{01}(\sigma)}{\pi}\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^n \iint_{|w|<1} \frac{\overline{f_1(w)}}{(w-\sigma)^2} ds_w + \frac{c_{01}(\sigma)}{\pi} \iint_{|w|<1} \frac{f_1(w)}{(1-\overline{w}\sigma)^2} ds_w +$$

$$+ \frac{Q_1(0,0)}{|\chi(\sigma)|^2}\left(\frac{\chi(\sigma)}{|\chi(\sigma)|}\right)^{n-2} \iint_{|w|<1} h_1\left(\frac{\chi(w)}{\chi(\sigma)}\right) |\chi'(w)|^2 \overline{f_1(w)} ds_w +$$

$$+ \frac{Q_2(0,0)}{|\chi(\sigma)|^2} \iint_{|w|<1} |\chi'(w)|^2 h_2\left(\frac{\chi(w)}{\chi(\sigma)}\right) f_1(w) ds_w + (T_2 f_1)(\sigma),$$

где T_2 – вполне непрерывный в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ оператор, $f_1(\sigma) = f(\chi(\sigma)),\ a_1(\sigma) = a(\chi(\sigma)), c_1(\sigma) = c(\chi(\sigma)),$

$$b_{01}(\sigma) = \left(\frac{|\sigma|\chi(\sigma)}{\sigma|\chi(\sigma)|}\right)^n \frac{\overline{\chi'(\sigma)}}{\chi'(\sigma)} b(\chi(\sigma)).$$

При этом, если $f(z) \in L^p_{\beta-2/p}(D)$, то $f_1(\sigma) \in L^p_{\beta-2/p}(|\sigma| < 1)$ и обратно, а из непрерывности $a(z), b(z), c(z)$ в D следует непрерывность $a_{01}(\sigma), b_{01}(\sigma), c_{01}(\sigma)$ при $|\sigma| \le 1$. Поскольку из условия $\omega'(0) > 0$ вытекает, что $\chi'(0) > 0$, то $b_{01}(0) = b(0)$.

Следующая лемма дает возможность получить условия нетеровости и индекс уравнения (1) по схеме пункта 1.

Лемма 9. *Пусть $\chi(\sigma)$ – однолистное конформное отображение единичного круга $|\sigma| < 1$ на область D, причем $\chi(0) = 0, \chi'(0) > 0$, а $h(\sigma)$ – измеримая функция, удовлетворяющая условию (2) и n-целое число. Тогда оператор Θ,*

$$(\Theta f)(z) = \frac{1}{|\chi(\sigma)|^2}\left(\frac{\chi(\sigma)}{|\chi(\sigma)|}\right)^n \iint_{|\omega|<1} h\left(\frac{\chi(\omega)}{\chi(\sigma)}\right) |\chi'(\omega)|^2 f(\omega) ds_\omega -$$

$$- \frac{1}{|\sigma|^2}\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^n \iint_{|\omega|<1} h\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) f(\omega) ds_\omega, \qquad |\sigma| < 1,$$

вполне непрерывен в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(|\sigma| < 1), \quad 0 < \beta < 2, \quad 1 < p < \infty.$

Теорема 4. *Для того чтобы уравнение (1) было нетеровым в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$, необходимо и достаточно выполнение условий:*

$$a) \quad |a(z)| \not\equiv |b(z)|, \quad z \in \overline{D}; \quad \det D(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma,$$

$$b) \quad G_m(x;\beta) \neq 0,\ -\infty < x < \infty,\ m = n_0, n+1, \ldots,$$

причем индекс уравнения (1) равен

$$æ = -\frac{1}{\pi}[\mathrm{arg}\det D(t)]_\Gamma + 2\sum_{k=n_0+1}^{N_0} Ind_{-\infty<x<\infty} G_m(x;\beta) +$$

$$\mu Ind_{-\infty<x<\infty} G_{n_0}(x;\beta),$$

где N_0 *- некоторое натуральное число,* μ*=1, если* n *четно и* μ=2*, если* n *нечетно.*

Теорема 5. *Если условия a), b) нарушены, то оператор A из (1) не может иметь ни левого, ни правого ограниченных регуляризаторов в* $L^p_{\beta-2/p}(D)$.

Литература

1. Бильман Б.М. Об условиях нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами / Б.М. Бильман, Г. Джангибеков // Доклады АН СССР, 1986. - Т.288. - №4. - С.792-797.
2. Джангибеков Г. Нетеровость и индекс некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов // Доклады АН Тадж. ССР, 1987. - Т.30. - №7. - С.400-405.
3. Бильман Б.М. Об условиях нётеровости и индексе некоторых особых двумерных интегральных уравнений / Б.М. Бильман, Г. Джангибеков // Доклады АН СССР, 1990. - Т.312. - №1. - С.15-19.
4. Джангибеков Г. Нётеровость и индекс некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов // Известия Вузов, математика, 1991. - Т.1. - С.19-28.
5. Бойматов К.Х. О нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных уравнений с разрывными коэффициентами / К.Х. Бойматов, Г. Джангибеков // Успехи математических наук, 1988. - Т.43. - №.8. - С.171-172.
6. Джураев А. Метод сингулярных интегральных уравнений // М.: Наука, 1987, 415с.
7. Михайлов Л.Г. О некоторых многомерных интегральных операторах с однородными ядрами / Л.Г. Михайлов // Доклады АН СССР, 1967. - Т.176. - №2. - С.263-265.
8. Михайлов Л.Г. Многомерные интегральные уравнения с однородными ядрами / Л.Г. Михайлов // Сборник трудов симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа. - Тбилиси, 1973. - Т.1. - С.182-191.
9. Михайлов Л.Г. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени (-1) // Дониш, Душанбе. - 1966. 49с.
10. Бильман Б.М. Об условиях полной непрерывности некоторых многомерных интегральных операторов с однородными ядрами // Доклады АН СССР, 1971. - Т.197. - №1. - С. 14-17.
11. Stein E.M. On singular integrals // Proc.Amer.Math.Soc., 1957. - V. 8. - №2. - P.250-254.
12. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные

уравнения. - М.: Физматгиз, 1962. - 254 с.
13. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного // М.: Наука, 1966. - 626 с.

ОИДИ НЁТЕРОВӢ ВА ИНДЕКСИ ЯКЧАНД СИНФҲОИ ОПЕРАТОРҲОИ ИНТЕГРАЛИИ ДУЧЕНАКА БО МАХСУСИЯТҲОИ ҲАРАКАТКУНАНДА ВА ҚАЙДКАРДАШУДА

Ҷангибеков Г. [1], Одинабеков Ҷ. М.[2], Хуҷаназарова Г. Х. [1]

[1]Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

[2] Филиали Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В. Ломоносов дар ш.Душанбе

Дар мақола баъзе синфҳои операторҳои интегралии дученака бо махсусиятҳои ҳаракаткунанда ва қайдкардашуда дар соҳаи маҳдуд омӯхта шудааст. Шартҳои зарурӣ ва кифоягии эффективии нётеровӣ будани ин операторҳо дар фазои Лебегӣ ёфта шуда, барои ҳисоб намудани индекси онҳо формула ҳосил карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: оператори интегралии сингулярӣ, нётеровӣ будани оператор, индекси оператор, символи оператор.

NOETHER PROPERTY AND THE INDEX OF SOME CLASSES OF TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL OPERATORS WITH MOBILE AND FIXED SINGULARITIES

Jangibekov G. [1], Odinabekov J. M. [2], Khujanazarova G. Kh. [1]

[1]Tajik National University

[2]The branch of Lomonosov Moscow State University in Dushanbe

In this article we explores some classes of system of two dimensional singular integral operators and on a limited area. We found an effective necessary and sufficient conditions for Noetherian in the space of Lebeg and the formula for the rate us index.

Key words: singular intergral operation, noetherian operators, the index of operator, operator

Сведения об авторах. **Джангибеков Гулходжа** – д.ф.-м.н., профессор кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений ТНУ. E-mail: gulkhoja@list.ru

Одинабеков Джасур Музофирович – к.ф.-м.н., зав. кафедрой фундаментальных и естественных наук Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе. E-mail: jasur_79@ inbox. ru

Худжаназарова Гулшод Худжаназаровна – к.ф.-м.н., зав. кафедрой функционального анализа и дифференциальных уравнений ТНУ. E-mail: gulshod@mail.ru

УДК 517.927

К ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ГРАФАХ

Мустафокулов Р.[1], Солиев С.К.[2]
[1]Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе
[2]Таджикский национальный университет

В статье определяются понятия геометрического графа, дифференциального уравнения и краевой задачи на графах, приводятся условия разрешимости одной краевой задачи для дифференциального уравнения 4-го порядка на геометрическом графе.

Ключевые слова: *геометрический граф, краевая задача на графе, невырожденность, знакорегулярность.*

В последние годы дифференциальные уравнения на графах привлекают внимание многих исследователей. Это объясняется тем, что многие современные технические конструкции часто допускают структурную формализацию в виде одномерных континиумов, взаимодействующих через связывающие их узлы. Протекающие в таких устройствах процессы описываются классическими математическими моделями, реализуемыми на геометрических графах (см. [1]).

В настоящей работе определяется понятие дифференциального уравнения 4 - го порядка на геометрических графах, ставятся для таких уравнений краевые задачи и приводятся условия их разрешимости. Отметим, что дифференциальное уравнение 4 - го порядка на случай общего графе было изучено подробно в работе [2], а в работе [3] такое уравнение было рассмотрено на одномерном графе - цепочке. Относительно терминологий и обозначений (см. [1]).

Под *геометрическим графом* понимается связное ограниченное множество Г, имеющее структуру сети и вложенное в R^2. *Ребро графа* - это интервал, а *вершины графа* - точки, являющиеся концом одного или нескольких ребер. Будем считать, что ребра графа занумерованы и обозначим их через γ_i, а вершины через a или a_i. Множество всех ребер графа обозначим через R(Г), а множество всех его вершин - через V(Г); при этом, вершины, к которым примыкают два и более ребра, называются *внутренними*; их множество обозначается через $\mathcal{I}$(Г), а вершины, к которым примыкает только одно ребро - граничными; их множество обозначается через $\mathcal{D}$Г. Граф - это объединение множеств R(Г) и $\mathcal{I}$(Г); множество $\mathcal{D}$Г не входит в граф Г.

Ребра, примыкающие к граничным вершинам, называются *плечевыми*. Внутренняя вершина графа, к которой примыкает хотя бы одно плечевое ребро, называется *приграничным*. Те вершины $a \in \mathcal{I}(\Gamma)$, к которым примыкают только внутренние ребра графа, называются строго внутренними вершинами графа.

Множество индексов i, для которых $a \in \gamma_i$, обозначим через $\mathrm{I}(a)$.

Под функцией на графе Γ понимается отображение u: $\Gamma \to \mathrm{R}^1$. Через $u_i(x)$ обозначается сужение функции $u(x)$ на ребро γ_i. Через $\mathrm{C}[\mathrm{R}(\Gamma)]$ обозначается пространство функций, равномерно непрерывных на каждом ребре графа Γ. Для каждой функции $u(x) \in \mathrm{C}[\mathrm{R}(\Gamma)]$ в каждой вершине $a \in \mathrm{V}(\Gamma)$ при $i \in \mathrm{I}(a)$ существует предел $\lim\limits_{\gamma_i \ni x \to a} u(x) = u_i(a)$. При этом, при $a \in \mathcal{I}(\Gamma)$, для различных $i, j \in \mathrm{I}(a)$ величины $u_i(a)$ и $u_j(a)$ не обязаны совпадать как между собой, так и с самым значением функции $u(a)$. Выделим из пространства $\mathrm{C}[\mathrm{R}(\Gamma)]$ множества функций, для которых в каждой вершине $a \in \mathcal{I}(\Gamma)$ при любом $i \in \mathrm{I}(a)$ выполнено равенство $u_i(a) = u(a)$. Обозначим это множество через $\mathrm{C}(\Gamma)$ и назовём их непрерывными на графе Γ.

Производная функции, заданной на графе Γ определяется следующим образом. Пусть μ: $\mathrm{R}(\Gamma) \to \mathrm{R}^1$ - голоморфное отображение каждого ребра $\gamma_i \subset \mathrm{R}(\Gamma)$ на некоторый конечный интервал $(0,\ l_i)$. Функция $u(x) \in \mathrm{C}[\mathrm{R}(\Gamma)]$ называется *дифференцируемой на графе* Γ, если для каждого ребра $\gamma_i \subset \mathrm{R}(\Gamma)$ сужение $u_i(x)$ дифференцируемо на γ_i относительно функции $\mu_i(x)$. При этом для точки $x_0 \in \gamma_i$ полагается

$$u'_i(x_0) = \frac{du_i(x_0)}{d\mu_i(x_0)} = \lim_{\gamma_i \ni x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{\mu(x) - \mu(x_0)}.$$

Аналогично определяются производные высших порядков. Отметим, что так определенные производные нечётных порядков зависят от ориентации ребер графа, а производные чётных порядков от ориентации ребер не зависят. В дальнейшем, при записи условий согласований с производными в вершинах графа, мы будем пользоваться обозначением $u_i'(a+0)$ $\big(u_i'(a-0)\big)$, которое означает производную по направлению “от вершин” (соответственно “к вершине”).

Под *дифференциальным уравнением на графе* Γ понимается совокупность уравнений на ребрах γ_i:

$$(p_i(x)u_i'')'' - (q_i(x)u_i')' = f_i(x) \qquad \big(x \in \gamma_i \subset \mathrm{R}(\Gamma)\big), \tag{1}$$

где $p(x) \in \mathrm{C}^2[\mathrm{R}(\Gamma)]$, $q(x) \in \mathrm{C}^1[\mathrm{R}(\Gamma)]$, $f(x) \in \mathrm{C}[\mathrm{R}(\Gamma)]$, вместе с условиями согласования в каждой вершине $a \in \mathrm{V}(\Gamma)$:

$$\left.\begin{aligned} u_i(a) = u_j(a) \qquad & \forall i, j \in \mathrm{I}(a), \\ \mu_i(a)u_i''(a) - \nu_i(a)u_i'(a+0) = 0 \qquad & \big(i \in \mathrm{I}(a)\big), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $\mu_i(a)$, $\nu_i(a) \geq 0$, причем $\mu_i(a) + \nu_i(a) > 0$ для всех $a \in \mathrm{V}(\Gamma)$ и условиями с третьими производными во внутренних вершинах $a \in \mathcal{I}(\Gamma)$:

$$\sum_{i \in \mathrm{I}(a)} D^3 u_i(a+0) + \rho(a) u(a) = F(a), \qquad (3)$$

где через $D^3 u$ обозначена третья квазипроизводная $(p(x)u'')' - q(x)u'$, а коэффициент $\rho(a)$ считается заданным и неотрицательным.

Для уравнения на графе рассматривается *краевая задача*, задавая в каждой из граничных вершин $a \in \mathcal{D}\Gamma$, наряду с (2), ещё условия вида

$$u(a) - \alpha(a) D^3 u(a) = 0, \qquad (4)$$

где $\alpha(a) \geq 0$ для всех $a \in \mathcal{D}\Gamma$. Если коэффициент $\alpha(a) = 0$ $(a \in \mathcal{D}\Gamma)$, то соответствующая краевая задача называется задачей Дирихле.

Решением краевой задачи $(1) - (4)$ на графе Γ называется всякая функция $u(x) \in \mathrm{C}^4[\mathrm{R}(\Gamma)]$, удовлетворяющая на каждом ребре γ_i соответствующему уравнению (1), а в каждой вершине $a \in \mathcal{I}(\Gamma)$ - условиям связи (2), (3) и граничным условиям (2), (4) в граничных вершинах $a \in \mathcal{D}\Gamma$.

К задаче $(1) - (4)$ приводит, например, вопрос о малых деформациях натянутой решётки упруго соединенных стержней, имеющей упругие опоры. При этом краевые условия (2), (4) охватывают все реально известные виды закрепления концов решётки.

Отметим, что уравнение (2) на графе в случае жёсткого сочленения стержней было исследовано также в работе [4].

Теорема 1. *Неоднородная краевая задача* $(1) - (4)$ *имеет единственное решение для любых правых частей* $f_i(x)$ *на рёбрах* γ_i *и значений* $F(a)$ *во внутренних вершинах* $a \in \mathcal{I}(\Gamma)$ *тогда и только тогда, когда соответствующая однородная задача имеет только нулевое решение.*

Для доказательства этой теоремы заметим, что краевая задача $(1) - (4)$ на графе Γ эквивалентна некоторой двухточечной краевой задаче для векторного дифференциального уравнения четвёртого порядка. Утверждение теоремы 1 следует тогда из соответствующего результата теории краевых задач для дифференциального уравнения на отрезке.

Определение 1. Задача $(1) - (4)$ называется *невырожденной*, если соответствующая однородная краевая задача имеет только нулевое решение.

Заметим, что теорема 1 не обеспечивает однозначную разрешимость задачи, а лишь сводит её к невырожденности.

Определение 2. Краевая задача $(1) - (4)$ называется *знакорегулярной*, если коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

- $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, но $q(x) \not\equiv 0$ при $x \in \mathrm{R}(\Gamma)$;

- если же $q(x) \equiv 0$ при $x \in \mathrm{R}(\Gamma)$, то в условии связи (3) коэффициенты $q(a) + \rho(a) > 0$ для всех $a \in \mathcal{I}(\Gamma)$;

Условия невырожденности краевой задачи определяются следующей теоремой.

Теорема 2. *Знакорегулярная краевая задача* $(1) - (4)$ *на графе* Γ *является невырожденной.*

Доказательство. В силу теоремы 1 нам достаточно показать, что в условиях теоремы 2 соответствующая однородная задача $(1) - (4)$ ($f_i(x) \equiv 0$ при $x \in \gamma_i$, $F(a) = 0$ при $a \in \mathcal{I}(\Gamma)$) имеет в Γ только тривиальное решение.

Пусть $u_i(x)$ - ненулевое и не являющаяся константой решение однородного уравнения

$$(p_i(x)u_i'')'' - (q_i(x)u_i')' = 0$$

на ребре $\gamma_i = (a, b)$, удовлетворяющее условиям

$$\mu_i(a)u_i''(a) - \nu_i(a)u_i'(a) = 0, \quad \mu_i(b)u_i''(b) - \nu_i(b)u_i'(b) = 0,$$

где $\mu_i(\cdot)$, $\nu_i(\cdot) \geq 0$, причем $\mu_i(\cdot) + \nu_i(\cdot) > 0$. Из результатов работы [2] следует, что $u_i(x)$ является монотонной на γ_i функцией.

Соединим функции $u_i(x)$ во внутренних вершинах $a \in \mathcal{I}(\Gamma)$ условиями непрерывности $u_i(a) = u_j(a)$ $\big(i, j \in \mathrm{I}(a)\big)$. Таким образом определенное решение $u(x)$ уравнения (5) на всем графе Γ, не может иметь экстремумов в точках множества $\mathrm{R}(\Gamma)$. Во внутренних же вершинах $a \in \mathcal{I}(\Gamma)$ функция $u(x)$, в силу условия (3), при $q(a) + \rho(a) > 0$ не имеет неотрицательного максимума и неположительного минимума, а при $q(a) = \rho(a) = 0$ не имеет вообще экстремума в этих вершинах (см. [2]).

С другой стороны, если $u(x)$ в граничных вершинах $a \in \mathcal{D}\Gamma$ удовлетворяет условиям (2) и (4), то $u(x)$ имеет в этих вершинах либо положительный минимум, либо отрицательный максимум, чего не может быть.

Полученное противоречие означает, что $u(x) \equiv const$ на всем графа Γ. Тогда из условия (4) следует, что $u(a) = 0$. Следовательно, $u(x) \equiv 0$ на всем графе Γ. Теорема 2 доказана.

Замечание. Пусть в условиях теоремы 2 коэффициенты $q(a) = \rho(a) = 0$ для всех $a \in \mathcal{I}(\Gamma)$. Тогда, если в условиях (2) коэффициент $\nu(a) = 0$ для всех $a \in \mathcal{D}\Gamma$, то задача $(1) - (4)$ является вырожденной и размерность пространства её решений равна количеству внутренних вершин графа Γ. Если же $\nu(a) \neq 0$ для всех $a \in \mathcal{D}\Gamma$, то задача $(1) - (4)$ является невырожденной лишь в случае отсутствия в графе строго внутренних вершин. Если же граф содержит строго внутренние вершины, то задача

(1) – (4) является вырожденной и размерность пространства её решений равна числу строго внутренних вершин графа Г.

Литература

1. Покорный Ю. В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров // -М.: Физматлит, 2004. -272 с.
2. Боровских А.В. Об одном классе дифференциальных уравнений четвёртого порядка на пространственной сети / А. В. Боровских Р. Мустафокулов, К. П. Лазарев, Ю. В. Покорный // Доклады РАН. -1995. - Т. 345. - №6. - С. 730-732.
3. Мустафокулов Р. Невырожденность краевой задачи типа Штурма для одного дифференциального уравнения 4-го порядка и её функция Грина / Р. Мустафокулов, С. К. Солиев // Вестник Таджикского национального университета. Научный журнал. Серия естественных наук. - №1/2 (81). - 2012. - С. 26-33.
4. Кулаев Р.Ч. О разрешимости краевой задачи для уравнения четвёртого порядка на графе / Р.Ч. Кулаев // Дифференц. уравнения. - 2014. - Т. 50. - №1. - С. 27-34.

ДОИР БА НАЗАРИЯИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ ДАР ГРАФ

Мустафокулов Р. [1], Солиев С. К. [2]

[1]Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар ш. Душанбе

[2]Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола мафҳумҳои графи геометрӣ, муодилаи дифференсиалӣ ва масъалаҳои канорӣ дар граф ҷорӣ кардашуда, шартҳои ҳалшавандагии як масъалаи канорӣ барои муодилаи дифференсиалии тартиби чорум дар графи геометрӣ оварда шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: графи геометрӣ, масъалаи канорӣ дар граф, масъалаи канории ғайриинқирозӣ, мувофиқати аломатҳо.

ON THE THEORY OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS IN GRAPHS

Mustafokulov R. [1], Soliev S.K. [2]

[1] The branch of Lomonosov Moscow State University in Dushanbe

[2] Tajik national university

In this article the notions of geometric graph, equations differential and boundary - value problem in graph defined, the conditions of solvability of one boundary - value problem for equation differential of 4 - the order in geometric graph reduced.

Key words: geometric graph, boundary-value problem in graph, noudegeneracy, regulated sign.

Сведения об авторах. Р. Мустафокулов - доктор физико - математических наук, профессор кафедры фундаментальных и естественных наук Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова. Телефон: 95-160-69-55, E-mail: rmustaf@list.ru

С. К. Солиев - кандидат физико - математических наук, ассистент кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета. Телефон: 98-578-08-96, E-mail: safarbek0101@mail.ru.

УДК 574.6:477.63/64

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЕ ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ ЭКОСИСТЕМЫ РЫБОВОДНОГО ПРУДА

Комилов Ф.С., Мирзоев С.Х.

Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе

Статья посвящена алгоритмизации и программированию математической модели экосистемы опытного рыбоводного пруда на объектно-ориентированном языке программирования C#. В ней описана технология использования вычислительной программы.

Ключевые слова: *модель, алгоритм, программа, оператор, компьютер, пруд, рыба.*

Алгоритмизация задачи. В местностях с континентальным климатом, как обычно, сезон выращивания прудовой рыбы займёт 150 суток. Исходя из этого, экспериментальный рыбоводный пруд моделируется в течение 5 месяцев (май-сентябрь).

Математическая модель исследуемой экосистемы рыбоводного пруда представляет собой систему 9 нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка [1, 2]. Для численного интегрирования системы дифференциальных уравнений на компьютере, используется метод Рунге-Кутта-Мерсона с автоматическим изменением шага [3] в интервале (1, 150).

При алгоритмизации математической модели введены следующие обозначения:

- n – число уравнений (n=9);
- t_i – независимая переменная, представляющая i-й модельный день (i=1,2,…,150);
- t_1 – начало временного интервала;
- t_{150} – конец временного интервала;
- y_{il} – значение l-го зависимого переменного в i-й день (l=1,2,…,n; i=1,2,…,150);
- $y_{11}=y_1(t_1)$, $y_{21}=y_2(t_1)$, $y_{31}=y_3(t_1)$, $y_{41}=y_4(t_1)$, $y_{51}=y_5(t_1)$, $y_{61}=y_6(t_1)$, $y_{71}=y_7(t_1)$, $y_{81}=y_8(t_1)$, $y_{91}=y_9(t_1)$ – начальные значения зависимых переменных;
- ξ_l – правая часть l-го уравнения системы ОДУ;

- χ_{kl} – k-й коэффициент метода Рунге-Кутта-Мерсона (k=1,2,3,4,5) при вычислении значения y_{li} – l-го переменной модели (l=1,2,…,n) в i-й расчётный день (i=1,2,…,150);
- h – шаг интегрирования (его начальное значение равно 1, далее выбирается автоматически);
- ε – погрешность интегрирования (ε=0.0005).

Метод Рунге-Кутта-Мерсона (РКМ), обеспечивающий приближенную оценку погрешности на каждом шаге интегрирования (порядок погрешности интегрирования равен $R\sim(h^5)$), реализуется на временном интервале (t_1, t_{150}) согласно следующему алгоритму:

1) Ввод значения n, ε, h, t_1, y_{11}, y_{21}, …,y_{n1}.
2) i:=0; l:=0.
3) i:=i +1.
4) l:=l +1.
5) Вычисление значения коэффициентов численного метода РКМ:

$$\chi_{1l} := h \cdot \xi_l(t_i;\quad y_{li});$$

$$\chi_{2l} := h \cdot \xi_l\left(t_i + \frac{1}{3}h;\quad y_{li} + \frac{1}{3}\chi_{1l}\right);$$

$$\chi_{3l} := h \cdot \xi_l\left(t_i + \frac{1}{3}h;\quad y_{li} + \frac{1}{6}\chi_{1l} + \frac{1}{6}\chi_{2l}\right);$$

$$\chi_{4l} := h \cdot \xi_l\left(t_i + \frac{1}{2}h;\ y_{li} + \frac{1}{8}\chi_{1l} + \frac{3}{8}\chi_{3l}\right);$$

$$\chi_{5l} := h \cdot \xi_l\left(t_i + h;\quad y_{li} + \frac{1}{2}\chi_{1l} - \frac{3}{2}\chi_{3l} + 2\chi_{4l}\right).$$

6) Вычисление значения переменной $y_{l(i+1)}$ и погрешность метода $R_{l(i+1)}$ для последующего модельного дня t_{i+1} в соответствии с расчётами последнего внутреннего цикла χ_{5l}:

$$y_{l(i+1)} := y_{li} + \frac{\chi_{1l} + 4\chi_{4l} + \chi_{5l}}{6}$$

$$R_{l(i+1)} := \frac{-2\chi_{1l} + 9\chi_{3l} - 8\chi_{4l} + \chi_{5l}}{30}.$$

7) Проверка выполнения условий:

$$\left|R_{l(i+1)}\right| \le \varepsilon, \quad \left|R_{l(i+1)}\right| \ge \frac{\varepsilon}{30}.$$

При не выполнении первого условия, шаг интегрирования h делится на 2 (h:=h/2) и вычисление по методу повторяется с 5-го пункта (этапа) алгоритма. При выполнении первого условия, а не выполнении второго, шаг

h увеличивается вдвое (h:=h·2) и вычисление опять повторяется с 5-го пункта. При одновременном выполнении обоих условий, управление передаётся к пункту 8.

8) Проверка условия l<n. При его выполнении управление передаётся к пункту 4, а при не выполнении – к пункту 9.
9) Вычисление $t_{i+1}:=t_i+h$, вывод на печать значения t_{i+1}, $y_{1(i+1)}$, $y_{2(i+1)},\ldots,y_{n(i+1)}$.
10) Проверка условия i<150. При его выполнении управление передаётся к пункту 3, иначе к пункту 11.
11) Завершение работы.

Текст рабочей программы – инструмента по прогнозированию динамики экосистемы рыбоводного пруда. В соответствии с алгоритмом решения задачи на объектно-ориентированном языке программирования C# (C Sharp) разработана вычислительная программа имитационной модели экосистемы опытного рыбоводного пруда, полный кодовый текст которой представлен ниже:

```
//Системные библиотеки функций, процедур, форм и т.д., используемые в программе, которые создаются автоматически
                using System;
                using System.Collections.Generic;
                using System.ComponentModel;
                using System.Data;
                using System.Drawing;
                using System.Linq;
                using System.Text;
                using System.Threading.Tasks;
                using System.Windows.Forms;
//Создание пространства имён (Mahzanho), а также объявление глобальных и локальных форм и переменных (часть из которых создаётся автоматически)
   namespace Mahzanho
   {
   public partial class Form1 : Form
   {
   public Form1()
   {
   InitializeComponent();
   }
      double karp=0;
      double tolst=0;
            private void button1_Click(object sender, EventArgs e)
```

```
        {
//Создание нумерованных блоков (listBox) для значения зависимых и независимой переменных модели и очищение их содержимого перед использованием
    listBox1.Items.Clear();
    listBox2.Items.Clear();
    listBox3.Items.Clear();
    listBox4.Items.Clear();
    listBox5.Items.Clear();
    listBox6.Items.Clear();
    listBox7.Items.Clear();
    listBox8.Items.Clear();
    listBox9.Items.Clear();
    listBox10.Items.Clear();
//Задание массива начальных значений переменных модели – W(9):
    double[] W={0,0.214,37.990,2.5,1.88,7.3,18.4,5.00,1.00,5.00};
//Отображение заголовка результативной таблицы на экране
label11.Text = "Значения переменных модели в начале сезона";
//ЗАДАНИЕ ЗНАЧЕНИЙ МАССИВОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ПРОГРАММЕ:
//Задание массива значений водных температур – TT(150):
double[] TT=
{0,20,20.1,20.2,20.3,20.5,20.8,21,21.2,21.4,21.5,21.8,22,26,26,26,25,23,24,25,25.5,
25.5,25.5,26,26,26,26,26,26,26,26.5,27,26,26.5,26.5,27,27.2,28,28.5,29,28.5,28.7,
28.28,27.5,27,26,26.4,27.5,27.5,28.5,29.7,30,30.4,30.7,30.9,31,31,31,31,31.5,32,32,
31.6,31.4,31,31,30.5,30,30,30.3,30.6,31,31,31,31,31,31,31,31,31,31,30.5,30,29.5,29,
29.9,30,30.5,30.5,31,31,31,30.8,30.5,30,30,29.5,29.5,29,31,31,31,29,29,29,29,29,29,
28.5,28,28,28,28,28,28,28,28,28,28,28,28,28,28,28,28,27.6,27.5,27.4,27,27,27,27,27,26,
26,26,26,26,26,25.5,25.5,25.5,25.5,25,25,25,24.5,24,24,24,24};
//Задание массива значений солнечных радиаций – I0(150):
double[] I0=
{0,0.32,0.35,0.49,0.37,0.50,0.48,0.21,0.22,0.48,0.51,0.49,0.36,0.43,0.50,0.38,0.40,0.
14,0.55,0.51,0.51,0.49,0.51,0.43,0.50,0.56,0.44,0.43,0.42,0.17,0.22,0.45,0.43,0.29,0.
43,
0.56,0.25,0.53,0.52,0.48,0.35,0.36,0.50,0.54,0.24,0.23,0.53,0.53,0.53,0.53,0.48,0.41,
0.42,0.46,0.51,0.50,0.51,0.52,0.53,0.52,0.51,0.51,0.52,0.52,0.43,0.40,0.35,0.47,0.49,
0.53,0.53,0.53,0.47,0.51,0.52,0.49,0.47,0.46,0.43,0.33,0.31,0.47,0.25,0.29,0.47,0.51,
0.50,0.46,0.49,0.49,0.50,0.49,0.44,0.42,0.28,0.29,0.42,0.46,0.40,0.48,0.48,0.47,0.47,
0.47,0.48,0.47,0.48,0.47,0.45,0.39,0.41,0.42,0.44,0.45,0.46,0.47,0.46,0.44,0.43,0.44,
```

0.43,0.56,0.50,0.49,0.48,0.43,0.44,0.45,0.47,0.47,0.48,0.49,0.49,0.40,0.49,0.42,0.47,
0.46,0.46,0.44,0.38,0.44,0.44,0.44,0.44,0.42,0.41,0.42,0.40,0.44,0.20};
//Задание массива значений куколок тутового шелкопряда – CU(150):
double[] CU=
{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0.5,0.6,0.7,0.7,0.7,0.8,0.8,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0
.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,
0.9,0.9,0.9,0.9,1,1,1.5,1.5,2,2,2.5,2.5,3,3,3.5,3.5,4,4,4.5,4.5,5,5,4.5,4.5,4,4,3.5,3.5,3.5,
3.5,3.5,3.5,3.5,3.5,3,3,3,3,3,2.5,2.5,2.5,2.5,2.5,2,2,2,2,2,1.5,1.5,1.5,1.5,1.5,1.3,1.3,1.3,
1.3,1.3,1.3,1.3,1.3,1.3,1.3,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1};
//Задание массива значений комбикорма – CO(150):
double[] CO=
{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,200,300,350,350,400,400,400,400,400,426
,
426,426,426,426,426,426,426,426,426,426,426,426,426,426,426,426,426,426,426,426,426,426,426,426,42
6,426,426,426,426,426,426,426,426,426,426,500,600,700,800,900,1000,1100,1200,1300,
1400,1500,1600,1700,1800,1900,2000,2100,2200,2300,2400,2300,2200,2100,2000,
1900,1800,1800,1700,1600,1500,1300,1300,1200,1200,1100,1100,1000,1000,1000,
1000,900,900,900,900,900,900,900,900,900,900,800,800,700,700,700,700,700,700,
600,600,533,533,533,533,533,533,533,533,533,533,533,533,533,533,533,533,532,532,53
2,532,532,532,532,532,532,532,532,532,532,532,532,532,532,532,532,532,532,532,532};
//Задание массива значений аммиачной селитры – SE(150):
double[] SE=
{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0.5,0,0,0,0,0,0,0.5,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,0.6,4.7,4.7,4.7,4
.7,4.7,4.7,4.7,3.4,3.4,3.4,3.4,3.4,3.2,3.2,3.2,3.2,3.2,0,0,0,0,0,0,0,2.4,2.4,2.4,0.8,0,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0.25,0,0,0,0,1.2,1.2,0,0,0,0,0,0.2,0.2,0.4,0.4,0.2,0.2,0.2,0.25,0.25,
0,0,0,0,0,0.25,0.25,0,0.4,0.2,0,0,0,0,0,0,0,0,0.2,0.2,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0.5,
0.5,0.5,0.5,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
//Задание массива значений суперфосфата – SU(150):
double[] SU=
{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0.35,0,0,0,0,0,0,0.35,0,0,0,0,0,0.5,0,0,0,0,0,0,0,0,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,
0.4,2.3,2.3,2.3,2.3,2.3,2.3,2.3,1.7,1.7,1.7,1.7,1.7,1.6,1.6,1.6,1.6,1.6,0,0,0,0,0,0,0,
1.2,1.2,1.2,0.4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0.125,0,0,0,0,0,0.6,0.6,0,0,0,0,0,0.1,0.1,0.2,0.2,0.1,0.25,
0.25,0.125,0.25,0,0,0,0,0,0,0.125,0.125,0,0.2,0.1,0,0,0,0,0,0,0,0,0.1,0.1,0,0,0,0.5,0.5,
0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.25,0.25,0.25,0.25,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
//Задание массива значений площадей пруда – SS(150):
double[] SS=
{0,2,2,2.1,2.1,2.1,2.2,2.2,2.2,2.2,2.3,2.3,2.3,2.4,2.5,2.6,2.7,3,3.2,3.5,4,4,4,4.1,4.2,4.4,4.8,4.8,4.8,4
.9,4.9,5,5,5.1,5.2,5.2,5.2,5.2,5.2,5.2,5.2,5.6,6.4,6.4,6.4,6.4,6.4,6.4,6.4,6.4,6.4,6.4,6.4,6.4,
6.4,5.6,5.6,5.6,5.6,5.6,5.5,5.5,5.4,5.4,5.3,5.3,5.3,5.2,5.2,5.2,5.2,5.3,5.3,5.3,5.3,5.4,5.4,
5.4,5.5,5.5,5.5,5.5,5.5,5.5,5.5,5.6,5.7,5.7,5.8,5.9,6,6,6,6,6,6,6,6.4,6.4,6.4,6.4,6.4,6.4,6.4,

```
6.4,6.4,6.4,6.4,6.4,6.4,6.4,6.4,5.8,5.6,6.4,6.3,6.2,6.1,6,5.9,5.8,5.7,5.7,5.6,5.6,5.8,6,6.4,
6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6.4,6.4,6.4,6.3,6.3,6.2,6.2,6.3,6.2,6.2,6.2,6.4,6.4,6.4};
//Задание массива значений коэффициентов максимальных скоростей потребления – MU(15):
mfp,mfn,mufz,mubz,mube,mudb,muec,muzc,muft,mubt,mudt, mub,mub,muco,mucu
      double[] MU={0,1.0,4.0,1.0,0.6,8.9,0.65,6.9,6.9,3.5,3.5,2.5,1.8,1.8,0.3,0.3};
//Задание массива значений коэффициентов полунасыщения – K(15):
kpf,knf,kfz,kbz,kbe, kdb,kec,kzc,kft,kbt,kdt,kpb,knb,kcoc,kcuc
      double[] K={0, 20,18,15,20,15,15.6,5,1,2,7,60,23,19,12,13};
//Задание массива значений оптимальных температур – TOPT(6):
toptf,toptz,topte, toptb, toptc,toptt
      double[] TOPT={0, 23, 24, 24, 25, 24, 25};
//Задание массива значений минимальных температур – TMIN(6):
tminf,tminz,tmine, tminb,tminc,tmint
      double[] TMIN={0,11,11,9,17,12,14};
//Задание массива значений максимальных температур – TMAX(6): tmaxf,tmaxz, tmaxe,tmaxb,tmaxc,tmaxt
      double[] TMAX={0, 34, 31, 30, 34, 34, 35};
//Задание массива коэффициентов смертности организмов – CMOR(6): cmorf, cmorz,cmore, cmorb,cmorc,cmort
            double[] CMOR={ 0,0.01,0.2,0.02,0.025,0.0001,0.0001};
//Задание массива коэффициентов метаболизма – MB(8): mbf,mbz,mbe,mbb, mbc,mbt,mbbc,mbbt
            double[] MB={0, 0.11, 0.17, 0.15, 0.05, 0.05, 0.035, 0.06, 0.01};
            double RTMAX=13, RCMAX=11;
//Определение значения остальных коэффициентов и параметров, входящих в модели (всего 29):
        double ALAME=1, ALAMF=1, ALAMB=1, FP=1, FH=18, FC=100, BP=1,
        BN=20, BC=100, DP=1, DN=10, DC=100, DS=5, EK=0.8, MEE=10,
        MFF=15, MBB=8, IOPTF=0.3, FCR=1.5, ECR=1, BCR=3, ALP=0.85,
        BET=0.9, KW=0.2, KF=0.03, KD=0.4, KPD=0.5, HF=1, DES=0.7;
//Объявление вспомогательных величин, использованных в программе
   double XX=0, H=1, E1=0.0005, F, Z, E, B, C, T, D, P, N, FTT, FTD, J, I, FIF,
   FPNC, MINF, AB, MFMAX, QMINF, QPF, QNF, BPNC, MINB, AC, MBMAX,
   QMINB, QPB, QNB, DPNCS, QDPNC, QDP, QDN, QDS, COL, CUL, QFT,
   QFZ, QBZ, QBE, QEC, QCOC, QCUC, ETAF, Y1, Y2, MIN12, QBT, Y3, Y4,
   MIN34, QZC, Y5, Y6, MIN15, MIN52, QDT, RT, RC, QFD, QZD, QBD, QED,
   QTD, QCD, E2;
//Объявление имён массивов, использованных в методе РКМ
```

```
        double[] Y = new double[10];
        double [] FT=new double[7];
        double [] S=new double[10];
        double [] XA=new double[10];
        double [] XB=new double[10];
        double [] XC=new double[10];
        double [] XD=new double[10];
        double [] XE=new double[10];
                int L=0;
                int M=0;
                for (L=1; L<=9; L++)
                {
                Y[L] = W[L];
                }
//Вывод начальных значений переменных модели за заголовки формы
textBox1.Text
="F="+Y[1].ToString()+"\tZ="+String.Format("{0:0.000}",Y[2])+"\tE="+
String.Format("{0:0.000}",Y[3])+"\tB="+String.Format("{0:0.000}",Y[4])+"\tC="+
String.Format("{0:0.000}",Y[5])+"\tT="+String.Format("{0:0.000}",Y[6])+"\tD="+
String.Format("{0:0.000}",Y[7])+"\tP="+String.Format("{0:0.000}",Y[8])+"\tN="+
String.Format("{0:0.000}",Y[9]);
//Пересчёт значений концентраций массивов данных
      for (L=1; L<=150; L++)
      { SS[L]=SS[L]*10000;
      SU[L]=SU[L]*1000000/SS[L];
      SE[L]=SE[L]*1000000/SS[L];
      CU[L]=CU[L]*1000/SS[L];
      CO[L]=CO[L]*1000/SS[L];
      }
      int X1=0, X2=0, X=0, E3=0;
//Отображение начальных значений переменных модели в начале отрезка
временного сезона
            listBox10.Items.Add((X).ToString());
            listBox1.Items.Add(String.Format("{0:0.0000000}",Y[1]));
            listBox2.Items.Add(String.Format("{0:0.0000000}",Y[2]));
            listBox3.Items.Add(String.Format("{0:0.0000000}",Y[3]));
            listBox4.Items.Add(String.Format("{0:0.0000000}",Y[4]));
            listBox5.Items.Add(String.Format("{0:0.0000000}",Y[5]));
            listBox6.Items.Add(String.Format("{0:0.0000000}",Y[6]));
```

```
            listBox7.Items.Add(String.Format("{0:0.0000000}",Y[7]));
            listBox8.Items.Add(String.Format("{0:0.0000000}",Y[8]));
            listBox9.Items.Add(String.Format("{0:0.0000000}",Y[9]));
    for (X1=0; X1<=139; X1+=10)
    { for (X2=1; X2<=10; X2++)
    {
    X=X1+X2;
    L1000: E3=0;
    M=1;
    L2000:
    F=Y[1]; Z=Y[2]; E=Y[3]; B=Y[4]; C=Y[5]; T=Y[6]; D=Y[7]; P=Y[8]; N=Y[9];
//Вычисление температурных функций
        for (L=1; L<=6; L++)
        {
        FT[L]=Math.Exp (-1.25*Math.Pow(((TOPT[L]-TT[X])/(TOPT[L]-
        TMIN[L])),2));
        FTT=Math.Exp (-1.25*Math.Pow(((TT[X]-TOPT[L])/(TMAX[L]-
        TOPT[L])),2));
        if (TT[X] >=TOPT[L])
         {
        FT[L]=FTT;
         }
        }
//Вычисление формулы Вант-Гоффа
                TD=Math.Pow(2,((TT[X]-20)/10));
//Вычисление функции освещенности
            J=KW+KF*F+KD*D*KPD;
            I=I0[X]*Math.Exp (-J*HF);
            FIF = I*Math.Exp(1-I/IOPTF)/IOPTF;
//Вычисление процесса потребления биогенных элементов фитопланктоном
        FPNC=FP+FH+FC;
        MINF=Math.Pow(P,2)/(Math.Pow(K[1],2)+Math.Pow(P,2));
        AB=Math.Pow(N,2)/(FH*(Math.Pow(K[2],2)+Math.Pow(N,2)));
        if (MINF >=AB) {MINF=AB;}
        MFMAX=MU[1];
        QMINF=FT[1]*FIF*MFMAX*FPNC*MINF*F*(1-MB[1]);
        QPF=FP*QMINF/FPNC;
        QNF=FH*QMINF/FPNC;
//Вычисление процесса потребления биогенных элементов бактериями
```

```
        BPNC=BP+BN+BC;
        MINB=Math.Pow(P,2)/(Math.Pow(K[12],2)+Math.Pow(P,2));
        AC=Math.Pow(N,2)/(BN*(Math.Pow(K[13],2)+Math.Pow(N,2)));
        if( MINB>=AC) { MINB=AC;}
        MBMAX=MU[12];
        QMINB=FT[4]*MBMAX*BPNC*MINB*B*(1-MB[4]);
        QPB=BP*QMINB/BPNC;
        QNB=BN*QMINB/BPNC;
//Вычисление процесса разложения детрита до биогенных элементов
бактериями
    DPNCS=DP+DN+DC+DS;
    QDPNC=FTD*DES*R(D,B,MU[6],K[6]);
    QDP=EK*DP*QDPNC/DPNCS;
    QDN=EK*DN*QDPNC/DPNCS;
    QDS=DS*QDPNC/DPNCS;
//Вычисление трофических взаимодействий между переменными модели
        COL=ALP*CO[X];
        CUL=BET*CU[X];
        QFT=FT[6]*R(F,T,MU[9],K[9])*(1-MB[6]);
        QFZ=FT[2]*R(F,Z,MU[3],K[3])*(1-MB[2]);
        QBZ=FT[2]*R(B,Z,MU[4],K[4])*(1-MB[2]);
        QBE=FT[3]*R(B,E,MU[5],K[5])*(1-MB[3]);
        QEC=FT[5]*R(E,C,MU[7],K[7])*(1-MB[5]);
        QCOC=FT[5]*R(COL,C,MU[14],K[14])*(1-MB[5]);
        QCUC=FT[5]*R(CUL,C,MU[15],K[15])*(1-MB[5]);
//Вычисление процесса потребления бактерий толстолобиком
    ETAF=ETA(ALAMF,MFF,F);
    Y1=R(FCR,T,MU[9],K[9])-R(F,T,MU[9],K[9]);
    Y2=R(B,T,MU[10],K[10])*ETAF;
    MIN12=Y1;
    if( Y2<Y1) { MIN12=Y2; }
    QBT=FT[6]*MIN12*(1-MB[6]);
//Вычисление процесса потребления зоопланктона карпом
    Y3=R(ECR,C,MU[7],K[7])-R(E,C,MU[7],K[7]);
    Y4=R(Z,C,MU[8],K[8])*ETA(ALAME,MEE,E);
    MIN34=Y3;
    if( Y4<Y3) { MIN34=Y4; }
    QZC=FT[5]*MIN34*(1-MB[5]);
//Вычисление процесса потребления детрита толстолобиком
```

```
        Y5=R(BCR,T,MU[10],K[10])*ETAF;
        Y6=R(D,T,MU[11],K[11])*ETAF*ETA(ALAMB,MBB,B);
        MIN15=Y1;
        if( Y5<Y1) { MIN15=Y5; }
        MIN52=MIN15-MIN12;
        if( Y6<MIN52) { MIN52=Y6; }
        QDT=FT[6]*MIN52*(1-MB[6]);
//Вычисление процесса смертности живых организмов
    RT=QFT+QBT+QDT;
    RC=QEC+QZC+QCOC+QCUC;
    QFD=MB[1]*QMINF/(1-MB[1])+CMOR[1]*F;
    QZD=MB[2]*(QFZ+QBZ)/(1-MB[2])+CMOR[2]*Z;
    QBD=MB[4]*QMINB/(1-MB[4])+CMOR[4]*B;
    QED=MB[3]*QBE/(1-MB[3])+CMOR[3]*E;
    QTD=(MB[6]+MB[8]*RT/RTMAX)*RT/(1-MB[6])+CMOR[6]*T;
    QCD=(MB[5]+MB[7]*RC/RCMAX)*RC/(1-MB[5])+CMOR[5]*C;
//Вычисление правых частей обыкновенных дифференциальных уравнений
    S[1]=QMINF-QFT-QFZ-QFD;
    S[2]=QFZ+QBZ-QZC-QZD;
    S[3]=QBE-QEC-QED;
    S[4]=QMINB+(1-EK)*QDPNC-QBZ-QBE-QBT-QBD;
    S[5]=QEC+QZC+QCOC+QCUC-QCD;
    S[6]=QFT+QBT+QDT-QTD;
    S[7]=QFD+QZD+QED+QBD+QTD+QCD+(1-ALP)*CO[X]+(1-BET)*CU[X]-
    QDPNC-QDT-QDS;
    S[8]=QDP-QPF-QPB+SU[X];
    S[9]=QDN-QNF-QNB+SE[X];
//Метод Рунге-Кутта-Мерсона
    if(M==1) goto L3860; if(M==2) goto L3930;
    if(M==3) goto L3970; if(M==4) goto L4030;
    if (M==5) goto L4090;
    L3860: XX= 0;
    for (L=1; L<=9; L++)
    {
    XA[L]=H*S[L];
    Y[L]=W[L]+XA[L]/3;
    }
    X=X+(int)H/3;
    M=2;
```

```
goto L2000;
L3930:
for (L=1; L<=9; L++)
{ XB[L]=H*S[L];
Y[L]=W[L]+(XA[L]+XB[L])/6;
}
M= 3; goto L2000;
L3970:
for (L=1; L<=9; L++)
{
XC[L]=H*S[L];
Y[L]=W[L]+XA[L]/8+0.375*XC[L];
}
X=X+(int)H/6;
M=4;
goto L2000;
L4030:
for (L=1; L<=9; L++)
{
XD[L]=H*S[L];
Y[L]=W[L]+XA[L]/2-1.5*XC[L]+2*XD[L];
}
X=X+(int)H/2;
M= 5; goto L2000;
L4090:
for (L=1; L<=9; L++)
{
XE[L]=H*S[L];
Y[L]=W[L]+(XA[L]+4*XD[L]+XE[L])/6;
E2=Math.Abs(-2*XA[L]+9*XC[L]-8*XD[L]+XE[L])/30;
if( E2<=E1) goto L4160;
E3=1;
goto L4170;
L4160: if(E2<E1/30) XX=XX+1;
L4170: ;
}
if(E3==0) goto L4250;
X=X-(int)H;
for (L=1; L<=9; L++)
```

```
        {
        Y[L]=W[L];
        }
        H=H/2;
        goto L1000;
        L4250: if(XX==9) H=H+H;
        for (L=1; L<=9; L++)
        {
        W[L]=Y[L];
        }
         }
//Отображение вычисленных значений независимой и зависимых переменных модели с 10-дневным шагом
            listBox10.Items.Add((X).ToString());
            listBox1.Items.Add(String.Format("{0:0.0000000}",Y[1]));
            listBox2.Items.Add(String.Format("{0:0.0000000}",Y[2]));
            listBox3.Items.Add(String.Format("{0:0.0000000}",Y[3]));
            listBox4.Items.Add(String.Format("{0:0.0000000}",Y[4]));
            listBox5.Items.Add(String.Format("{0:0.0000000}",Y[5]));
            listBox6.Items.Add(String.Format("{0:0.0000000}",Y[6]));
            listBox7.Items.Add(String.Format("{0:0.0000000}",Y[7]));
            listBox8.Items.Add(String.Format("{0:0.0000000}",Y[8]));
            listBox9.Items.Add(String.Format("{0:0.0000000}",Y[9]));
 }
//Отображение суммарных значений модельных рыб в начале и в конце отрезка временного сезона
label10.Text="Карп – посажено 584 кг, выловлено "+String.Format
("{0:0.000000}",Y[5]*80)+" кг"+"\n"+"Толстолобик – посажено 1470 кг, выловлено "+String.Format("{0:0.000000}",Y[6]*80).ToString()+" кг";
karp=Y[5];
tolst=Y[6];
 }
//Объявление локальной функции, вычисляющей значения s-образных трофических функций
    private double R(double J1,double J2,double UM,double UK)
    {
     return UM*Math.Pow (J1,2)*J2/(Math.Pow( UK,2)+Math.Pow(J1,2));
    }
```

```
//Объявление локальной функции, вычисляющей процесс питания рыб с переключением
        private double ETA(double AL,double AE,double AX)
         {
        return Math.Exp(-AL*(AX-AE))/(1+Math.Exp (-AL*(AX-AE)));
         }
private void button1_Click_1(object sender, EventArgs e)
{
try
{
//Процедура привязки программы C# с электронной таблицей MS Excel
   Microsoft.Office.Interop.Excel.Application objex=new
   Microsoft.Office.Interop.Excel.Application();
//Операторы, создающие рабочую книгу и рабочих листов в MS Excel
        Microsoft.Office.Interop.Excel.Workbook objwb;
        Microsoft.Office.Interop.Excel.Worksheet objwsh;
        objwb=objex.Workbooks.Add(System.Reflection.Missing.Value);
        objwsh=(Microsoft.Office.Interop.Excel.Worksheet)objwb.Sheets[1];
        int j=1;
        for (int i=1; i<= listBox1.Items.Count; i++)
        {
        j++;
//Операторы, помещающие значения переменных модели в ячейках ЭТ MS Excel и конвертирующие значения блоков listBox в вещественные числа
                objwsh.Cells[j,1]=Convert.ToDouble(listBox10.Items[i-1]);
                objwsh.Cells[j,2]=Convert.ToDouble(listBox1.Items[i-1]);
                objwsh.Cells[j,3]=Convert.ToDouble(listBox2.Items[i-1]);
                objwsh.Cells[j,4]=Convert.ToDouble(listBox3.Items[i-1]);
                objwsh.Cells[j,5]=Convert.ToDouble(listBox4.Items[i-1]);
                objwsh.Cells[j,6]=Convert.ToDouble(listBox5.Items[i-1]);
                objwsh.Cells[j,7]=Convert.ToDouble(listBox6.Items[i-1]);
                objwsh.Cells[j,8]=Convert.ToDouble(listBox7.Items[i-1]);
                objwsh.Cells[j,9]=Convert.ToDouble(listBox8.Items[i-1]);
                objwsh.Cells[j,10]=Convert.ToDouble(listBox9.Items[i-1]);
}
//Операторы, конкретизирующие значения ячейки 1-й строки таблицы MS Excel под переменных модели
        objwsh.Cells[1,1]="Время";
        objwsh.Cells[1,2]="Фитопл";
```

```
        objwsh.Cells[1,3]="Зоопл ";
        objwsh.Cells[1,4]="Бентос";
        objwsh.Cells[1,5]="Бакт";
        objwsh.Cells[1,6]="Карп";
        objwsh.Cells[1,7]="Толст";
        objwsh.Cells[1,8]="Детрит";
        objwsh.Cells[1,9]="Фосфор";
        objwsh.Cells[1,10]="Азот";
//Отображение суммарных значений модельных рыб в начале и в конце отрезка временного сезона на рабочем листе ЭТ MS Excel
    objwsh.Cells[j+2,1]="\t Карп – посажено 584 кг, выловлено "+karp*80+" кг";
    objwsh.Cells[j+3,1]="\t Толстолобик – посажено 1470 кг, выловлено
    "+tolst*80+" кг";
//Стандартно-системные операторы, визуализирующие рабочей книги MS Excel, определяющие и отображающие на экране системные ошибки
                objex.Visible=true;
                objex.UserControl=true;
         }
         catch (Exception ex)
         {
      MessageBox.Show(ex.Message);
       }
     }
   }
}
```

Пояснительная записка по программе. По тексту кодов можно заметить, что вычислительная программа состоит из нескольких взаимосвязанных частей, разработанных для объявления типов величин (переменные, массивы данных, форм, функций и т.п.), для задания начальных значений этим величинам, для вычисления их новых значений (согласно алгоритму задачи), для отображения этих значений на экране, для привязывания операторов языка C# с рабочими листами электронной таблицы MS Excel и т.д.

В начале программы приведены 9 стандартных системных операторов объектно-ориентированного языка высокого уровня программирования C#, которые создаются автоматически самой системой для последующего использования системных библиотек функций и процедур по созданию и обработки текстов, числовых и нечисловых данных, рисунков, форм, таблиц и т.д. При необходимости можно к этому множеству системных операторов добавить новые частные (собственные) пользовательские операторы.

Далее создано пространство имён систем – namespace Mahzanho, под общим названием «Mahzanho», которое «отвечает» за дальнейшим функционированием программы в целом. В пространстве имён систем, как правило, включаются фундаментальные и базовые классы, определяющие часто используемые типы значений и ссылочные данные, события и обработчики событий, интерфейсы, атрибуты и т.д.

Следующая группа, состоящая из 10 операторов вида listBox.Items.Clear(), призвана для создания нумерованных блоков (с 1 по 10) по содержанию значения зависимых и независимых переменных модели и очищения их содержимого перед первым использованием.

Последующие операторы служат для описания типов переменных, коэффициентов, параметров модели и массивов данных, а также задания их числовых значений. В программе использовано 7 одномерных массивов одинаковой длины (150), характеризующих внешние функции модели, такие как климатические факторы (массив температур – TT, массив освещённостей – I0), управляющие факторы (куколки тутового шелкопряда – CU, комбикорм – CO, аммиачная селитра – SE, суперфосфат – SU), массив площадей опытного рыбоводного пруда – SS, а также 16 массивов различной длины. Эти массивы данных задействованы для описания типов и задания начальных, промежуточных и конечных значений тем числовым величинам, имена и смысл которых, указаны в комментирующих строках (строки, начинающиеся с двумя слэшами – //), приведённых в начале каждой соответствующей группы операторов.

Несколько последующих операторов использовано для объявления вспомогательных величин программы, а также имена массивов, использованных в методе РКМ и вывода на экран начальных значений переменных модели по определённой форме. Далее задействованы операторы программы для пересчёта концентраций управляющих массивов данных, которые зависят от динамики заданного массива площадей опытного нагульного пруда.

Затем программа в цикле (150 раз, т.е. ежедневно), последовательно обрабатывает смысловую часть алгоритма задачи, причём, вычислительные результаты на печать, она выдаёт через каждые 10 дней. Сначала программа вычисляет температурные функции для живых организмов модели. Затем следуют операторы вычисления формулы Вант-Гоффа, функции освещённости, процессов потребления биогенных элементов фитопланктоном и бактериями по законам стехиометрии и лимитирующих факторов Либиха, разложения детрита до биогенных элементов бактериями, трофических взаимодействий между переменными модели, перехода рыб с одного вида корма на другой (в случае

недостатка излюбленного или заменяющего его кормов, например, потребления бактерий толстолобиком, зоопланктона карпом, детрита толстолобиком) и процесса смертности живых организмов.

Девять последующих операторов присваивания использованы для вычисления правых частей потоковых обыкновенных дифференциальных уравнений, т.е. самой математической модели. Для этой цели задействован однородный числовой массив S, длины 9.

Следующие операторы программы реализуют метод Рунге-Кутта-Мерсона. Текст кодов этой части программы считается самым объёмным по отношению к другим текстам частей программы. В нём фигурируют более 60 операторов. Данная часть программы полностью соответствует описанному выше алгоритму (рис. 1).

Далее опять следует группа операторов listBox, но уже в модифицированном виде listBox.Items.Add (String.Format("{0:0.0000000}", Y[])), которая теперь служит для отображения вычисленных значений независимой и зависимых переменных модели с 10-дневным шагом. Непосредственно за этой группой операторов следуют операторы, отображающие на экране суммарные значения модельных рыб в начале и в конце отрезка временного сезона.

Следующими операторами программы являются операторы описания двух локальных функций, вычисляющие s-образных трофических функций живых организмов экосистемы и питания рыб с переключением с одного вида корма на другой.

На этом месте, собственно говоря, и заканчивается вычислительный раздел программы в объектно-ориентированном языке C#. Далее начинаются межпрограммные (связные) операторы. Операторы «Microsoft.Office.Interop. Excel.Application objex=new» и «Microsoft.Office.Interop.Excel.Application()» призваны именно для привязки языка C# с электронной таблицей MS Excel. Другие, последние группы операторов общей программы, использованы для создания рабочей книги и рабочих листов в MS Excel, помещения значений переменных модели в ячейках ЭТ MS Excel, конвертирования значений блоков listBox в вещественные числа, отображения содержаний ячеек рабочего листа электронной таблицы на экране, оформления вычислительных результатов с помощью MS Excel и т.д.

Технология использования программы. Рабочая программа загружается с помощью выполняемого файла Mahzanho.exe, который расположен по адресу Prud\Mahzanho\bin\Debug\Mahzanho.exe.

Обязательным атрибутом работы с программой является наличие у ОС компьютера пользователя программной платформы .NET Framework версии 4.5 и выше. В результате выполнения файла Mahzanho.exe на экране появляется (активизируется) табличная форма, вид которой представлен на рис. 1.

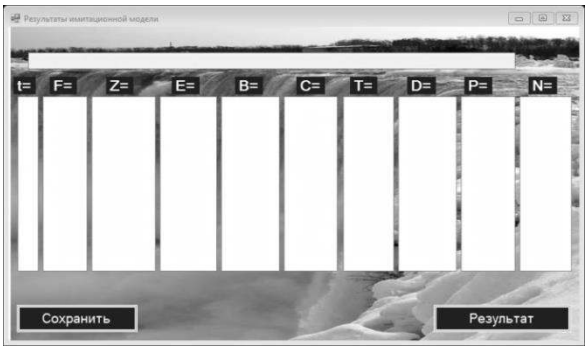


Рис. 1. Общий вид экранной формы вывода результатов модели на компьютере

По рисунку заметно, что форма содержит 4 информационных строк, 10 именованных столбцов и 2 командные кнопки. Две первые информационные строки, находящиеся в верхней части формы, предназначены для отображения имён переменных имитационной модели и их соответствующих значений в самом начале сезона выращивания рыб в опытном рыбоводном пруду. Две последующие информационные строки, находящиеся в нижней части формы (после именованных столбцов), предназначены для отображения биомасс рыб в начале и в конце экспериментального сезона.

Столбцы формы предназначены для отображения вычислительных результатов модели по каждому конкретному переменному, которые выводятся на экран с 10-дневным шагом. Командная кнопка «Результат» служит для загрузки программы, её разового выполнения и вывода на экран её вычислительных результатов. С её нажатием на экране появляется заполненная форма, примерно в следующем виде (рис. 2).

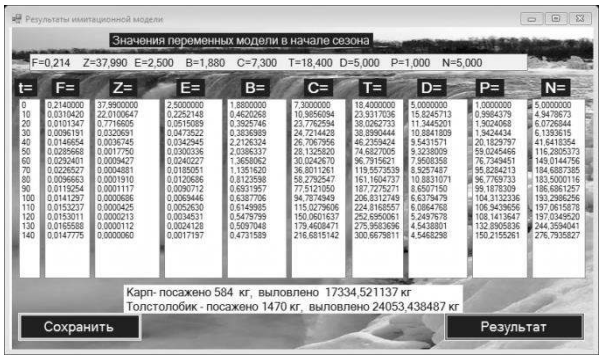


Рис. 2. Результирующая экранная форма

Командная кнопка «Сохранить» служит для автоматической передачи результатов работы объектно-ориентированного языка программирования C# в электронных таблицах офисной программы MS Excel, для последующего их сохранения и оформления в виде графиков и диаграмм. После её нажатия на экране появляется таблица MS Excel,

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Время	Фитопл	Зоопл	Бентос	Бакт	Карп	Толст	Детрит	Фосфор	Азот
2	0	0,214	37,99	2,5	1,88	7,3	18,4	5	1	5
3	10	0,031042	22,01006	0,225215	0,462027	10,98561	23,9317	15,82457	0,998438	4,947867
4	20	0,010135	0,771661	0,051509	0,392575	23,77626	38,02627	11,34452	1,902407	6,072684
5	30	0,009619	0,032069	0,047352	0,383699	24,72144	38,89904	10,88418	1,942443	6,139362
6	40	0,014665	0,003675	0,034295	2,212632	26,7068	46,23594	9,543157	20,18298	41,64184
7	50	0,028567	0,001775	0,030034	2,038634	28,13258	74,6827	9,323801	59,02455	116,2805
8	60	0,02924	0,000943	0,024023	1,365806	30,02427	96,79156	7,950836	76,73495	149,0145
9	70	0,022653	0,000488	0,018505	1,135162	36,80113	119,5574	8,925749	95,82842	184,6887
10	80	0,009666	0,000191	0,012069	0,81236	58,27925	161,1605	10,88311	96,77697	183,5
11	90	0,011925	0,000112	0,009071	0,693196	77,51211	187,7275	8,650715	99,18783	186,6861
12	100	0,01413	6,86E-05	0,006945	0,638771	94,78749	206,8313	6,637948	104,3132	193,2986
13	110	0,015324	4,25E-05	0,005263	0,614999	115,028	224,8169	6,086477	106,944	197,0616
14	120	0,015301	2,13E-05	0,003453	0,54798	150,0602	252,695	5,249768	108,1414	197,035
15	130	0,016559	1,12E-05	0,002413	0,509705	179,4608	275,9584	4,54388	132,8906	244,3594
16	140	0,014778	0,000006	0,00172	0,473159	216,6815	300,668	4,54683	150,2155	276,7936
17										
18	Карп - посажено 584 кг, выловлено 17334,5211370213 кг									
19	Толстолобик - посажено 1470 кг, выловлено 24053,4384865037 кг									

Рис. 3. Трансформированная экранная форма C# на рабочем листе MS Excel

примерный вид которой показан на рис. 3.

Как только мы с достаточной уверенностью убедились в том, что полученная в результате компьютерного вычисления имитационной модели динамика переменных может вполне адекватно отражать реальную картину развития экосистемы опытного рыбоводного пруда в течение одного сезона, то трансформировали модель в инструмент по прогнозированию её динамики.

За исходным вариантом развития экосистемы модельного опытного рыбоводного пруда, принимая верификационные вычислительные результаты имитационной модели (рис. 4), на компьютере были разыграны 35 климатических и управленческих сценарных вариантов развития динамики её переменных.

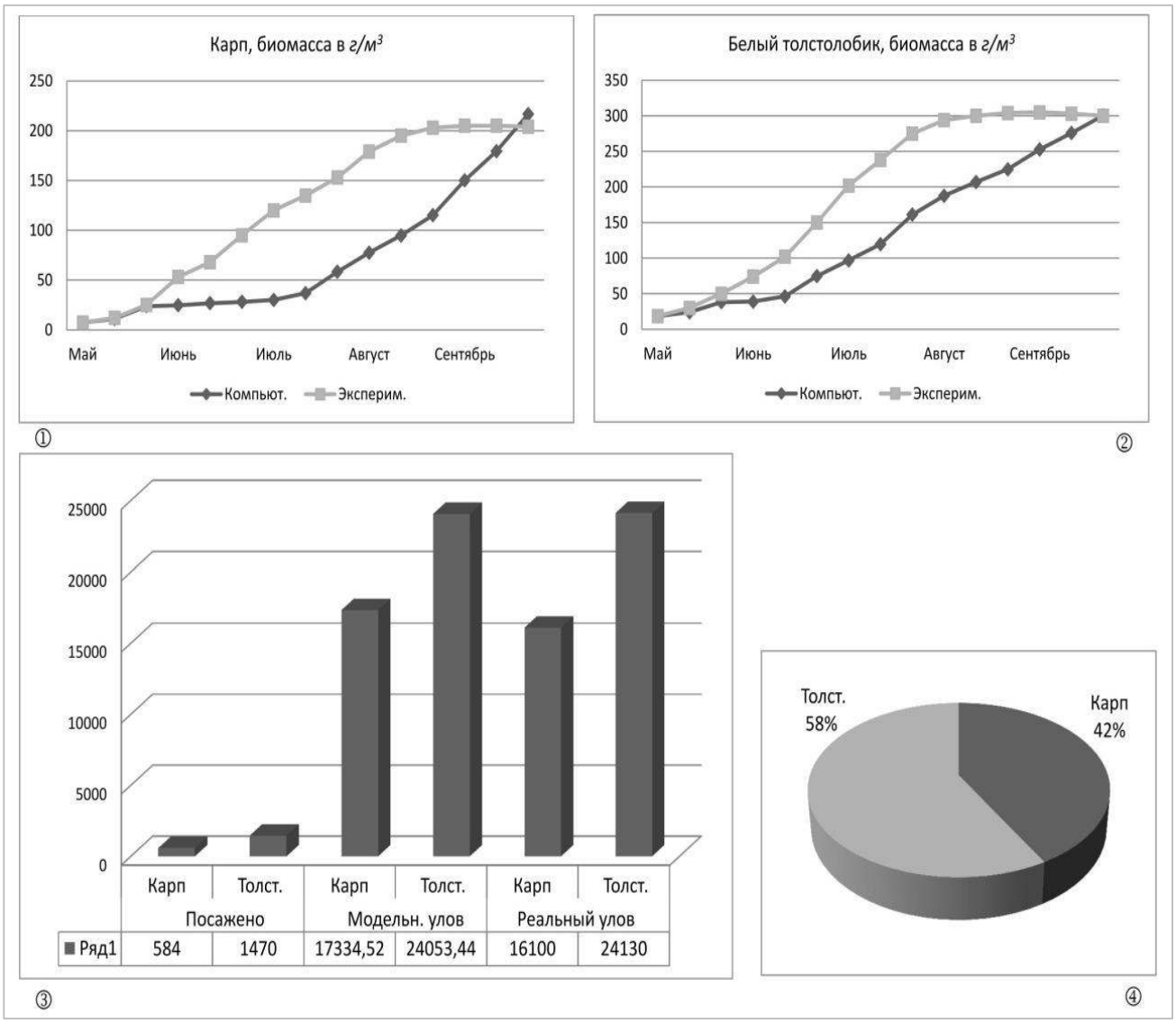


Рис. 4. Верификационные результаты имитационной модели с начальными и экспериментальными данными опытного рыбоводного пруда за 1986г: ①-② – кривые сравнения модельных и экспериментальных данных по биомассам рыб, ③ – вес рыб (*кг*) в начале и конце сезона, ④ – соотношение отловленных рыб за сезон

Литература

1. Комилов Ф.С. Учёт гидро-климатических и физико-химических характеристик экосистемы рыбоводного пруда при её компьютерном моделировании / Ф. С. Комилов, С.Х. Мирзоев, Ф. Акобирзода // Вестник Таджикского национального университета (научный журнал), сер. естеств. наук, 1/1(156). – Душанбе: «Сино», 2015. – С. 19-27.
2. Комилов Ф.С. Микробиологические основы компьютерного моделирования экосистемы рыбоводного пруда / Ф.С. Комилов, С.Х. Мирзоев, Ф. Акобирзода, И. Эргашбоев // Известия АН Республики Таджикистан, отд. биол. и мед. наук. - № 2 (190). – 2015. – С. 54-62.
3. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ. – М.: Наука, 1987. – 240 с.

ОИД БА БАРНОМАИ ҲИСОББАРОРИИ АМСИЛАИ ТАҚЛИДИИ ЭКОСИСТЕМАИ ҲАВЗИ МОҲИПАРВАРӢ

Комилов Ф.С., Мирзоев С.Ҳ.

Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар ш. Душанбе

Мақола ба алгоритмсозӣ ва барномарезии амсилаи риёзии экосистемаи ҳавзи моҳипарварӣ дар забони барномасозии объектгарои C# бахшида шудааст. Дар он технологияи истифодаи барномаи ҳисоббарорӣ тасвир ёфтааст.

Калимаҳои калидӣ: амсила, алгоритм, барнома, оператор, компютер, ҳавз, моҳӣ.

ABOUT OF COMPUTING PROGRAM SIMULATIONS MODEL OF FISHPONDS ECOSYSTEM

Komilov F.S., Mirzoev S.H.

[2]The branch of Lomonosov Moscow State University in Dushanbe

The article investigates to algorithms and programming mathematical model of experienced fishponds ecosystem on object-oriented programming language C#. It describes the use of computer technology program.

Key words: model, algorithm, program, operator, computer, pond, fish.

Сведения об авторах. **Комилов Файзали Саъдуллоевич** – д.ф.-м.н., проф. кафедры информатики Таджикского национального университета. 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр. Рудаки, 17, ТНУ. Тел.: 988685014. E-mail: komfaiz@mail.ru;

Мирзоев Саидаъло Хабибулоевич – к.ф.-м.н., доцент, исполнительный директор Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в г.Душанбе. 734002, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Бохтар, 35/1, Филиал МГУ. Тел.: 985072787. E-mail: saidalo.mirzoev.1967@mail.ru.

Ф И З И К А И Т Е Х Н И К А

УДК 536.12.32.24

КОЭФФИЦИЕНТ МАССООТДАЧИ КОБАЛЬТОВЫХ КАТАЛИЗАТОРОВ НА ОСНОВЕ ПОРИСТОЙ ГРАНУЛИРОВАННОЙ ОКИСИ АЛЮМИНИЯ В СРЕДЕ АВИАЦИОННОГО КЕРОСИНА

Сафаров М.М.[1], Абдуназаров С.С.[2]

[1]***Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе***

[2]***Энергетический институт Таджикистана в г.Курган-тюбе***

В работе приводятся результаты экспериментального иссле-дования коэффициента массоотдачи кобальтовых катализаторов при температуре 293К и давлении 0,101МПа. Для определения коэффициента масоотдачи образцов необходимо знать разность массы образца и время выдержки катализатора в процессе увлажнения. Погрешность расчета коэффициента массоотдачи зависит от погрешности исходных данных, входящих в расчетную формулу. Общая относительная погрешность измерения коэффициента массоотдачи при доверительной вероятности α=0,95 равна 0,5 %. Используя закон соответственных состояний и экспе-риментальных данных получено эмпирическое уравнение, позволяющее рассчитать коэффициент массоотдачи неисследованных систем.

Ключевые слова: авиационный керосин, катализатор, кобальт, коэффи-циент массоотдачи, окись алюминия.

Теплообменные аппараты, предназначенные для конденсации пара, широко используются в различных отраслях промышленности (хими-ческих, энергетических, теплоэнергетических, и др.). Актуальной является задача уменьшения их габаритов и металлоемкости, в связи с чем при-меняются различные способы интенсификации теплообмена при конден-сации, например, увеличение скорости пара или оребрение поверхности теплообмена. Весьма эффективным является такой способ интенсифика-ции теплообмена, как переход от пленочного режима конденсации к капельному, что обычно осуществляется путем применения не смачи-ваемых конденсатом (для конденсации водяного парагидрофобным) поверхностей теплообмена. В научной литературе время от времени появляются сообщения об успешном применении в лабораторных усло-виях того или иного способа сожжения гидрофобных и супергидрофоб-ных поверхностей, в последнее время- с применением нанотехнологий. Общим методом приготовления исследуемых в настоящей работе катализаторов нанесённого типа (независимо от природы металла) являет-ся одно – или многократная пропитка пористых носителей водным раство-ром солей, содержащих активный компонент – металл.

Пропитанные носители термообрабатывают на воздухе или в среде инертного газа с целью разложения нанесенных солей и подвергают термообработке в водороде, в процессе которой разложенные соли восстанавливаются до металлов [1]. Конечные температуры разложения и восстановления нанесенных солей обычно составляют 523–773К, заключительной стадией приготовления катализаторов является пассивация восстановленного катализатора при температуре от 323К до комнатного азота, содержащего не более 1% объемного кислорода. Стадия пассивации необходима для удаления с поверхности металла адсорбированного водорода и пред-отвращения неуправляемого процесса его окисления при выгрузке из реактора восстановления на воздухе.

Кобальтовые катализаторы представляют собой диспергированный на поверхности носителя кобальт. Структурно – прочностные характеристики катализаторов определяются исходными характеристиками носителя (таблица 1). Кобальтовые катализаторы имеют более низкую активность по сравнению с иридиевыми и используются в каталитических пакетах изделий Республики Таджикистан в композициях с иродиевыми катализа-торами либо самостоятельно с подогревом до 373–423 К.

Концентрация металла, %	Удельная поверхность, $м^2/г$	Суммарный объём пор,$см^3/г$	Насыпная плотность, $г/м^3$
11,4	105	0,26	1,162
15,7	85	0,24	1,277
19,4	83	0,21	1,376
25	72	0,15	1,459

Таблица 1. Основные характеристики кобальтовых катализаторов.

Для определения коэффициента массоотдачи нужно знать массу засыпки в сухом состоянии и в среде увлажнения. Для определения значения массы зернистых материалов, увлажненных парами воды до увлажнения и после каждых 30 минут взвешиваем массу с помощью весов.

Коэффициент массоотдачи определяется по формуле [2]:

$$\beta_Э = \frac{\Delta m}{t}, \quad (1)$$

где, $\Delta m = m_2 - m_1$– изменение массы относительно начальной, г.; m_2 – изменение массы в период времени, г.; m_1 – начальная масса, г.; t – время.

С помощью уравнения (1) находим коэффициент масоотдачи и ее значение вносим в таблицу 2.

t, час	m_1, г.	m_2, г.				$\Delta m = m_2 - m_1$				$\beta = \Delta m/t * 10^{-6}$, г./с			
		Al_2O_3+11, 44% Co	Al_2O_3+15, 7% Co	Al_2O_3+19, 43% Co	Al_2O_3+25 % Co	Al_2O_3+11, 44% Co	Al_2O_3+15, 7% Co	Al_2O_3+19, 43% Co	Al_2O_3+25 % Co	Al_2O_3+11, 44% Co	Al_2O_3+15, 5% Co	Al_2O_3+19, 43% Co	Al_2O_3+25 % Co
0,5	0,5	0,510	0,508	0,507	0,505	0,010	0,008	0,007	0,005	5,5	4,4	3,8	2,7
1,0	0,5	0,516	0,514	0,511	0,509	0,016	0,014	0,011	0,009	4,4	3,8	3,0	2,5
1,5	0,5	0,522	0,519	0,515	0,513	0,022	0,019	0,015	0,013	4,0	3,5	2,7	2,4
2,0	0,5	0,527	0,523	0,519	0,516	0,027	0,023	0,019	0,016	3,7	3,1	2,6	2,2
2,5	0,5	0,532	0,527	0,523	0,520	0,032	0,027	0,023	0,020	3,5	3,0	2,5	2,2
3,0	0,5	0,536	0,531	0,526	0,523	0,036	0,031	0,026	0,023	3,3	2,8	2,4	2,1
3,5	0,5	0,540	0,535	0,529	0,526	0,040	0,035	0,029	0,026	3,1	2,7	2,3	2,0
4.0	0,5	0,543	0,538	0,532	0,529	0,043	0,038	0,032	0,029	2,9	2,6	2,2	2,0
4,5	0,5	0,546	0,54	0,534	0,531	0,046	0,040	0,034	0,031	2,8	2,4	2,0	1,9
5.0	0,5	0,548	0,542	0,536	0,533	0,048	0,042	0,036	0,033	2,6	2,3	2,0	1,8
5,5	0,5	0,549	0,544	0,538	0,535	0,049	0,044	0,038	0,035	2,4	2,2	1,9	1,7
6.0	0,5	0,550	0,545	0,540	0,537	0,050	0,045	0,040	0,037	2,3	2,0	1,8	1,7
6,5	0,5	0,551	0,546	0,541	0,538	0,051	0,046	0,041	0,038	2,1	1,9	1,7	1,6

Таблица 2. Опытные данные для расчета коэффициента массоотдачи в различное время увлажнения в среде авиационного керосина.

Как видно, из таблицы 2 коэффициент массоотдачи изменяется каждые пол часа, т. е уменьшается. Используя таблицу 2, построим график зависимости коэффициента массоотдачи β от времени t.

Причины такого изменения формы графика зависят от изменения массы в среде увлажнения и истечение времени. При увеличении количества времени коэффициент адсорбции медленно уменьшается. При этом коэффициент массоотдачи тоже уменьшается. Коэффициент массоотдачи связан с концентрацией нанонаполнителя, т. е. чем меньше концентрации нанонаполнителя, тем выше коэффициент массоотдачи. Соответственно таблица 2 в получении эмпирического уравнения нужна, чтобы обобщить и обработать экспериментальные данные исследуемых образцов.

Для обобщения экспериментальных данных по коэффициенту массо-отдачи нами использовано следующее выражение:

$$\beta/\beta_1 = f\,(t/t_1), \qquad (2)$$

где, β, β_1 – коэффициент массоотдачи образцов при различном времени t и t_1: t_1=3,5ч.

Общая кривая описывается полиномами второй степени:

$$\beta = (0{,}25\,(\frac{t}{t_1})^2 - 0{,}902\,(\frac{t}{t_1}) + 1{,}618) \cdot \beta_1, \qquad (3)$$

где β_1 – средняя значение коэффициента массоотдачи, г/с при t_1; t –время, с.

Анализ значения коэффициента массоотдачи β_1 показал, что оно зависит от концентрации кобальта n (таблица 3).

$\beta_1 10^{-6}$, г./с	Катализаторы на основе пористой гранулированной окиси алюминия			
	Al_2O_3+11,44% Co	Al_2O_3+15,7% Co	Al_2O_3+19,43% Co	Al_2O_3+25% Co
	3,1	2,7	2,3	2

Таблица 3.Зависимость ($\beta_1 10^{-6}$, г/с) от концентрации (n) наполнителя кобальта.

Используя значения таблицы 3., построим график зависимости $\beta_1 = f(n)$.

Уравнение прямой линии имеет вид:

$$\beta_1 = (- 0{,}0823 \cdot n + 3{,}997), г./с \quad (4)$$

где, n_{Co} – концентрация наполнителя, т. е. кобальта, %.

Из уравнения (3) с учетом (4) получим:

$$\beta = (0{,}25 (\frac{t}{t_1})^2 - 0{,}902 (\frac{t}{t_1}) + 1{,}618) \cdot (-0{,}0823 \cdot n + 3{,}997), г./с \quad (5)$$

Результаты вычисленного значения $\beta_{выч}$ для исследуемых образцов представлены в таблице 4.

$\beta_э \cdot 10^{-6}$,г/с				$\beta_{выч} \cdot 10^{-6}$, г/с(расчет по формуле 5)				Δ, % (расчет по формуле 6)			
Al_2O_3+11, 44% Co	Al_2O_3+15, 7% Co	Al_2O_3+19, 43% Co	Al_2O_3+25 % Co	Al_2O_3+14, 4% Co	Al_2O_3+15, 7% Co	Al_2O_3+19, 43% Co	Al_2O_3+25 % Co	Al_2O_3+11, 44% Co	Al_2O_3+15, 7% Co	Al_2O_3+19, 43% Co	Al_2O_3+25 % Co
5,5	4,4	3,8	2,7	4,56	4,0	3,57	2,89	17	9	6	-7
4,4	3,8	3,0	2,5	4,20	3,73	3,30	2,67	4,54	1,94	-10	-6,8
4,0	3,5	2,7	2,4	3,89	3,45	3,00	2,47	2,75	1,48	-11	-2,9
3,7	3,1	2,6	2,2	3,60	3,19	2,80	2,29	2,7	-2,9	-7,7	-4
3,5	3,0	2,5	2,2	3,35	2,96	2,60	2,13	4,28	1,33	-4	3
3,3	2,8	2,4	2,1	3,12	2,76	2,45	1,99	5,45	1,43	-2	5,4
3,1	2,7	2,3	2,0	2,93	2,59	2,29	1,86	5,55	4,0	0,43	7
2,9	2,6	2,2	2,0	2,75	2,43	2,15	1,74	5,34	6,5	2,3	13
2,8	2,4	2,0	1,9	2,62	2,32	2,05	1,68	6,43	3,33	-2,5	11,6
2,6	2,3	2,0	1,8	2,53	2,24	1,98	1,60	2,69	2,6	1	11
2,4	2,2	1,9	1,7	2,44	2,16	1,90	1,55	-1,66	1,8	0	8,8
2,3	2,0	1,8	1,7	2,40	2,13	1,89	1,54	-4,35	-6,5	-5	9,7
2,1	1,9	1,7	1,6	2,40	2,10	1,88	1,53	-14.0	-10	-10,6	4,4

Таблица 4.Результаты сопоставления коэффициентов массоотдачи $\beta_э$ и $\beta_{выч}$. по формуле (5).

Используя значения таблицы 4, определим погрешность вычисления коэффициента массоотдачи между экспериментом и расчетом $\beta_э$, $\beta_{выч}$ по формуле:

$$\Delta = \frac{\beta_э - \beta_{выч}}{\beta_э} 100\% . \quad (6)$$

Подобное исследование других катализаторов и полимеров нами было опубликовано в работах [3-10].

Литература

1. Мухленов И.П. Технология катализаторов / И.П. Мухленов, Е. И. Дробкина, В.И. Дерюкина, В. Е.Солоко // Л.: Химия, 1979 -325 с.
2. Хушвахтов А.А. Повышение рабочего ресурса агрегатов пароводянного тракта ТЭС путем воздушной консервации с использованием силикагеля // Автореф. дисс. к. т. н., Томск. – 2014. – 21 с.
3. Сафаров М.М. Коэффициент массоотдачи иридиевых катализаторов на основе гранулированной пористой окиси алюминия. / М.М. Сафаров, С.С. Абдуназаров // Сборник научных трудов международного научно-технической конференции, посвящённой 105-летию со дня рождения А.Н. Плановского “Повышение эффективности процессов и аппаратов в химической и смежных отраслях” (МНТК ПЛАНОВСКИЙ-2016) М. 2016. – Т.2. – С. 196-200.
4. Сафаров М.М. Исследование коэффициента массоотдачи и адсорбции для окиси алюминия с наполнителями меди в среде паров воды (источник воды Зонг и Ямчун). / М.М. Сафаров, А.Г. Мирзомамадов // Сборник научных трудов международной научно-технической конференции, посвящённой 105-летию со дня рождения А.Н. Плановского “Повы-шение эффективности процессов и аппаратов в химической и смеж-ных отраслях” (МНТК ПЛАНОВСКИЙ-2016). М.2016. – Т.1. – С.242-246.
5. Сафаров М.М. Теплофизические, кинетические, свойства, коэффициента массоотдачи гранулированной пористой окиси алюминия с металлическими наполнителями и их компонентов / М.М. Сафаров, А.Г. Мирзомамадов, С.С. Абдуназаров, З.Ю. Норов, Б.М. Махмадиев, А. Неъматов // Физика, Научный журнал, Институт физико-технических проблем и материаловедения НАН Кыргызской Республики. – 2016. – С. 67-74.
6. Сафаров М.М. Исследование адсорбционных свойств кремниевой кислоты в процессе увлажнения паров воды при комнатной температуре и атмосферном давлении / М.М. Сафаров, Д.А. Шарифов, Дж.А. Зарипов, А.Г. Мирзомамадов // Вестник Таджикского национального университета, (научный журнал), Серия естественных наук, Душанбе, Сино, – 2016. – Т. 1/1 (192), – С.135-138.
7. Сафаров М.М. Взаимосвязь теплопроводностью и коэффициента адсорбции кобальтовых катализаторов на основе гранулированновой пористой окиси алюминия / М.М. Сафаров, С.С. Абдуназаров, А. Неъматов // Вестник Таджикского национального университета, (научный журнал), Серия естественных наук, Душанбе, Сино. – 2015. – Т.1/1 (192). – С.146-150.
8. Сафаров М.М., Мирзомамадов А.Г. Взаимосвязь теплопроводности и коэффициента адсорбции никеля и медного катализаторов на основе

гранулированновой пористой окиси алюминия Вестник Таджикского национального университета, (научный журнал), Серия естественных наук, Душанбе, Сино. – 2015. – Т.1/1 (192). – С.223-227.
9. Сафаров М.М. Коэффициент массоотдачи иридиевых катализаторов на основе гранулированной пористой окиси алюминия / М.М. Сафаров, С.С. Абдуназаров // Сборник научных трудов международного научно-технической конференция, посвящённая 105-летию со дня рождения А.Н. Плановского "Повышение эффективности процессов и аппаратов в химической и смежных отраслях" (МНТК ПЛАНОВС-КИЙ-2016). М. 2016. – Т.2. – С. 196-200.
10. Сафаров М.М., Назаров Х.Х., Абдуназаров С.С., Хакимов Д.Ш., Назирмадов Д.А., Рафиев С. С., Раджабов А.Р. Взаимосвязь теплопроводности и коэффициента массоотдачи иридиевых катализаторов на основе гранулированной окиси алюминия / М.М. Сафаров, Х.Х. Назаров, С.С. Абдуназаров, Д.Ш. Хакимов, Д.А. Назирмадов, С.С. Рафиев, А.Р. Раджабов // Вестник Таджикского национального университета (научный журнал), серия естественных наук. Душанбе, Сино. – 2016. - № 1/4 (216). – С. 54-58.

КОЭФФИТСИЕНТИ МАССАДИҲИИ КАТАЛИЗАТОРҲОИ КОБАЛТӢ ДАР АСОСИ ОКСИДИ АЛЮМИНИЯИ ДОНА-ДОНАИ КОВОК ДАР МУҲИТИ СУЗИШВОРИИ АВИАТСИОНӢ

Сафаров М.М.[1], Абдуназаров С.С.[2]

[1]***Филиали ДДМ ба номи М.В. ЛОМОНОСОВ дар ш. Душанбе***

[2]***Институти энергетикии Тоҷикистон дар ш. Қурғонтеппа***

Дар кори мазкур натиҷаҳои татқиқотии коэффитсиенти масадиҳии катализаторҳои кобалтӣ дар ҳарорати 293К ва фишори 0,101МПа оварда шудааст. Коэффитсиенти масадиҳии катализаторҳо дар асоси донистани тағйирёбии массаи онҳо хисоб карда мешавад. Хатогии ченкунии коэффитсенти масадиҳӣ ҳангоми ҳудуди эътимоднокӣ ба α=0,95 баробар будан 0,5 % аст. Бо истифодабарии қонуни мувофиқоварии ҳолат ва монандии термодинамикӣ муодилаи эмпирикӣ ҳосил карда шудааст, ки бо ёрии он коэффитсиенти массаивазкунии катализаторҳои татқиқнашударо ҳисоб кардан мумкин аст.

Калимаҳои калидӣ: сузишвории авиатсионӣ, кобалт, катализатор, коэффитсенти масаивазкунӣ, оксиди алюминӣ.

MASS-TRANSFER COEFFICIENT OF COBALT CATALYSTS BASED ON POROUS GRANULAR ALUMINUM OXIDE IN THE ENVIRONMENT OF AVIATION KEROSENE

Safarov M.M. [1], Abdunazarov S.S. [2]

[1]**The branch of Lomonosov Moscow State University in Dushanbe**

[2]**Energy Institute of Tajikistan in Kurgan-Tube**

The paper presents the results of experimental research of coefficient of mass recoil of cobalt catalysts at a temperature of 293K and pressure 0,101 MPa. To determine the coefficient of mass transferee samples it is necessary to know the mass difference of the sample and the exposure

time of the catalyst in the process of hydration. The error of calculation of the coefficient of mass depends on the accuracy of source data included in a design formula. The total relative error of measurement of the mass transfer coefficient at a confidence level α=0.95 is equal to 0.5 %. Using the law of corresponding States and the experimental data obtained an empirical equation that allows to calculate the mass transfer coefficient of unexplored systems.

Key words: aviation kerosene, the catalyst, cobalt, mass transfer coefficient, oxide alumina.

Сведения об авторах. **Сафаров Махмадали Махмадиевич**, Академик МИА, Академик Академии Холода, Академик Инженерной академии Республики Таджикистан, доктор технических наук, профессор, зав. лаб. физики Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе. Тел.: 95 163 15 85; E-mail: mahmad1 @list.ru.

Абдуназаров Сунатулло Сабзаалиевич, старший преподаватель кафедры «Электроснабжение и релейная защита» Энергетического Института Таджикистана в городе Курган-Тюбе. Тел.: 919522649; Email: Sunnat 8060@mail.ru.

УДК 537.611, 530.146

ЭВОЛЮЦИЯ КВАЗИДВУМЕРНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВИХРЕЙ В (3+1)-МЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИГМА-МОДЕЛИ

Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш.

Физико-технический институт им. С.У.Умарова АН РТ

Проведено исследование динамики топологических вихревых структур белавин-поляковского типа с межслойным взаимодействием в рамках (3+1)-мерной O(3) нелинейной σ-модели. Получены численные модели стационарных и движущихся взаимосвязанных вихревых пар, определены условия, приводящие к их осциллирующей динамике, поэтапному излучению энергии и распаду на локализованные вихревые возмущения в пространственно разделённых квазидвумерных слоях.

Ключевые слова: *квазидвумерный топологический вихрь, связанное состояние вихрей,* (3+1)*-мерная нелинейная σ-модель, изоспиновая динамика, численное моделирование.*

В настоящей работе мы приводим результаты первого этапа наших исследований эволюции квазидвумерных топологических солитонов-вихрей (ТС) белавин-поляковского типа [1]

$$\tan\frac{\theta}{2} = \left(\frac{R}{r}\right)^{Q_t} \tag{1}$$

в рамках (3+1)-мерной анизотропной O(3) нелинейной σ-модели (НСМ)

$$\mathcal{H} = J' \sum_{\mu} \left(\partial_\mu s_a\right)^2 + \frac{\alpha}{2}\left(1 - s_\gamma^2\right), \tag{2}$$

$$\mu = 0, \ldots, 3; \quad a = 1,2,3; \quad s_a s_a = 1,$$

где s_a – параметры единичного изоспинового вектора $S(s_1, s_2, s_3)$ расслоённого пространства единичной сферы $S^2 = SU(2)/U(1) = SO(3)/SO(2)$.

Для (2+1)-мерного случая динамика топологических вихрей (1) была подробно исследована в наших предыдущих работах (см., например, [2-4]), где в частности, были получены модели дальнодействующих, аннигилирующих, а также модели упругих взаимодействий ТС (1) и установлены динамические условия взаимодействующих изоспиновых полей однозначно определяющие поведение полученных моделей [4].

Для рассмотрения эволюции квазидвумерных ТС в пространственно-разделённых двумерных слоях воспользуемся гамильтоновой моделью

$$\mathcal{H} = J' \sum_{\mu} \left(\partial_{\mu} s_a\right)^2 + H_A + H_{3D}, \quad \mu = 3, \tag{3}$$
$$H_A = -\frac{J\xi}{2}\left(1 - s_{\gamma}^2\right), \quad \gamma = 3^{1sl}, \quad \xi = 1,$$
$$H_{3D} = J' \sum_{a} s_a^{1sl} s_a^{2sl}, \quad a = 1,2,3, \quad s_a s_a = 1,$$

где H_A – анизотропная часть взаимодействия в плоскости подрешётки, а H_{3D} – соответствует энергии межслойного взаимодействия; $J' = 2\xi J$, где J – обменный интеграл в плоскости. Были проведены численные эксперименты с межслойными взаимодействиями однотипных и разнотипных

$$Q_t^{1sl} = Q_t^{2sl}, \quad Q_t^{1sl} = -Q_t^{2sl}, \quad \left|Q_t^{1sl}\right| \neq \left|Q_t^{2sl}\right|$$

топологических вихрей модели (3) с ненулевым индексом Хопфа Q_t (ТЗ) следующего вида:

$$\theta(x,y,t) = 2\mathrm{arctg}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{Q_t}, \qquad \varphi(x,y,t) = Q_t\chi - \omega\tau, \tag{4}$$

где r_1 – радиус локализации ТС ($r_2 = 1$), $\chi = \arccos(\frac{x}{r}) = \arcsin(\frac{y}{r})$ – угловой параметр. При различных значениях $\xi < 0$ и $Q_t = +m, -m$ получены модели, где происходит синфазные и несинфазные осцилляции вихревых дублетов с ТЗ равным $2Q_t$, распад ТС на локализованные возмущения (ЛВ), а также модели с поэтапным излучением энергии.

На рис.1a приведён пример синфазно осциллирующего вихревого дублета (эволюция плотности энергии DH), состоящего из двух квазидвумерных ТС (4) при $Q_t^{1sl} = Q_t^{2sl} = +3$ и $\xi = -0.1$ в рамках (3+1)-мерной O(3) НСМ (3). В данном случае, приведён первый период процесса осцилляций ($t \in [0.0,\ 12.9]$) и конечное состояние (при $t = 112.2$). Численное моделирование ведётся в четырёх-решёточном фазовом 3D-пространстве, где вихри (4) эволюционируют во внутренних плоскостях (см., рис.1a, при $t = 0.0$). В данных и аналогичных иллюстрациях настоящей работы, при визуализации межрешёточное расстояние увеличено и представлены только активные решётки (см., рис.1b-1d, при $t > 0.0$), а также плотность энергии (DH) сопряжённого вихря проецировано по отрицательному направлению оси z численного пространства.

Структура вихревой части изоспиновой динамики численного поля приведена на рис.1e.

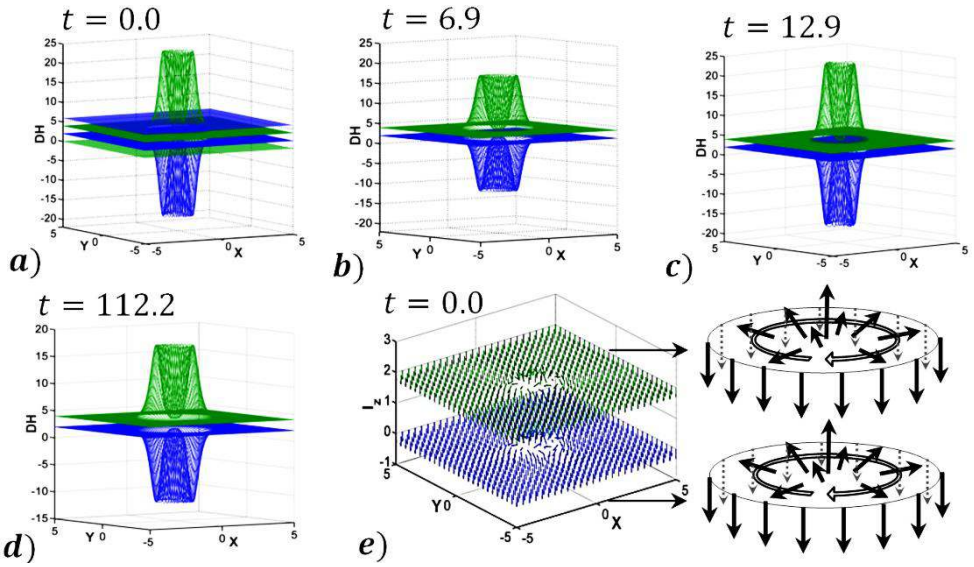


Рис.1. Осциллирующий вихревой дублет: a)-d) эволюция плотности энергии (DH); e) изоспиновая структура при $t = 0.0$. Время моделирования: $t \in [0.0,\ 112.2]$.

При исследовании эволюции взаимосвязанных квазидвумерных разнотипных ($Q_t^{1sl} = -Q_t^{2sl}$) вихрей (4) также наблюдается осцилляции вихревого дублета, но с нарушением синфазности (рис.2). В случае, приведённом на рис.2 наблюдается более интенсивные осцилляции (рис.2a-2d) топологических вихрей (4), которые описывают разные вакуумные состояния (рис.2e). В пределах $t \approx (75.0,\ 85.0)$ разность фазы осцилляций вихрей достигает максимального значения.

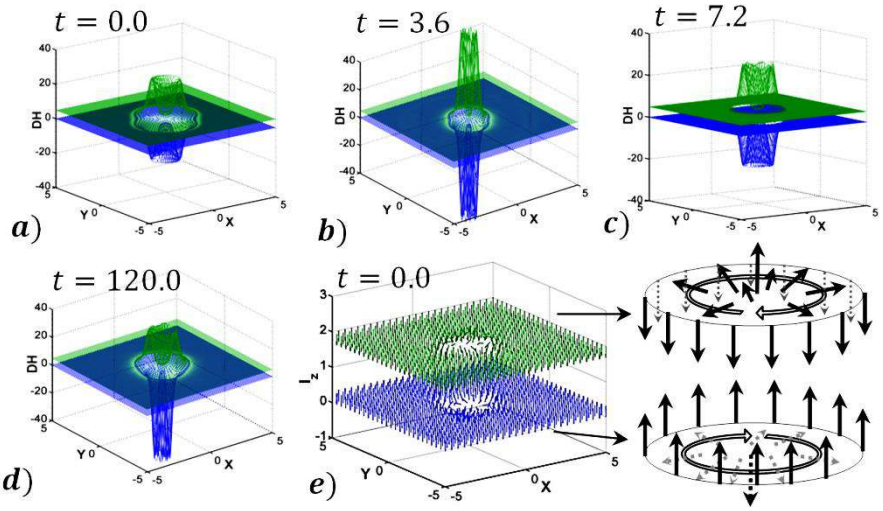


Рис.2. Осциллирующий вихревой дублет $Q_t^{1sl} = +3$, $Q_t^{2sl} = -3$, $\xi = -0.1$: a)-d) эволюция DH; e) изоспиновая структура. Время моделирования: $t \in [0.0,\ 120.0]$.

Также были получены модели вихревых дублетов (рис.3) при

$$\left|Q_t^{1sl}\right| \neq \left|Q_t^{2sl}\right|$$

$$Q_t^{1sl} = -4,\ Q_t^{2sl} = +3.$$

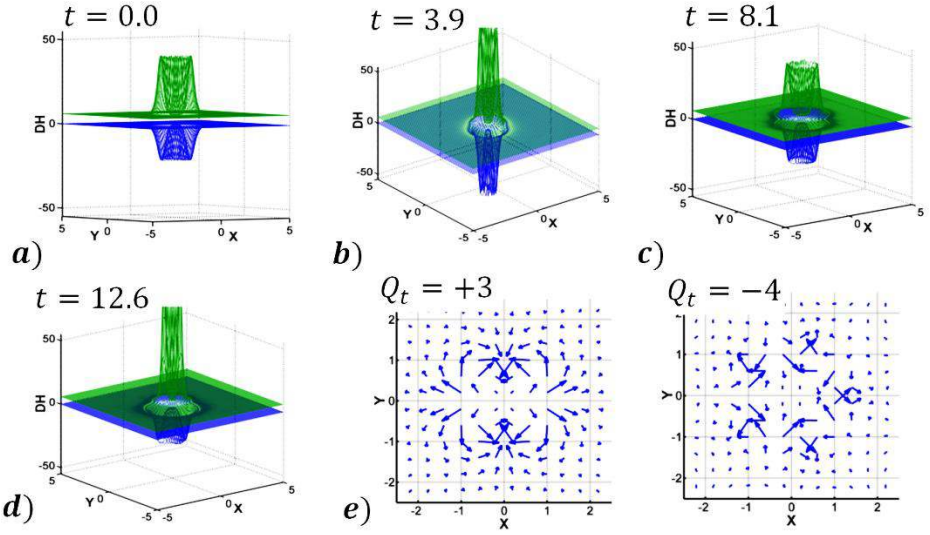


Рис.3. Осциллирующий вихревой дублет $Q_t^{1sl} = -4$, $Q_t^{2sl} = +3$, $\xi = -0.1$: a)-d) эволюция DH; b) проекция изоспиновой структуры на плоскость. Время моделирования: $t \in [0.0,\ 120.0]$.

В примере, приведённом на рис.3 свойства полученной модели данной серии экспериментов аналогичны предыдущей модели – наблюдается осцилляции вихревого дублета с нарушением синфазности (рис.3a-3d).

На рис.3e приведена проекция изотопических спинов на двумерную плоскость, где наблюдается характерные [2-4] для ТС вида (4) вихревые токи.

В серии экспериментов с изменением значений константы обменного взаимодействия $\xi < -0.1$ наблюдается интенсивные осцилляции с поэтапным излучением энергии в виде радиально-симметричных (изоспиновых) волн (см., например, рис.4a-4d).

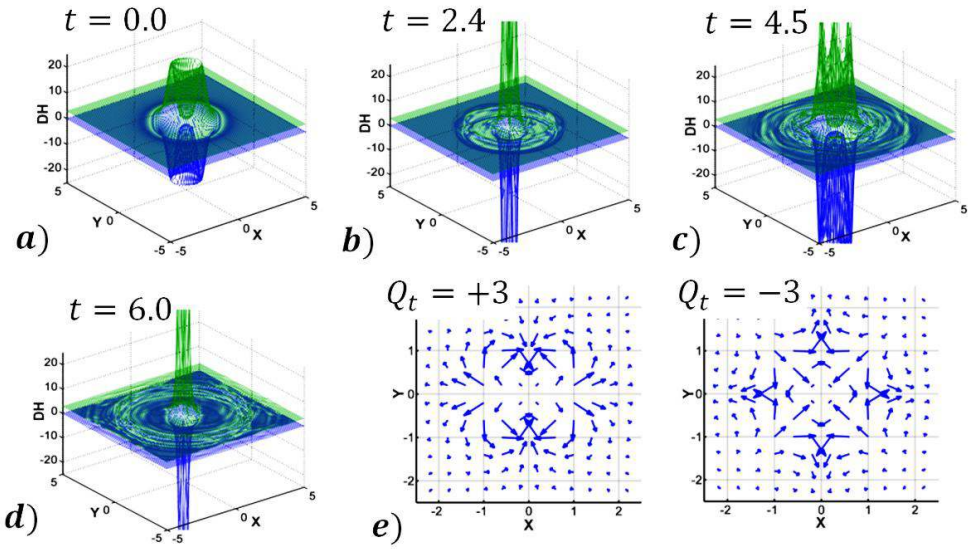


Рис.4. Осциллирующий вихревой дублет $Q_t^{1sl} = +3$, $Q_t^{2sl} = -3$, $\xi = -1.0$: a)-d) эволюция DH – первые два периода осцилляций/излучений $t \in [0.0,\ 6.0]$; e) проекция изоспиновой структуры на плоскость. Время моделирования: $t \in [0.0,\ 120.0]$.

Интеграл энергии (En) приведенных на рис.1-рис.3 моделей осциллирующих вихревых дублетов сохраняется с высокой точностью $\Delta E/E \approx 10^{-6}$ (рис.5a-5c). В случае, приведённом на рис.3 в пределах времён

$$t \approx (15.0, 20.0) \bigcap (50.0, 58.0) \bigcap (85.0, 92.0)$$

разность фазы осцилляций вихрей достигает максимального значения. В последнем случае ($\xi = -1.0$) потеря энергии составляет $En_{loss} \approx 2.56\%$ (рис.5d).

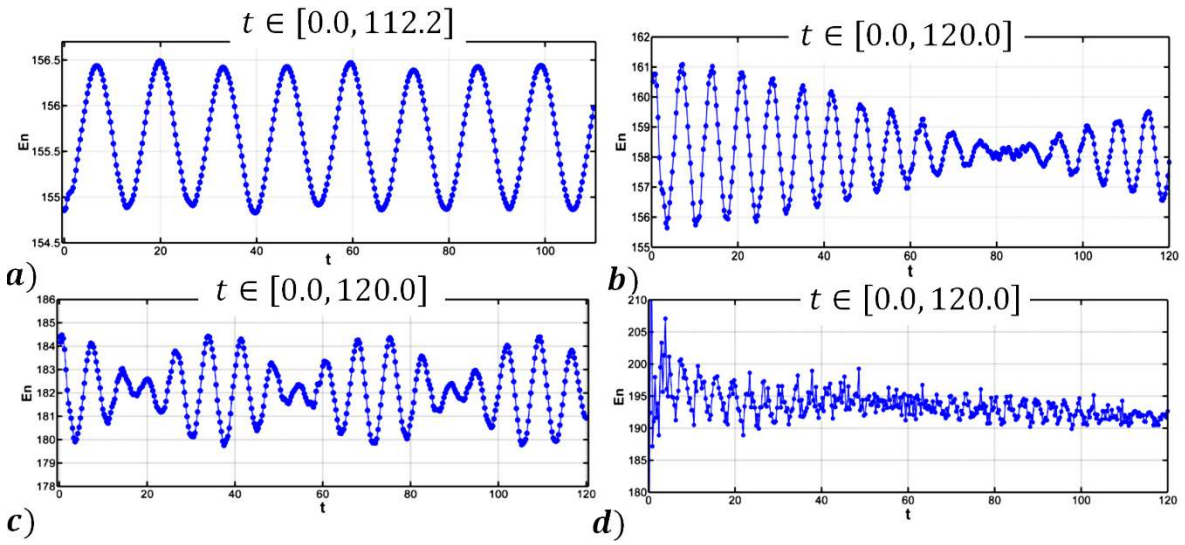


Рис.5. Интеграл энергии (En) осциллирующих вихревых дублетов: a) $Q_t^{12sl} = +3$, $\xi = -0.1$; b) $Q_t^{12sl} = \pm 3$, $\xi = -0.1$; c) $Q_t^{1sl} = -4$, $Q_t^{2sl} = +3$, $\xi = -0.1$; d) $Q_t^{12sl} = \pm 3$, $\xi = -1.0$.

Эволюция центра (DH(0,0)) солитонов (4) в топологических вихревых дублетах приведена на рис.6.

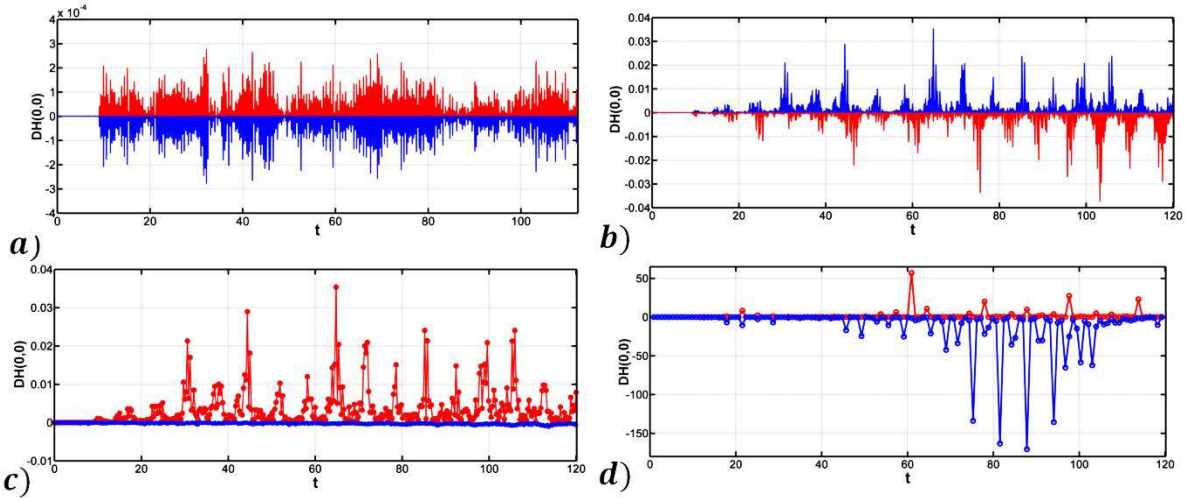


Рис.6. Эволюция центральной точки (DH(0,0)) осциллирующих вихревых дублетов: a) $Q_t^{12sl} = +3$, $\xi = -0.1$; b) $Q_t^{12sl} = \pm 3$, $\xi = -0.1$; c) $Q_t^{1sl} = -4$, $Q_t^{2sl} = +3$, $\xi = -0.1$; d) $Q_t^{12sl} = \pm 3$, $\xi = -1.0$.

При существенном увеличении значений ξ наблюдается процесс распада ТС (4) вихревого дублета (см., например, рис.7, для случая $\xi = -5.0$) на ЛВ. В

модели приведённом на рис.7 оба ТС вихревого дублета в интервале времени $t \in (0.0, 5.5)$ (рис.7a-7c) распадаются на ЛВ, каждая из которых обладает единичным значением индекса Хопфа ($Q_t = 1$) [2,3]. В процессе эволюции, в интервале $t \in (12.0, 15.5)$ происходит аннигиляция пары ЛВ (рис.7de).

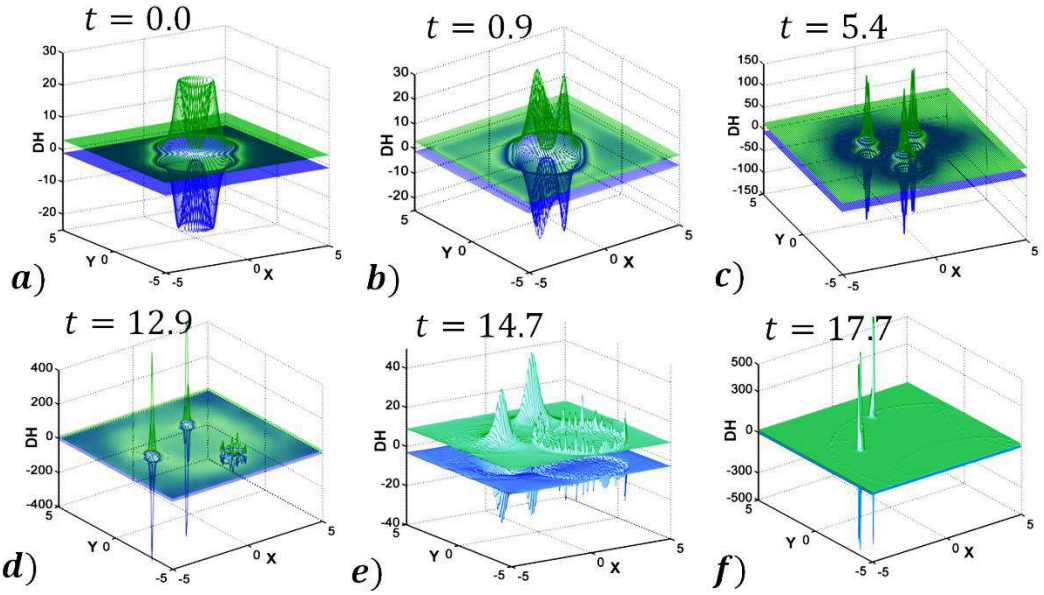


Рис.7. Распад вихревого дублета $Q_t^{12sl} = +3$, $\xi = -5.0$ на локализованные возмущения. Эволюция DH. Время моделирования: $t \in [0.0,\ 17.7]$.

Далее, на основе Лоренц-инвариантности модели (3) были разработаны модели с вихрями, движущимися в параллельных решётках, в которых не наблюдались свойства, отличающиеся от свойств вихревых дублетов выявленных в предыдущих примерах.

Численные модели, приведённые в настоящей работе получены на основе методов теории конечных разностных схем [5] и разработанных авторами алгоритмов и программ исследования эволюции квазидвумерных взаимосвязанных вихрей вида (4) в рамках (3+1)-мерной анизотропной O(3) НСМ.

Таким образом, в настоящей работе разработан и предложен численный аппарат, позволяющий провести исследования механизма межслойного взаимодействия топологических вихревых пар в фазовом пространстве.

Литература

1. Белавин А.А. Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика / А.А. Белавин, А.М. Поляков // – ЖЭТФ, 1975. – Т. 22, вып. 10. – С. 503-506.
2. Муминов Х.Х. Динамические и топологические солитоны в нелинейных сигма-моделях / Х.Х. Муминов, Ф.Ш. Шокиров // – Д.: «Дониш», 2014. – 387 с.

3. Муминов Х.Х. Динамика локализованных структур в нелинейных моделях теории поля / Х.Х. Муминов, Ф.Ш. Шокиров // – М.: «Нобель Пресс», 2015. – 388 с.
4. Муминов Х.Х. Изоспиновая динамика топологических вихрей / Х.Х. Муминов, Ф.Ш. Шокиров // – ДАН РТ, 2016. – Т.59. - №7-8. – С. 320-326.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский // – М.: Наука, 1989. – 616 с.

ТАҲАВВУЛИ ГИРДБОДҲОИ ТОПОЛОГИИ ШИБҲИ-ДУЧЕНА ДАР СИГМА-МОДЕЛИ ҒАЙРИХАТИИ (3+1)-ЧЕНА

Муминов Ҳ.Ҳ., Шокиров Ф.Ш.

Институти физикаю техникаи ба номи С.У.Умарови АИ ҶТ

Тадқиқи динамикаи сохторҳои гирдбодии топологии байни ҳамдигар алоқманди навъи Белавин-Поляков дар чаҳорчӯбаи O(3) σ-модели ғайрихаттии (3+1)-чена гузаронида шудааст. Моделҳои ададии ҷуфтҳои гирдбодии байни ҳамдигар алоқманд кор карда баромада шуда, шартҳои ба вуҷуд омадани динамикаи лаппишкунандаи онҳо, афканишоти зинавии энергия ва парокандашавии гирдбодҳо ба ошӯбҳои алоҳида дар қабатҳои дученаи дар фазо ба таври параллел ҷойгиршуда муайян карда шуданд.

Калимаҳои калидӣ: гирдбоди топологии квазидучена, ҳолати алоқманди гирдбодҳо, σ-модели ғайрихаттии (3+1)-чена, динамикаи изоспинӣ, тарҳрезии ададӣ.

EVOLUTION OF QUASI-TWO-DIMENSIONAL TOPOLOGICAL VORTICES IN (3+1)-DIMENSIONAL NONLINEAR SIGMA MODEL

Muminov Kh.Kh., Shokirov F.Sh.

S.U.Umarov Physical-Technical Institute of AS RT

The dynamics of interconnected vortex topological structures of Belavin-Polyakov type in the framework of (3+1)-dimensional O(3) nonlinear σ-model is studied. Numerical models of stationary and moving interconnected vortex pairs are obtained, and the conditions that lead to their oscillatory dynamics, gradual energy radiation and decay on to the localized vortex perturbations in spatially separated two-dimensional layers are determined.

Key words: quasi two-dimensional topological vortex, bound state of vortices, (3+1)-dimensional nonlinear σ-model, isospin dynamics, numerical simulation.

Сведения об авторах. **Муминов Хикмат Халимович**, доктор физико-математических наук, профессор, директор физико-технического института имени С.У.Умарова АН РТ. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Айни, 299/1. E-mail: khikmat@inbox.ru.

Шокиров Фарход Шамсидинович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник физико-технического института имени С.У.Умарова АН РТ. 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Айни, 299/1. E-mail: shokirov@rambler.ru.

УДК 536.2

КРУТИЛЬНЫЙ КВАРЦЕВЫЙ РЕЗОНАТОР И ИЗМЕРЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ СВОЙСТВ ПРОВОДЯЩИХ ЖИДКОСТЕЙ (ЧАСТОТЫ 20 – 1300 КГЦ)

Рахмонов Р.К.

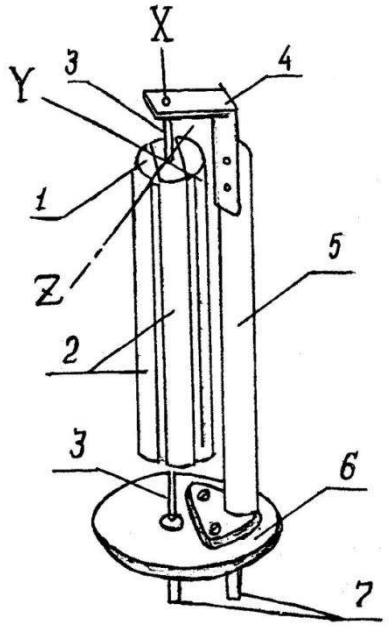
Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе

В данной статье разработана и предложена акустическая методика измерения проводящих жидкостей методом крутильного резонатора, так же исследовано вязкоупругие свойства расплавов полиэтиленгликоля в диапазоне частот 20 кГц – 1300 кГц.

Ключевые слова: *кварц, крутильный, резонатор, полиэтиленгликол, проводящие жидкости.*

В этом методе сдвиговые вязкоупругие параметры жидкости определялись по изменениям электрического импеданса резонатора при его погружении в исследуемую жидкость.

Резонатор представляет собой цилиндр, вырезанный из монокристалла кварца с нанесенными на его поверхность электродами. Он крепится по оси на иглах, через которые подается возбуждающее напряжение. Ориентация осей цилиндрического кварца, расположение электродов и крепление в иглах показано на рис.1. размером, определяющим основную частоту крутильного резонатора, является его длина, поэтому для измерений в широком диапазоне частот основным неудобством является необходимость иметь набор резонаторов. Этого можно избежать, работая на гармониках. Частоты гармоник, определяющиеся длиной цилиндра монокристаллического кварца, вычисляются по следующей формуле:



$$f_n = \frac{n}{2l\sqrt{\rho_0 \sigma}} \qquad (1)$$

где n=1,3,5,… - номера гармоник, $\rho = 2{,}64 г/см^3$ - плотность кварца, $\sigma = 2{,}42 \cdot 10^{-12} см^2/дин$ - упругая податливость кварца, $l = 80 мм$ - длина резонатора.

Рис. 1. Крутильный кварцевый резонатор.
1 – резонатор;
2 – электроды квадрупольные;
3 – иглы электропроводящие;
4 – пружины;
5 – стойка;
6 – изолятор;
7 – клеммы электропроводящие.

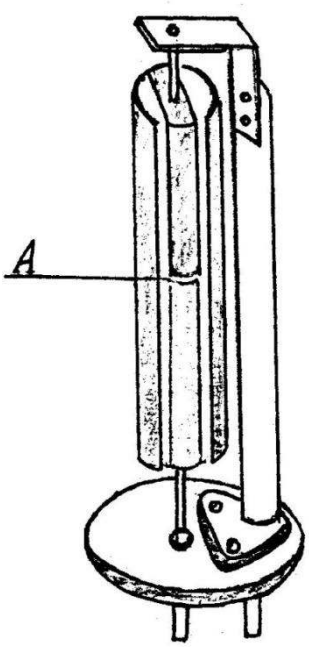


Рис. 2. Крутильный кварцевый резонатор для измерения проводящих жидкостей. А – обрыв обкладки.

Использование гармоник позволяет с помощью одного резонатора перекрыть интервал частот, превышающих одну декаду.

Следует учесть, что для получения чистой крутильной моды диаметр резонатора должен быть по крайней мере в 10 раз меньше его длины. Но известно, что при крутильных колебаниях изотропных стержней возможно существование «радиальной» моды, для которой резонансным размером является диаметр кварцевого стержня. Использование этой моды колебаний /39/ дает возможность существенно расширить частотный диапазон. Для стержня из анизотропного материала, каким является кварц, нет аналитических выражений для расчета резонансных частот высших крутильных мод, поэтому их необходимо определить экспериментально. Для использованного в работе резонатора частота радиального резонанса составляла 1,37 кГц.

При погружении резонатора в исследуемую жидкость изменяются ширина резонансной кривой δf и резонансная частота Δf_p, которая связана с активной R и реактивной X составляющими удельного акустического импеданса Z=R+Ix следующими соотношениями:

$$\delta f = \delta f_{Ж} - \delta f_{В} = K_1 R$$
$$\Delta f = f_{РВ} - f_{РЖ} = K_2 X \qquad (2)$$

где $\delta f_{В}$, $f_{РВ}$ и $\delta f_{Ж}$, $f_{РЖ}$ - ширина резонансной кривой и резонансная частота для резонатора, находящегося в воздухе и в жидкости соответственно; K_1, K_2 – постоянные, зависящие от материала резонатора и его геометрических размеров и определяющиеся следующими формулами:

$$K_2 = \frac{1}{\pi\rho_0}\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{r}\right); \qquad K_1 = 2K_2 \qquad (3)$$

где r – радиус цилиндрического резонатора.

Определяя из (2) реактивную R и активную X составляющие акустического импеданса жидкости, можно по формулам

$$G_\omega = \frac{R^2 - X^2}{\rho} \qquad \text{и} \qquad \eta_{S\omega} = \frac{RX}{\pi f \rho}$$

определить упругость G_ω и вязкость $\eta_{S\omega}$ жидкостей.

В нашей работе некоторые объекты исследования были проводящими, например полиэтиленгликоль (ПЭГ) и его водные растворы. При погружении

резонатора в проводящую жидкость его обкладки шунтируются малым сопротивлением. Из-за того, что мостовая схема не позволяет компенсировать сопротивление проводящих жидкостей, резонансная кривая становится непригодна для измерения. Эту трудность удается обойти, используя резонатор с электродами, нанесенными на половину длины, причем в жидкость погружается другая половина резонатора, лишенная электродов. В этом случае:

$$\left.\begin{aligned} \delta f &= K_1 R/2 \\ \Delta f &= K_2 R/2 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где K_1 и K_2 имеют прежние значения (2.3). измерения, произведенные таким образом, имеют дополнительное преимущество – возможность в несколько раз расширить диапазон измеряемых вязкостей. Однако с таким резонатором не удалось провести измерения на радиальной моде, т.е. частотный диапазон был меньше, чем при обычной методике.

На рис.2 приведен резонатор для измерения проводящих жидкостей. При работе на температурах более низких, чем комнатная, на голой части резонатора появляются следы влаги, которая закорачивает его обкладки. Чтобы избавиться от такого рода недостатков, верхнюю часть резонатора помещают в атмосферу аргона.

Блок-схема установки приведена на рис. 3. Устройством, управляющим работой схемы, является генератор сигналов пилообразной формы Г6-28 (1), который задает параметры частотной модуляции и осуществляет развертку осциллографа 6. Частотно-модулированные колебания постоянной амплитуды от генератора 2 подаются на мостовую схему 3, в одно плечо которой включен измерительный резонатор 8, а в другое – переменный конденсатор C_1 и резистор R_3, R_4. Сигнал с выхода моста усиливается микровольтметром 4, детектируется и измеряется цифровым вольтметром В7-23. Одновременно радиочастотный сигнал поступает на вход «У» осциллографа 6 для визуального контроля частотной характеристики. Параметры резонансной кривой (резонансная частота f_p и ширина $\delta f_{0,707}$) рассчитываются по значениям напряжений для разных значений частоты с помощью персональной ЭВМ РС-I248.

Перед измерением сдвиговых вязкоупругих свойств жидкости производится определение f_p и δf для резонатора в воздухе. Для этого в пустом экранированном сосуде резонатор термостатируется не менее одного часа и выполняются следующие операции. Изменением частоты генератора 2 добиваются максимального выходного напряжения на микровльтметре 4 (в этом случае частота соответствует резонансной). При расстройке частоты

относительно резонанса +1 кГц провидится нейтрализация междуэлектродной емкости резонатора и его проводимости с помощью конденсатора C_1 и резистора R_3.

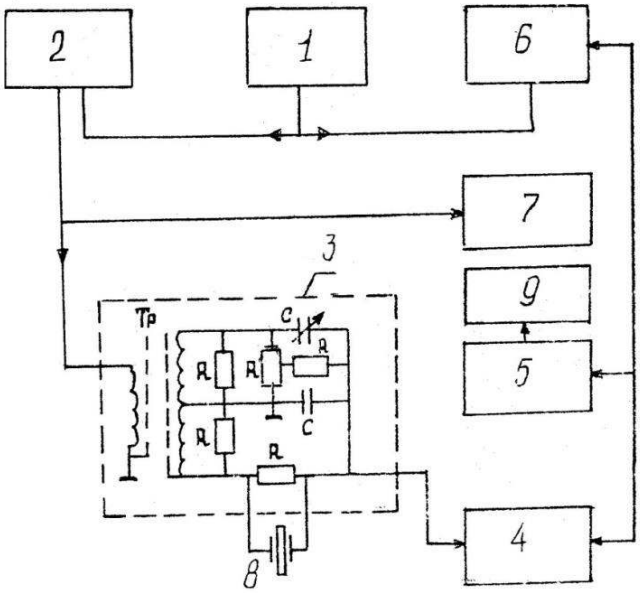


Рис.3. Блок схема установки для измерения вязкоупругих свойств жидкостей импедансным методом крутильного резонатора, в диапазоне частот 20 кГц – 1,5 МГц.

1 – генератор сигналов специальной формы Г6-28;
2 – генератор сигналов низкочастотный прецизионный Г3-110;
3 – радиочастотный мост; 4 – микровольтметр селективный В6-9;
5 – цифровой вольтметр В7-23; 6 – осциллограф С1-48Б;
7 – частотомер Ч3-34; 8 – крутильный пьезокварцевый резонатор;
9 – персональная ЭВМ РС -1248.

После нейтрализации производят настройку генератора 2 на частоту максимального выходного сигнала и отмечают его величину U_{max} по шкале вольтметра 4. Дальше изменяют частоту генератора 2 выше и ниже резонансной и измеряют частотаметром 7 частоты f^+ и f^-, при которых уровень выходного сигнала составляет величину $0{,}707U_{max}$. После этого по измеренным величинам рассчитывается резонансная частота и ширина резонансной кривой резонатора в воздухе по формулам

$$f_0 = \frac{f_0^+ - f^-}{2}; \qquad \delta f = f^+ - f^- \qquad (5)$$

После измерений характеристик резонатора в воздухе, в сосуд наливается исследуемая жидкость, куда погружается резонатор. Затем сосуд помещается в термостат с заданной температурой. Когда параметры частотной характеристики перестают изменяться (примерно через два часа), производится измерение этих параметров. Предварительно осуществляется нейтрализация

емкости резонатора и проводимости жидкости: наблюдая на экране осциллографа частотную характеристику резонатора, добиваются минимальных значений «пролаза» сигнала генератора 2 по обе стороны резонансной кривой. Затем частота генератора 2 изменяется вручную или «качается» с помощью генератора 1 в пределах частотной характеристики и по значениям напряжений на цифровом вольтметре 5, соответствующих значениям частоты по частотомеру 7, рассчитываются величины $f_р$ и δf на ЭВМ (9) по методу дихотомии с учетом неполной балансировки радиочастотного моста. Используя полученные значения $f_{рВ}$, $f_{рЖ}$, $\delta f_В$, $\delta f_Ж$, по формуле (2) рассчитывают импеданс жидкости.

Менее точные значение $f_Ж$ и $\delta f_Ж$ можно получить без записи частотных характеристик на самописце по показаниям вольтметра и частотомера. Для этого генератор 1 отключается, и при измерении частоты генератора 2 пучками управления выше и ниже резонанса измеряют две частоты f^+ и f^-, соответствующие выбранному уровню напряжения А=0,707.

Литература

1. Моисеев А. И. Исследование акустических и вязкоупругих свойств полимерных жидкостей // Дис. канд. физ.–мат. наук. Л., 1986.
2. Alig I. Ultrasonic absorption and dynamic shear properties of the transition from dilute solution to the melt for polybutadiene / I. Alig, Yu.S. Manucharov, V.A. Solovyev et al. // Polymer. 1989. - V.30. - P.843-848.
3. Салихов Т.Х. Теория генерации второй гармоники нелинейного фотоакустического сигнала оптически неоднородными твердыми телами / Т. Х. Салихов, А. Махмалатиф, Ю. П. Ходжаев, Р. К. Рахмонов. // Доклады АН. – 2015. – Т. 58 №9. – С. 804-808.
4. Салихов Т.Х. Характеристики второй гармоники нелинейного фотоакустического сигнала сиьнопоглощающего термически тонкого и оптически неоднородного твердотельного образца. / Т.Х. Салихов, А. Махмалатиф, Р.К.Рахмонов. // Материалы республиканской научной конференции «Современные проблемы физики конденсированного состояния». ТНУ НИИ. - 2015 г. - С.40-45.

РЕЗОНАТОРИ КВАРСИИ ТОБХУРАНДА ВА ЧЕНКУНИИ ХОСИЯТҲОИ ЧАСПАКИЮ ЧАНДИРИИ МОЕЪҲОИ НОҚИЛИЯТДОШТА (БАСОМАДҲО 20-1300 КХС)

Раҳмонов Р.К.

Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар ш. Душанбе

Дар мақолаи мазкур бори аввал методикаи чен кардани хусусиятҳои часпакию чандирии моеъҳои ноқилиятдошта ба воситаи резонатори тобхуранда пешниҳод карда

шудааст. Инчунин, хосиятҳои часпакию чандирии полимери полиэтиленкликол дар басомадхои 20-1300 кН таҳқиқ карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: тобхуранда, резонатор, полиэтиленгликол, моеъҳои ноқилиятдошта, кварс.

TORSION QUARTZ RESONATOR AND MEASUREMENTS ON THE VISCOELASTIC PROPERTIES OF CONDUCTING LIQUIDS (FREQUENCY 20 - 1300 KHZ)

Rahmonov R. Q.

The branch of Lomonosov Moscow State University in Dushanbe

This article is designed and proposed method for measuring acoustic conducting liquids by torsional resonator. It also contains investigation of the properties of polyethylene glycol viscoelastic melts under frequency range 20 kHz - 1300 kHz.

Key words: quartz, torsion resonator, polyethylene glycol, conductive liquids.

Сведения об авторе. **Рахмонов Рауф Каххорович**, к.ф.-м.н., декан естественнонаучного факультета Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе. Тел.: 93 524 26 21. E - mail: rahmonovrk@mail.ru

УДК 53.07; 53.08

"РОЙ ДЕТЕКТОРОВ" И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ФИЗИКЕ

Шозиёев Г.П. [1,2], Шозиёев Ш.П. [3, 4]

[1] ***Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе***

[2] ***Физический институт им П.Н.Лебедева, Российская Академии Наук***

[3] ***Хорогский государственный университет, г. Хорог, Таджикистан***

[4]***Физический факультет, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова***

В данной статье рассмотрена возможность создания новой архитектуры для системы обнаружения различных характеристик в астрофизике и геофизике с использованием новейших технологий, связанные мультикоптерами, с использованием кластерных систем, альтернативных источников энергии, кластерных технологий, облачных вычислений и больших данных.

Идея состоит в создании быстро-развертываемой масштабируемой динамической системы из контролируемых беспилотников с набором различных детекторов для обнаружения различных компонентов широких атмосферных ливней (ШАЛ) в космических лучах и в геофизике.

Ключевые слова: *система детектирования, мультикоптер, черенковский свет, космические лучи.*

Введение

Традиционно, при изучении широких атмосферных ливней (ШАЛ) от космических лучей, используются различные системы детекторов с различной

геометрией и чувствительностью к компонентам ШАЛ. В настоящее время самыми популярными установки являются огромные установки ЯкуШАЛ [1], Тайга [2,3], ТА [4], Оже [5,6]. Например, размер установки Оже составляет 3000 квадратных километров и состоит из 1600 водных черенковских детекторов. Все эти установки собраны в несколько этапов и первоначально развернуты по выбранной сетке на земной поверхности и нацелены на обнаружения различных компонентов ШАЛ с помощью различных типов детекторов. Эти установки должны стабильно и без помех работать в течение многих десятилетий. При наличии соответствующей инфраструктуры с особыми условиями хранения данных можно получить отличные результаты в области сверхвысоких энергий.

С новейшими достижениями в науке и технологиях в 21-го веке в науке появились новые возможности. Мы предлагаем концепцию и архитектуру системы с быстро-развёртываемыми системами детекторов. Эта система может быть использована для измерения различных характеристик черенковского излучения ШАЛ с использованием новейших технологий: связанные системы мультикоптеров, альтернативные источники энергии, кластерные технологии, облачные вычисления и большие данные.

Развитие этого типа новых систем также позволяют дать мультипликативный эффект для развития различных наук и научных методов наблюдения природных явлений.

1. Черенковский свет от ШАЛ

Черенковское излучение играет важную роль в изучении ШАЛ. По достаточно большому световому потоку в оптическом диапазоне и слабое поглощения в чистой, ясной атмосфере можно эффективно определить суммарную энергию ШАЛ, а также историю развития ливня в атмосфере.

История исследования черонковского света от ШАЛ началось в 40-х годах Геттингеном (1947), который впервые использовал фото-электронные умножители (ФЭУ) для светосбора. Стоит отметить эксперименты проведенные Джелли (1951.). Первые измерения черенковского света от ливней проведены Гольданским и Ждановым [7] и независимо друг от друга Галбрайтом [8]. Особенно ценными были в то время новаторские проектные работы Чудакова [9] и его работы совместно с В.И. Зацепиным [10] по измерению черенковского света от ШАЛ, сделанные на основе каскадной теории электронно-фотонных ливней от первичных протонов для двух уровней наблюдения.

На уровне моря черенковский угол равен 1.3° и убывает с высотой (Рис.1). Пороговые энергии частиц, от которых черенковский свет, например, от электронов, мюонов и протонов на уровне моря составляют 21 МэВ, 4.4 ГэВ и 39 ГэВ соответственно и растут экспоненциально с высотой.

Пионерские работы Чудакова по измерению черенковского света включали в себя также и учёт ионизационного свечения (флуоресцентный свет) как фона для черенковских экспериментов. Позднее он предложил использовать это свечение в экспериментах по изучению ШАЛ.

В нашем случае важно использовать черенковские детекторы с малым размером и весом. Достаточна площадь поверхности черенковского детектора около 78,5 см^2. Также возможно использование черенковского детектора на основе аэрогеля [11]. Сбор черенковского света от ШАЛ наносекундной длительности позволяет определить направление прихода ливня и характеристик фронта ливня.

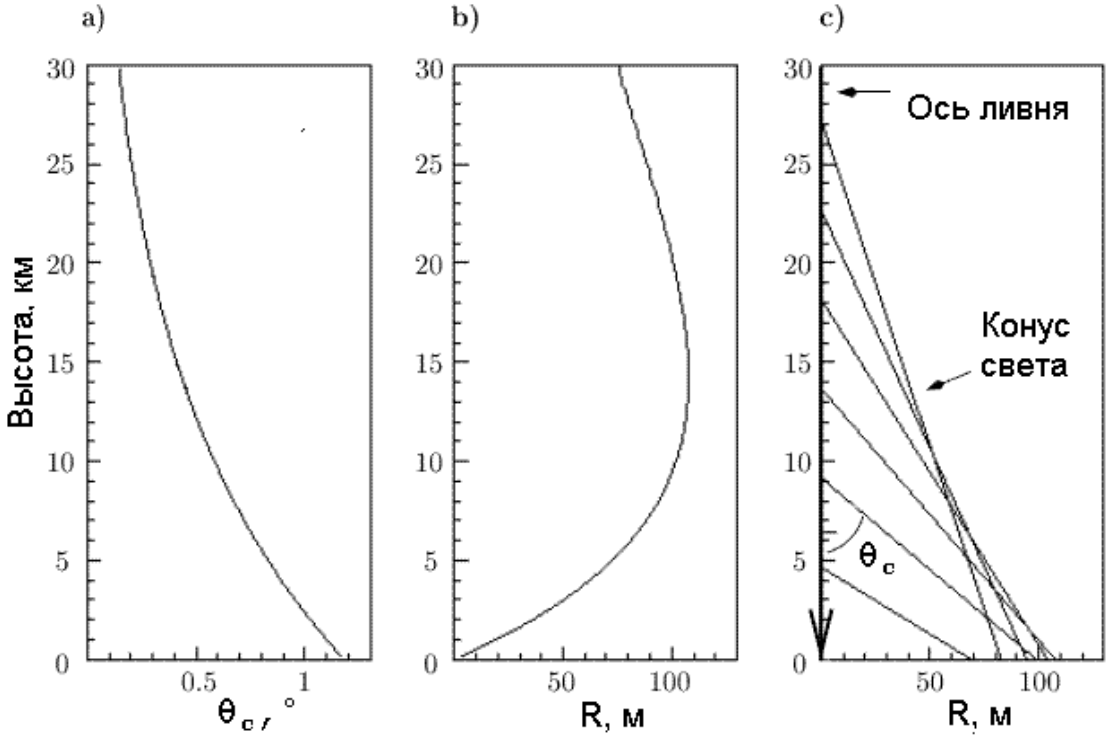


Рис.1. Графики зависимости черенковского угла (a) и радиуса черенковского кольца (b) от высоты. На графике (c) показано изменение черенковского конуса в зависимости от высоты. Уровень наблюдения – 2 км.

2. Дроны и мультикоптеры

Базовый блок предлагаемой системы является беспилотный мультикоптер с набором детекторов на борту, который мы назвали дедрон (dedron – detecting drone) (рис.2.).

В настоящее время в мире быстро развиваются беспилотные летательные аппараты гражданского назначения и мультикоптеры [12].

Рис.2. Квадрокоптер дедрон

Также идут работы по тестированию рабочих систем управления для беспилотных летательных аппаратов [13]. В связи со стремительным развитием данных технологий цены на них падают.

Наиболее эффективный источник энергии для дрона является блок из LiPo батарей [14]. Напряжение сборка батарей 4S LiPo будет около 14.8V. Скорость разрядки аккумулятора с емкостью 1000 мАч будет определять ее максимальный выходной ток. Необходимо выбрать точную комбинацию мощности и скорости разрядки аккумуляторов. Важно знать, что характеристики элементов батареи не приняты во внимание при максимальном потреблении тока. Число элементов только определяют напряжение LiPo элемента, необходимого для вашего оборудования.

Например, расчет скорости разрядки аккумуляторов LiPo 2200mAh / 30C может обеспечить только максимальный 66A. Таким образом, скорость разрядной емкости, имеет важное значение.

Например, максимальный ток 1A необходим для 4 двигателей квадрокоптера и 1A для другого оборудования (детекторы, фонари и т.д.), необходимого количества напряжения 11.1V 8800mAh и у нас есть 134 минут времени полета и 8,8 Ампера заданной скорости разряда.

Квадрокоптер весом 1-2 кг пролетает около 50 секунд на расстояние в 1 км. Это также зависит от режима полета и других факторов, таких как вес, сопротивление ветра. Миниатюрный гироскоп, который позволяет квадрокоптеру зависать в воздухе в заданном положении позволяет ему также садиться вертикально на поверхность.

С развитием технологии зарядки из альтернативных источников, время полёта и эффективность будет возрастать.

3. Связь, управление, сбор и анализ данных

С начала 2000-х годов технологии связи прошли далеко вперед (4G [15], LTE [16] и WiMax [17]), и их использование не требует специальных

разрешений в повседневной жизни. Модуль Глонасс [18] и GPS [19] обеспечивают точное позиционирование беспилотных летательных аппаратов с детекторами в пространстве, что позволяет задавать любую структуру позиционирования сети детекторов. Управление с центрального сервера управления, связанного с кластерами дронов было бы оптимальным.

Развертывание системы детектирования черенковского света от ШАЛ будет возможно с учетом погодных условий и прозрачности атмосферы в ясными, безлунными ночами. Работа системы детектирования начинается после посадки дедронов по заданной сетке на поверхности земли. Положение дедронов синхронизируется по данным GPS и беспроводной связи с центральной базовой станцией. Дедроны пролетают до рассчитанных для них координат на земле, после чего лопасти двигателей выключаются и включается система детектирвания. После ночного наблюдения сеанса дедроны прилетают обратно к центральной базовой (материнской) станции для безопасной зарядки от альтернативного источника питания или солнечных батарей в дневное время суток. Это также устраняет все виды негативных сценариев с безопасностью детекторов как от природных явлений, так и техногенных и антропных. Уменьшение рисков в дневное время суток продлевает срок службы системы детекторов.

Все сигналы, зарегистрированные дедронами принимаются одновременно с их временными метками и хранятся на сервере. Объем поступающих данных для каждого события в каждом узле может быть оценена в несколько килобайт информации. Сервер в режиме реального времени после регистрации данных с детекторов и отсева по схеме совпадения сигналов на нескольких узлах классифицирует и сохраняет записанные события.

Обработка последующих данных выполняется в автономном офлайн режиме специалистами физиками с навыками работы с большими данными [20].

Выводы

В связи с быстрым развитием и появлением новых технологий мы предлагаем развивать новые направления в обнаружении и мониторинге различных параметров природных явлений (черенковскиое излучение от ШАЛ, штормовые эффекты, последствия природных и техногенных катастроф), путём размещении различных типов датчиков и детекторов на дедрон.

Особое место занимают исследования черенковского света и флуоресцентного света от ШАЛ.

Такого рода эксперимент можно реализовать при проведении исследования спектра и массового состава космических лучей в диапазоне

энергий 10^9 - 10^{18} эВ одним методом – регистрацией черенковского света ШАЛ. Разместив 100 оптических детекторов на расстоянии от 1 метра до 100 метров друг от друга и занимая площадь в 1-2 кв. км. мы сможем изучить структуру ШАЛ фронта. Сетка может быть как регулярным, так и нерегулярным. Размещение узлов могут быть, как центрально-симметрично относительно центральной базовой станции, так и распределены равномерно по всем узлам многоугольной структуры.

На самом деле, эта система представляет собой развитие телескопа с переменным фокусным расстоянием и для решения астрофизических задач. Это революционное решение технически реализованное на практике является "телескопом XXI века".

Широкое использование с помощью других типов детекторов помещенные в такой системе можно использовать для геофизических исследований и мониторинга в режиме реального времени глубинных структур Земли.

Литература

1. Ivanov, A.A. Wide field-of-view Cherenkov telescope for the detection of cosmic rays in coincidence with the Yakutsk extensive air shower array / A.A. Ivanov, S.P. Knurenko, A.D. Krasilnikov, Z.E. Petrov, M.I. Pravdin, I.Ye. Sleptsov, L.V. Timofeev. // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A. - 2015. - V.772. - P.34-42.
2. Antokhonov B. A. A new 1-km^2 EAS Cherenkov array in the Tunka valley / B. A. Antokhonov, D. Besson, S. F. Beregnev, N. M. Budnev, O. B. Chvalaev, A. Chiavassa, O. A. Gress, N. N. Kalmykov et al // Nucl. Instrum. Meth. - 2011 - V.A639. - P. 42-45.
3. Berezhnev S.F. The Tunka-133 EAS Cherenkov light array: status of 2011 / S.F. Berezhnev, N. Budnev, V. Prosin, et al. // Nucl.Instrum.Meth. 2012. - V.A692. - P.98-105.
4. Kawai H. Telescope Array Experiment / H. Kawai, S. Yoshida, H. Yoshii et al // Nuclear Physics B - Proceedings Supplements, Nuclear Physics B Proceedings Supplements. - 2015. - V.175. - P. 221-226.
5. Louedec K., Atmospheric Monitoring at the Pierre Auger Observatory - Status and Update, 32nd International Cosmic Ray Conference, Beijing 2011. – V.02/0568. - P.63-67.
6. Abraham J. The Pierre Auger Collaboration, Pierre Auger Collaboration / J. Abraham, I. Allekotte, J. Allen, P. Allison et al. // Astropart.Phys. - 2010. V.33 P.108-129.

7. Гольданский В.И. О черенковском излучении космиче- ских частиц в атмосфере / В.И.Гольданский, Г.Б.Жданов // Письма в ЖЭТФ. 1954. -Т. 26. - С.405-410.
8. Galbraith W. Light pulses from the night sky and Čerenkov radiation / W. Galbraith, J.V. Jelley // Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics. - 1955. - V. 6. - P. 304-312.
9. Чудаков А. Е. Черепковское излучение широких атмосферных ливней космических лучей / А. Е. Чудаков, Н. М. Нестерова, В. И. Зацепин и др. // Труды VI Междунар. конф. но космическим лучам. - Москва. 1960. - Т.2. - С.47-55.
10. Зацепин В.И. Черенковское излучение широких атмосферных ливней / В.И. Зацепин, А.Е. Чудаков // ЖЭТФ. - 1962. - Т.42, вып.6. - С. 1622-1628.
11. Fields D.E. Use of Aerogel for Imaging Cherenkov Counters / D.E. Fields, H. van Hecke, J. Boissevain, B.V. Jacak, W.E. Sondheim, J.P. Sullivan, W.J. Willis, K. Wolf, E. Noteboom, P.M. Peters, R. Burke // Nuclear Instruments and Methods In Physics Research Section A-Accelerators Spectrometers Detectors and Associated Equipment. - 1994. - V. 349. - P.431-437.
12. Hoffman G. Quadrotor Helicopter Flight Dynamics and Control: Theory and Experiment" / G. Hoffman, H. Huang, S.L. Waslander, C.J. Tomlin // Conference proc. of the American Institute of Aeronautics and Astronautics /// Hilton Head, South Carolina. - 2007.
13. Saska M. Swarm Distribution and Deployment for Cooperative Surveillance by Micro-Aerial Vehicles / M. Saska, V. Vonásek, J. Chudoba et al. // Journal of Intelligent & Robotic Systems. - 2016. - P. 1-24.
14. Zhang H. "Lithium bis (fluorosulfonyl) imide poly (ethylene oxide) polymer electrolyte" / H. Zhang, Ch. Liu, L. Zheng // Electrochimica Acta. - V.133. - P.529-538.
15. International Mobile Telecommunications-2000 (IMT-2000). - 1997. - M.687-2 (02/97).
16. Parkvall S. ITU global standard for international mobile telecommunications 'IMT-Advanced'; LTE Advanced - Evolving LTE towards IMT-Advanced / S. Parkvall, E. Dahlman, A. Furuskär et al // Vehicular IEEE 68th Technology Conference. 2008. - P.1-5.
17. Radha G.S.V. WiMAX: A Wireless Technology Revolution. / G.S.V. Radha R. Krishna, G. Radhamani // – 2007. - ISBN 0-8493-7059-0.
18. Перов А. И., Харисова В. Н. ГЛОНАСС: принципы построения и эксплуатации / А. И. Перов, В. Н. Харисова // 3-е изд, перераб. - М:. Радиотехника, 2005. - 688 с. - 1000 экз. - ISBN 5-93108-076-7.
19. Navstar GPS user equipment introduction // Public release version - 1996, http://www.navcen.uscg.gov/pubs/gps/gpsuser/gpsuser.pdf
20. Morrison, Alan and other Big Data. How to extract information from them. // PricewaterhouseCoopers, Technology Forecast. The quarterly magazine, Russian edition. - 2010. Issue 3.

"ОИЛАИ ДЕТЕКТОРХО" ВА ТАТБИҚИ ОНҲО ДАР ФИЗИКА

Shoziyoev G.P.[1,2], Shoziyoev Sh.P.[3,4]

[1] ***Филиали Донишгоҳи Давлатии Москва ба номи М.В. ЛОМОНОСОВ дар ш. Душанбе, Тоҷикистон***

[2] ***Институти физика ба номи П.Н.Лебедев Академияи илмҳои Русия***

[3] ***Донишгоҳи давлатии Хоруғ ба номи М.Назаршоев, Хоруғ, Тоҷикистон***

[4] ***Факултаи физикаи Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В. Ломоносов, Москва, Россия***

Ин кор барои сохтани сохтори нави системаи ошкоркуни хусусиятҳои гуногун дар илмҳои астрофизика ва геофизика бо истифода аз навтарин технологияҳо вобаста ба системаҳои кластерии мултикоптерҳо, манбаъҳои алтернативии энергия, технологияҳои кластер, технологияхои абрӣ-компютерӣ ва коркарди ҳачмҳои калони информационӣ.

Идеяи системаи динамикии миқёспазири зудҷойгир аз дрони назоратшаванда бо маҷмӯи детекторҳои гуногун барои ошкор намудани ҷузъҳои гуногуни «борони зарраҳои космикии атмосферии васеъ» дар шуоҳои кайҳони ва дар масалаҳои геофизикӣ хеле ҷолиб аст.

Калимаҳои калидӣ: системаи детекторҳо, мултикоптер, рушноии черенков, шуоҳои кайҳони.

" DETECTORS' SWARM" AND THEIR APPLICATION IN PHYSICS

Shoziyoev G.P. [1,2], Shoziyoev Sh.P.[3,4]

[1] **P.N.Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences Moscow, Russia**

[2] **The branch of Lomonosov Moscow State University in Dushanbe, Dushanbe, Tajikistan**

[3] **Khorog State University, Khorog, Tajikistan**

[4] **Physics Department, M.V.Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia**

This paper points to create a new architecture of detection system of different characteristics in astrophysics and geophysics using the latest technologies related to multicopter cluster systems, alternative energy sources, cluster technologies, cloud computing and BIG DATA.

The idea of quick-deploy scalable dynamic system of controlled drone with a small set of different detectors for the detection of various components of extensive air showers (EAS) in cosmic rays and in geophysics are very attractive.

Key words: detecting system, multicopters, Cerenkov light, cosmic rays.

Сведения об авторах. **Шозиёев Гулмурод Парвонашоевич** – к.ф.-м.н., старший научный сотрудник ОЯФА Физического института РАН, старший научный сотрудник Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе. gulmurod@mail.ru.

Шозиёев Шокарим Парвонашоевич – аспирант кафедры геофизики физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, преподаватель Хорогского Государственного Университета им М. Назаршо. shokarim@mail.ru

УДК 548.3

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА МЕХАНИЗМОВ ВХОЖДЕНИЯ АЛЮМИНИЯ В Ca –И Mg - МАНТИЙНЫЕ ПЕРОВСКИТЫ

Еремин Н. Н. [1]***, Гречановский А. Е.*** [2]***, Марченко Е. И.*** [1]

[1] Геологический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова
[2] Институт геохимии, минералогии и рудообразования имени Н.П. Семененко НАН Украины

В работе проведено исследование энергий вхождения примесных атомов Al *в структуры* Ca- *и* Mg- *перовскитов при температурах и давлениях мантии Земли методами полуэмпирического и квантовохимического моделирования. Расчеты проводились в диапазоне давлений и температур от 0 до 140 ГПа и от 0 до 2400 К, соответственно. Рассмотрены возможные механизмы вхождения* Al *в структуры перовскитов. Показано, что вхождение алюминия в* $MgSiO_3$ *значительно более выгодно, чем в* $CaSiO_3$.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, дефекты, $CaSiO_3$, Al в мантии Земли.

Введение

На сегодняшний день проблемой состава мантии Земли занимаются многие группы ученых по всему миру. В силу своего доминирующего положения в мантии Земли перовскит $MgSiO_3$ (≈70%) и магнезиовюстит (Mg,Fe)O (≈20%) представляют большой интерес и активно изучаются как теоретическими, так и экспериментальными методами. Доля $CaSiO_3$-перовскита оценивается в 6-12 вес%. Однако существует и ряд до сих пор нерешенных проблем, среди которых можно выделить до конца не определенные минеральные фазы, аккумулирующие Al в средней и нижней мантии [1].

При давлении 10-20 ГПа и температуре 1100 К $CaSiO_3$ испытывает структурную перестройку в перовскитовый мотив. Считается, что при высоких P-T параметрах $CaSiO_3$ кристаллизуется в структурном типе кубического

перовскита с пространственной группой *Pm*-3*m*, а при понижении давления и температуры структура искажается до тетерагональной *I*4*/mcm* или ромбической *Pnma* [2].

В настоящее работе исследовалось два наиболее достоверных механизма вхождения атомов Al в Mg-перовскит [3]: Mg+Si →Al+Al (CCM-charge couple mechanism) с сохранением баланса зарядов; Si+Si+O→Al+Al+V_O (OVM- oxygen vacancy mechanism), где для сохранения баланса зарядов вводится вакансия в позицию кислорода. Неоднократно показывалось, что для замещений в $CaSiO_3$ реализуется только OVM механизм.

Целью настоящей работы явилось уточнение механизмов и сравнительная количественная оценка энергетики вхождения Al в структуры $CaSiO_3$ и $MgSiO_3$ в термодинамической обстановке мантии Земли.

Методика моделирования

Расчеты кристаллических структур и осуществлялись методами полуэмпирического и квантовохимического моделирования. Полуэмпирические расчеты проводились в программе GULP 4.0 [4] в P-T диапазоне от 0 до 140 ГПа и от 0 до 2400 К с использованием двух наборов потенциалов межатомного взаимодействия: модель 1 - [5] и модель 2 – [6], параметры которых приведены в табл.1. Особое внимание было уделено P-T диапазону, отвечающему мантийной геотерме (рис. 1).

Дополнительно к атомистическим вычислениям были проведены расчеты из первых принципов с использованием пакета Quantum-Espresso [7], который основан на приближении локальной электронной плотности и метода псевдопотенциалов. Расчеты были выполнены в обобщенном градиентном приближении (GGA). Энергии обрезания волновых функций составляли 80-100 Ry, плотности заряда - 320-400 Ry. При релаксации структур использовалась решетка волновых векторов 2x2x2. Сходимость расчетов контролировалась параметром 10^{-10} Ry для полной энергии электронов E_{tot} и менее 0.005 эВ/Å для сил на атомах.

Таким образом, моделирование дефектов в структурах $MgSiO_3$ (бриджманит) и $CaSiO_3$ (Pm-3m, Pnma, I4/mcm модификации) осуществлялось тремя независимыми процедурами:

1) с использованием стандартной процедуры расчета точечных дефектов методом Мотта-Литтлтона [4] с радиусами вложенных сфер r_1 и r_2 равными 8,5 и 18,5 Å, соответственно;

2) моделированием в сверхъячейках различной размерности, содержащих от 540 до 1280 атомов. В качестве оптимального размера были выбраны сверхъячейки 5×5×5 для $CaSiO_3$ и 3×3×3 для $MgSiO_3$. (рис. 2) При

моделировании в сверхъячейках расчеты проводились как с локальным ассоциатом точечных дефектов, так и с изолированными дефектами, разнесенными друг от друга по пространству сверхъячейки на значительное расстояние (десятки Å);

3) квантовохимическим расчетом с использованием сверхъячеек, содержащих 40 и 60 атомов для $CaSiO_3$ и 40 и 80 атомов для $MgSiO_3$. В этом случае для оценки энергии формирования вакансии кислорода использовалась формула [8]:

$$E_f^O = E_{def} - E_{perf} + \frac{1}{2}E_{O_2}, \quad (1)$$

где E_{def} - энергия кристалла с дефектом, E_{perf} - энергия идеального кристалла (без дефекта), E_{O_2} -энергия молекулы кислорода.

Для расчета энергии замещения атома Al в катионной позиции (Mg, Si) использовалась формула:

$$E_f^{Al \to Cat} = E_{def} - E_{perf} + E^{free}(Cat) - E^{free}(Al), \quad (2)$$

где $E^{free}(Cat)$ – полная энергия атома (Mg, Si), а $E^{free}(Al)$ – полная энергия атома Al.

Результаты

Энергетика изолированных дефектов для $CaSiO_3$ и $MgSiO_3$ была рассмотрена при различных термодинамических параметрах (рис. 1). Результаты расчетов показали, что для $MgSiO_3$ наиболее выгодной является схема CCM, а для $CaSiO_3$ - схема OVM. Разница в значениях энергий вхождения алюминия в Ca- и Mg- перовскиты составляет в среднем ≈ 40 эВ по данным полуэмпирического моделирования. Энергии вхождения примеси Al рассчитанные методом Мотта-Литтлтона и моделированием в сверхъячейках неплохо коррелируют между собой и различаются в пределах нескольких эВ, что говорит о корректной работе моделей потенциалов межатомного взаимодействия. Энергии вхождения для Mg-перовскита находятся в диапазоне 1.52-0.6 эВ в интервале давлений 0-140 ГПа, соответственно, а для Ca-перовскита 40.28- 42.2 эВ по результатам расчета методом Мотта-Литтлтона (от 4 до 4.47 эВ и 40.1 – 39.7 эВ при моделировании в сверхъячейках) (табл.2). По результатам квантовохимического моделирования (при нулевом давлении) энергия вхождения Al в Mg-перовскит по CCM механизму составляет 4.62 эВ, а в Ca-Pv по OVM - 9.43 эВ, что качественно согласуется с результатами полуэмпирического моделирования, хотя абсолютные значения разности энергий (~5 эВ) в несколько раз меньше, чем для результатов атомистических расчетов (~39 эВ). Такое расхождение может быть объяснено большим

различием в размерностях расчетных ячеек и не учетом в квантовохимических расчетах эффектом давления.

Различие в энергиях вхождения атомов Al в Mg- и Ca- перовскиты составляет 39-40 эВ (при температуре 0 K) во всем диапазоне исследуемых давлений приводит к исключительно резкому предпочтению вхождения Al в $MgSiO_3$, чем в $CaSiO_3$.

Выводы

Рассчитаны энергии вхождения примесных атомов Al в Mg- и Ca-перовскиты при давлениях и температурах, соответствующих геотерме мантии. Подтверждено, что для $MgSiO_3$ определяющим является CCM механизм, а для $CaSiO_3$- OVM, причем ассоциаты дефектов более предпочтительны, чем комбинации изолированных дефектов. Во всем P-T диапазоне энергии вхождения примесей в $MgSiO_3$ на порядок меньше соответствующих значений для Ca-Pv. Результаты полуэмпирического и квантовохимического моделирования качественно коррелируют между собой.

Таблица 1. Параметры межатомных потенциалов взаимодействия, используемых при полуэмпирическом моделировании

Модель 1 [5]				
Потенциалы Букингема				
Пара атомов	*A*, eV	B, Å		r_{cut}, Å
$Ca^{+1.26}$ - $O^{-1.26}$	483.714581	0.255		12
$Mg^{+1.26}$-$O^{-1.26}$	1075.715161	0.280978		12
$Si^{+2.52}$-$O^{-1.26}$	249.974536	0.3205		12
$Al^{+1.89}$ - $O^{-1.26}$	128627.49	0.144245		12
$O^{-1.26}$ - $O^{-1.26}$	4048.394	0.27047		12
Потенциалы Морзе				
Пара атомов	D, eV	σ, $Å^{-1}$	r_0, Å	r_{cut}, Å
$Al^{+1.89}$ - $O^{-1.26}$	0.051986	1.2	2.61	12
Модель 2 [6]				
Потенциалы Морзе				
Пара атомов	D, eV	σ, $Å^{-1}$	r_0, Å	r_{cut}, Å
$Ca^{+1.2}$ - $O^{-1.2}$	0.030211	2.241334	2.923245	12
$Mg^{+1.2}$-$O^{-1.2}$	0.038908	2.281000	2.58615	12
$Si^{+2.4}$-$O^{-1.2}$	0.340554	2.006700	2.10000	12
$Al^{+1.8}$ - $O^{-1.2}$	0.361581	1.900442	3.618701	12
$O^{-1.2}$ - $O^{-1.2}$	0.042395	1.379316	3.618701	12

Таблица 2. Энергии изолированных дефектов для $CaSiO_3$ и $MgSiO_3$ по методу Мотта-Литтлтона при различных давлениях.

$CaSiO_3$	P, ГПа	0	20	40	60	80	100	120	140
	O_{vac}	7.91	7.46	6.90	6.31	5.70	5.10	4.48	3.87
	Si→Al	16.18	16.88	17.42	17.87	18.25	18.59	18.89	19.17
	2(Si→Al) $+O_{vac}$	40.28	41.22	41.75	42.05	42.19	42.27	42.26	42.20
$MgSO_3$	P, ГПа	0	20	40	60	80	100	120	140
	Si→Al	15.87	16.39	16.81	17.15	17.45	17.71	17.95	18.17
	Mg→Al	-14.35	-14.99	-15.53	-16.01	-16.44	-16.84	-17.21	-17.57
	(Si→Al)+ (Mg→Al)	1.52	1.41	1.28	1.15	1.01	0.87	0.74	0.60

Рис.1. Сверхъячейки 3×3×3 для $MgSiO_3$ (540 атомов) (а) и 5×5×5 для $CaSiO_3$ (625 атомов) (б). Аксонометрическая проекция.

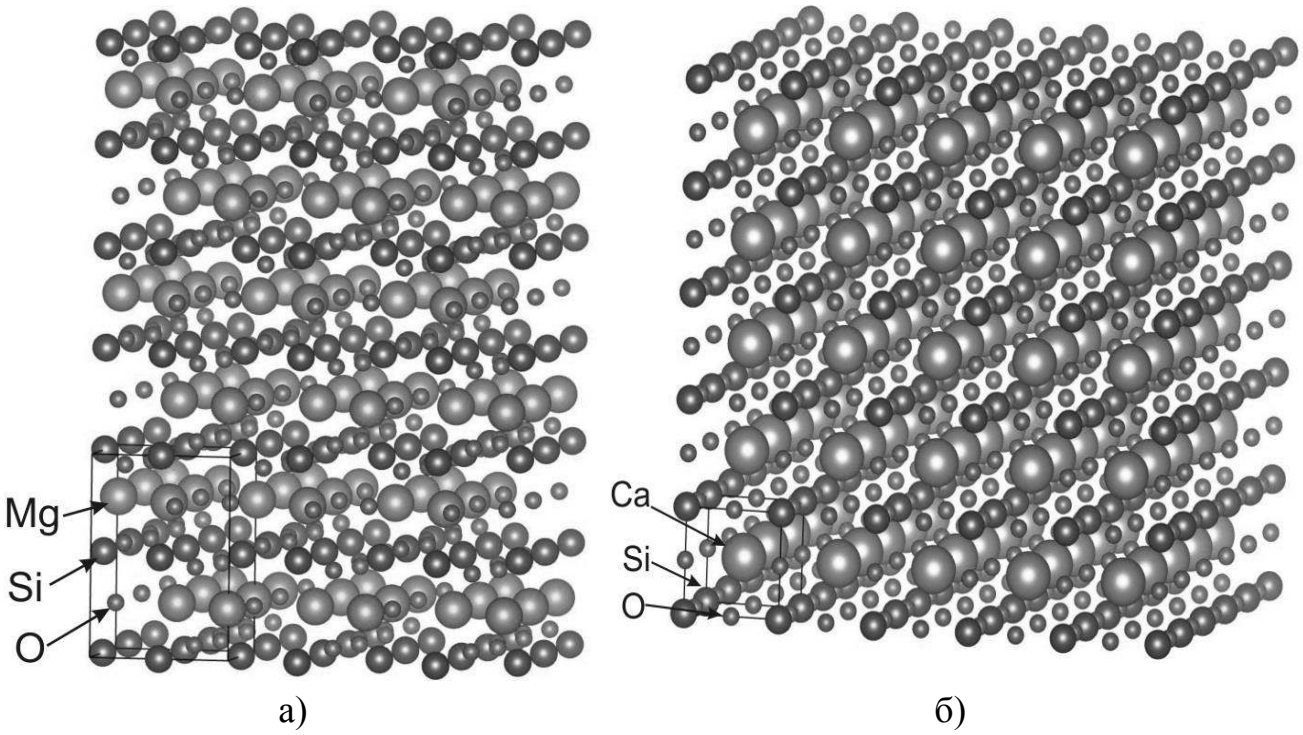
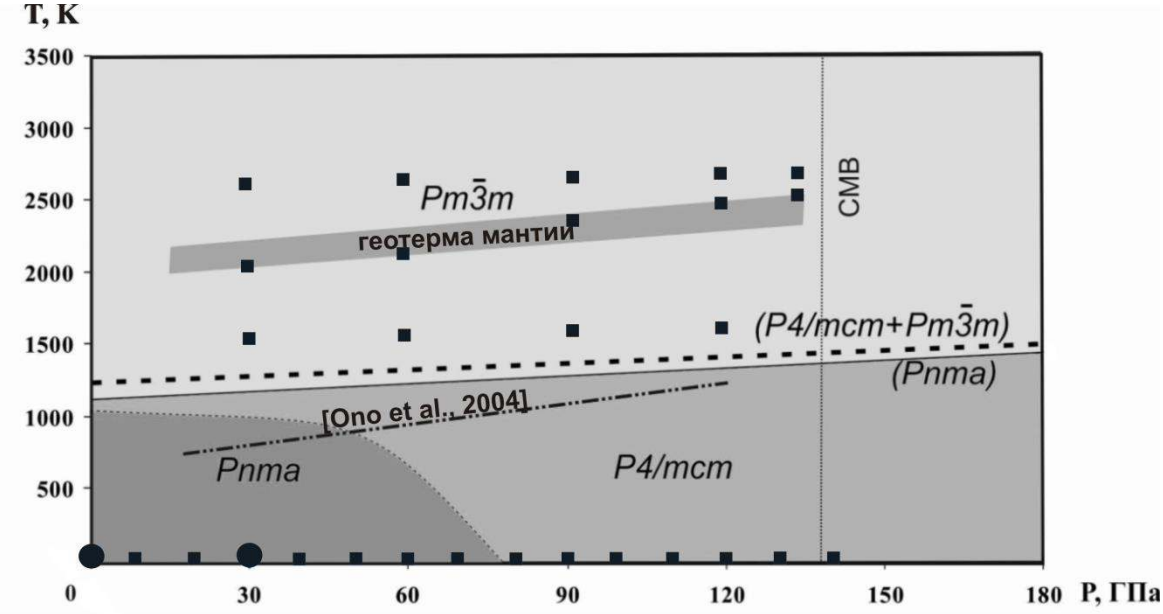


Рис. 2. Фазовая диаграмма для $CaSiO_3$ по данным атомистического расчета [9] с использованием модели потенциалов «1» [5] (Пунктиром показана предсказанная граница перехода Pm-3m ↔ Pnma по модели «2» [6]. Штрих-пунктир – граница перехода к кубической Pm-3m модификации по экспериментальным данным [10]. CMB – граница нижней мантии и ядра). Круглыми значками показаны точки квантовохимического расчета, квадратными – полуэмпирического.



Литература

1. Irifune T. Mineralogy of the Earth – phase transitions and mineralogy of the lower mantle / T. Irifune, T. Tsuchiya // Treatise on Geophysics. Elsevier. - 2007. - V. 2. - PP. 33-62.
2. Caracas R. $CaSiO_3$ perovskite at lower mantle pressures / R. Caracas, R. Wentzcovitch Gephysical // Research Letters. 2005. V. 32, L06306.
3. Akber-Knutson S. Effect of Al on the sharpness of the $MgSiO_3$ perovskite to post-perovskite phase transition / S. Akber-Knutson, G.Steinle-Neumann, P.D. Asimow // Gephysical Research Letters. - 2005. - V. 32. L14303.
4. Gale J.D. GULP: Capabilities and prospects // Z. Krist. - 2005. - V. 220. - PP. 552-554.
5. Урусов В.С. Атомистическое компьютерное моделирование структуры и свойств неорганических кристаллов и минералов, их дефектов и твердых растворов / В.С Урусов., Н.Н. Еремин // - М.:ГЕОС. - 2012. - С.18-29.
6. Pedone A. A new self-consistent empirical interatomic potential model for oxides, silicates, and silica-based glasses / A. Pedone, G. Malavasi, M.C. Menziani, A.N. Cormack, U. Segre J. // Phys. Chem. B. - 2006. - V. 110. - PP. 11780-11795.
7. Giannozzi P. Quantum Espresso: a modular and open-source software project for quantum simulations of materials / P. Giannozzi, S. Baroni, N. Bonini, M. Calandra, R. J. Car // Phys.: Condens. Matter. 2009. - V. 21 - N. 39, 395502.
8. Chibisov A.N. Computer simulation of the point defect formation in $MgSiO_3$ - based ceramic materials // Journal of Structural Chemistry. - 2015. - V. 56 N. 3. - PP.454-457.

9. Marchenko E.I. Computer modeling of Ca- and Mg- perovskites containing of Al atoms under Earth's mantle thermodynamic conditions / E.I. Marchenko, N.N. Eremin // Experiment in GeoScience. - 2016. - V. 22. №1. - PP. 29-30.
10. Ono S. Phase transition of Ca-perovskite and stability of Al-bearing Mg-perovskite in the lower Mantle / S. Ono, Y. Ohishi, K. Mibe // American Mineralogist. - 2004. - V. 89. - PP. 1480–1485.

БАҲОИ НАЗАРИЯВИИ МЕХАНИЗМҲОИ ДОХИЛШАВИИ АЛЮМИНИЙ БА ПЕРОВСКИТҲОИ МАНТИЯВИИ Ca ВА Mg

Еремин Н.Н.[1], Гречановский А.Е.[2], Марченко Е.И.[1]

[1] - ***Факултети геологияи ДДМ ба номи М.В. Ломоносов***

[2] - ***Институти геохимия, минералогия ва коркарди конҳо ба номи Н.П. Семененко-и АИ Украина***

Дар ин кор омузиши энергияи дохилшавии атомҳои Al ба сохтори перовскитҳои Ca ва Mg таҳти таъсири ҳолатҳои ҳарорат ва фишори мантияи Замин бо усулҳои нимэмпирикӣ ва модели кванто-химиявӣ ба роҳ монда шудааст. Хисоббарориҳо дар худуди фишори аз 0 то 140 ГПа ва ҳароратҳои аз 0 до 2400 К гузаронида шудаанд. Ҳамчунин имконияти механизмҳои дохилшавии Al ба сохторҳои перовскитҳо дида баромада шудаанд. Нишон дода шудааст, ки дохилшавии алюминий ба $MgSiO_3$ назар бар $CaSiO_3$ бениҳоят кулайт мебошад.

Калимаҳои калидӣ: моделсозии компютерӣ, дефектхо, $CaSiO_3$, Al дар мантияи Замин.

THEORETICAL EVALUATION OF MECHANISMS OF ALUMINUM OCCURRENCE IN Ca -AND Mg - MANTLE PEROVSKITES

Eremin N. N. [1], Grechanovsky A. E. [2], Marchenko E. I. [1]

[1] – Geological Faculty of Lomonosov Moscow State University

[2] – Institute of Geochemistry, Mineralogy and Ore Formation of N.P. Semenenko NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

This article presents a study of energy occurrences of Al atoms in the Ca- and Mg-perovskites structures at temperatures and pressures of the Earth's mantle by semiempirical and quantum chemical modeling methods. Calculations were performed at pressures and temperature ranges from 0 to 140 GPa, and from 0 to 2400 K, respectively. Possible mechanisms of Al entering in perovskites structures were considered. Occurrence of aluminum into $MgSiO_3$ is more energetically favorable than $CaSiO_3$.

Key words: computer simulation, defects, $CaSiO_3$, Al in the Earth's mantle.

Сведения об авторах. **Еремин Николай Николаевич** – д.х.н., профессор РАН, заведующий кафедрой кристаллографии и кристаллохимии геологического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. (495) 939-55-75 neremin@geol.msu.ru

Гречановский Алексей Евгеньевич - старший научный сотрудник отдела радиоспектроскопии минерального вещества Института Геохимии, Минералогии и Рудообразования им. Н.П. Семененко НАН Украины. grechanovsky@gmail.com

Марченко Екатерина Игоревна – магистрант кафедры кристаллографии и кристаллохимии геологического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. (495) 939-38-75 marchenko-ekaterina@bk.ru

УДК: 691.203.2; 621.78.019.84

ХИМИЧЕСКАЯ МОДИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТИ СИЛИКАТНОГО ВОЛОКНА НА ОСНОВЕ ПРИРОДНОГО БАЗАЛЬТА С РАЗЛИЧНОЙ ПОДШИХТОВКОЙ

Кнотько А.В., Паньшина Д.Д., Филимонов Д.С.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Целью настоящей работы является изучение диффузионных процессов, протекающих в стекловолокне на основе природного базальта с элементным составом, модифицированным введением оксидов-модификаторов различной природы (и их влияния на поведение волокна в цементном растворе. В работе исследованы волокна, полученные из базальта Сильцевского (Карпаты) месторождения как соответствующие по составу исходному базальту, так и подшихтованные оксидами фосфора или циркония. Указанные волокна подвергались окислительной термообработке в условиях отсутствия кристаллизации новых фаз, а также ионообменной обработке в насыщенном растворе $LiNO_3$. *Для обработанных волокон исследовалась динамика выхода катионов в водный раствор, определялся элементный состав волокон и распределение элементов по сечению волокна. Также изучалось влияние гидролитической обработки на формирование гидросиликатных новообразований в армированных волокнами стеклофиброцементных композитах. Изменение окислительного состояния железа в рассматриваемых образцах проводили с помощью Мессбауэровской спектроскопии.*

Проведенные исследования показали, что повышение кислотности, наблюдающееся в рассматриваемом волокне из базальта Сильцевского месторождения, по сравнению с ранее исследованными волокнами приводит к смене механизма окисления железа в них, подавляя эффект повышения основности приповерхностных слоев волокна. Подшихтовка волокна P_2O_5 *еще более снижает их основность, а подшихтовка* ZrO_2 *снижает диффузионную подвижность катионов в стекле. Это также приводит к заметному ослаблению (по сравнению с ранее рассмотренными случаями) упоминавшегося эффекта повышения основности поверхности волокна.*

Ключевые слова: *дисперсное армирование цемента, минеральная вата, базальт, стекло, модификация состава, микроструктура, гидролитическая стойкость.*

Введение. Одной из актуальных задач строительного материаловедения является разработка композитов на основе вяжущих материалов и армирующих

добавок. В качестве таких добавок представляет интерес использование высококачественного базальтового стекловолокна (БВ), обладающего высокими механическими свойствами в составе композитов на основе основных строительных вяжущих [1].

Базальт – общее название относительно высокоосновных застывших вулканических пород [2-4]. БВ получают из природного базальта путем его плавления с последющим быстрым охлаждением тонкой струи, выдавливаемой через фильеру (так можно получить более дорогое непрерывное волокно постоянного диаметра) или раздувом струи расплава потоком воздуха. Базальтовые породы плавятся при температурах около 1500-1700 ^{o}C. Когда расплав базальта быстро охлаждают, он переходит в твердое аморфное состояние, как стекло. Медленное охлаждение приводит к практически полной кристаллизации и скоплению минералов. Около 80% состава многих видов базальтов составляют минералы групп плагиоклазов и пироксенов. В химическом составе базальтов преобладают (в химически связанном виде) оксиды кремния, алюминия, кальция, железа (+2 и +3) и магния.

Материалы, полученные из базальта, могут быть использованы при температурах от низких до 300-400^{o}C, при более высоких температурах в окислительной атмосфере (воздух) начинается окисление железа +2 с формированием включений шпинельных ферритов, а при 700-800 ^{o}C начинается криталлизация пироксенов [5-7]. В то же время начальная (диффузионная) стадия окисления базальтового волокна сопровождается повышением основности приповерхностного слоя волокна за счет компенсирующей поток дырок диффузии катионов, подвижных в матрице стекла (Na^{+}, Ca^{2+}, Mg^{2+}) [7, 8], что может быть использовано для направленной химической модификации поверхности волокна [9-11].

Наиболее практически значимыми характеристиками БВ являются высокие значения модуля упругости, твердость, износостойкость, адгезия к вяжущему и коррозионная стойкость в его среде. В то же время коррозионная стойкость в высокоосновной среде твердеющего цементного раствора оказывается одним из основным ограничений использования БВ в композитах строительного назначения, поэтому повышение устойчивости БВ к химической деградации является перспективным направлением их модификации. Одним из путей повышения такой устойчивости является. как уже упоминалось, химическая модификация приповерхностного слоя волокна (например, при окислении) [9-11]. Адгезия волокнистого наполнителя к цементному камню может быть, как ожидается, повышена созданием на поверхности волокна тонкого гидросиликатного слоя с высокой пуццолановой активностью. При этом для волокон с направленно измененным составом шихты (введением

компонентов, отсутствующих в составе исходного базальта – P_2O_5, ZrO_2 и др.) процессы, протекающие при такой модификации, не исследованы.

Целью настоящей работы является исследование диффузионных процессов, протекающих в стекловолокне на основе природного базальта с элементным составом, модифицированным введением оксида фосфора и их влияние на поведение волокна в цементном растворе. Задачи, стоящие при выполнении работы – определение условий окисления волокон разного состава и происходящих при этом изменений в их приповерхностном слое, исследование процессов при гидролитической обработке волокон, изучение влияния проведенной обработки на формирование на их поверхности гидросиликатных новообразований при контакте с твердеющим цементным раствором.

Методика эксперимента. В качестве объектов исследования были выбраны непрерывные БВ, полученные М.С.Маныловым на кафедре химической технологии и новых материалов химического ф-та МГУ из базальта Сильцевского (Карпаты) месторождения (методика получения волокон описана в [12]), катионный состав которых по данным рентгеноспектрального микроанализа (РСМА) соответствовал формуле $Na_{1,7\pm0,1}Mg_{2,4\pm0,05}Al_{7,0\pm0,05}K_{0,8\pm0,05}Ca_{3,5\pm0,1}Ti_{0,3\pm0,05}Fe_{2,8\pm0,1}Si_{19,7\pm0,1}O_x$, и волокна на основе того же базальта, подшихтованные понижающими кислотность компонентами (P_2O_5 или ZrO_2), также синтезированные М.С.Маныловым. Обозначения исследованных в работе волокон приведены в табл. 1.

Табл. 1

Используемые в работе обозначение исследуемых волокон.

№	Образец	Состав обазца
1	Silce	Исходное волокно Сильцевского месторождения
2	P4	подшихтовка 4 масс% P_2O_5
3	P6	подшихтовка 6 масс% P_2O_5
4	Zr16	подшихтовка 16 масс% ZrO_2

Катионные составы подшихтованных волокон также были подтверждены РСМА, а их рентгенаморфность - рентгенофазовым анализом (РФА). Выбор именно непрерывного БВ был обусловлен тем, что технология получения

такого типа волокон обеспечивает постоянство диаметра филамента (в данной работе - 10 мкм).

В то же время представляется интересным сравнение получаемых результатов с ранее исследовавшимся [10,11,13] более основным шпательным волокном производства завода "Баск" (Кемерово), для которого был установлен катионный состав

$Na_{3.4\pm0.2}Mg_{1.87\pm0.03}Al_{6.26\pm0.07}Si_{17.4\pm0.4}K_{0.53\pm0.01}Ca_{5.0\pm0.2}Ti_{0.53\pm0.01}Fe_{4.25\pm0.5}O_x$ [13] и средний диаметр порядка нескольких десятков мкм.

Для изучения диффузионных процессов при окислительной термообработке, исследуемые образцы подвергались отжигу в атмосфере воздуха в интервале температур от 500°С до 700°С в течение часа. Возможное образование кристаллических фаз при термообработке контролировалось РФА.

Ионообменную обработку с целью обогащения приповерхностных слоев волокна более подвижными ионами (Li^+) проводили для неотожженных образцов в насыщенном растворе $LiNO_3$. Для этого брали 1±0.05 г волокна и помещали в 40 мл раствора и выдерживали в течении 14 сут.

Для изучения процессов, происходящих при твердении цементного камня, проводили исследование гидросиликатных новообразований на поверхности волокон в среде твердеющего цемента. Для этого готовили смесь из сухого цемента и волокна, содержащего 2-3 % волокна по массе. Полученную смесь затворяли дистиллированной водой в соотношении вода/цемент=0.4. После чего приготовленные цементные смеси оставили твердеть при комнатной температуре в закрытых пластиковых пробирках в течение 28 суток.

Отсутствие процессов кристаллизации в исследуемых образцах контролировалось с помощью РФА. Рентгенографические эксперименты проводили на дифрактометре с вращающимся анодом Rigaku D/MAX 2500 (Rigaku, Япония) в режиме отражения (геометрия Брегга - Брентано) с использованием Cu K_{cp} излучения и графитового монохроматора. Регистрацию проводили в непрерывном режиме с шагом записи 0.02°.

Исследование образцов методом растровой электронной микроскопии (РЭМ) проводилось на микроскопе LEO Supra 50 VP (Carl Zeiss, Германия) в режиме низкого вакуума (40 Па азота) при ускоряющем напряжении электронной пушки 20 кэВ. Для получения изображения использовали вторичные электроны, полученные изображения регистрировали в оцифрованном виде на ЭВМ.

Определение элементного состава твердых растворов методом рентгеноспектрального микроанализа (РСМА) проводили с использованием энергодисперсионного спектрометра X-MAX (Oxford Instruments, Англия),

установленного на растровом электронном микроскопе LEO Supra 50VP. Анализ проводили как с поверхности группы волокон с усреднением по площади в несколько тысяч квадратных микрон при ускоряющем напряжении 20 кэВ. Также проводили измерения распределения содержания элементов по сечению волокна методом сканирования по линии при ускоряющем напряжении 10 и 20 кэВ. Кроме того проводили определение состава в нескольких точках вблизи поверхности и центра волокна. Расчет элементного состава проводился в полуавтоматическом режиме с использованием комплекта программного обеспечения INCA Oxford.

Для рентгеноспектрального микроанализа по сечению волокна пробы готовили специальным образом. Минеральное волокно заливалось эпоксидной смолой. При этом получались стержни с размерами порядка 2см. высотой и диаметром в 1см. Стержни обрезались по сечению с максимальным содержанием волокон так, что их высота составляла порядка одного сантиметра.

Динамику перехода ионов с приповерхносных слоев волокна в водную фазу, контактирущую с НБВ, подвергнытым той или иной химической обработки, исследовали методом pH-метрического анализа. Измерения проводились на pH-метре «Эксперт – 001» (производство «Эконикс-Эксперт») с помощью комбинируемого стеклянного pH-метрического электрода «ЭСК-10301/4» с рабочим диапазоном pH лежит в интервале от 0 до 14. Волокно массой 0,2±0.01 г помещали в 40 мл дистиллированной воды в закрытый стакан, после чего проводили ежедневные измерения в течении 10 дней.

Исследования валентного и структурного состояний ионов железа в базальтовых волокнах проводили с помощью метода мессбауэровской спектроскопии. Спетры регистрировались на мессбауэровском спектрометре электродинамического типа с постоянным ускорением MS-1104E (разработка НИИ физики ЮРФУ), в качестве источника выступал ^{57}Co на Rh подложке, все химические сдвиги считались относительно стандартного поглощения α-Fe при комнатной температуре. Обработка спектров проводилась с помощью программы, управляющей спектрометром.

Результаты и их обсуждение. Отсутствие кристаллизационных процессов в исследованных волокнах в результате всех проводившихся с ними модификаций было подтверждено методом РФА.

Исследование исходных волокон методом Мёссбауэровской спектроскопии показало, что катионы как Fe^{3+} , так и Fe^{2+}, входящие в состав волокна находятся в двух разных позициях (рис. 1), которые, по всей видимости, могут быть соотнесены с позициями в каркасе и каналах структуры стекла. В то же время для аморфного материала определить какой именно тип

ионов железа какой структурной позиции соответствует довольно затруднительно. При этом интересно отметить, что доли ионов железа, находящихся в обеих позициях вполне сопоставимы (табл. 2). Данные по влиянию проведенной термообработки на соотношение содержания в волокнах железа в разных степенях окисления приведены в табл.3 (изменение спектра на примере образца Zr16 показано на рис. 2), из которой можно видеть, что волокнах silce и P6 содержание железа в окисленной форме примерно в 2 раза превышает содержание железа +2, а легирование волокна оксидом циркония приводит в примерно равным содержаниям железа в обеих степенях окисления.

Табл.2.

Распределение ионов железа в исследованных стеклах по степеням окисления и позициям по данным Мёссбауэровской спектроскопии.

Образец	Fe^{3+}/Fe^{2+}	$Fe^{3+}1/Fe^{3+}2$	$Fe^{2+}1/Fe^{2+}2$
Silce исх	2.39	0.73	0.77
P6 исх	1.93	0.65	
Zr16 исх	1.31	1.45	1.93
волокно «Баск»	0.71	0.50	0.25

Табл. 3.

Распределение ионов железа в исследованных стеклах по степеням окисления и позициям по данным Мёссбауэровской спектроскопии.

Образец	Fe^{3+}/Fe^{2+}	доля Fe, изменившего степень окисления	$Fe^{3+}1/Fe^{3+}2$	$Fe^{2+}1/Fe^{2+}2$
Silce 700 °C	16.57	0.24	1.01	
P6 700 °C	6.15	0.20	1.55	
Zr16 700 °C	11.56	0.35	2.1	
волокно «Баск» 700 °C	1.80	0.23	0.19	0.63

РСМА поверхности (включая приповерхностный слой толщиной в несколько мкм) волокон после отжига на воздухе и показал изменение состава анализируемых областей волокон (табл. 4), однако наблюдаемые изменения трудно описать рассматриваемой в [8] схемой диффузионных процессов. РСМА картирование по линии (рис. 3) в данном случае также в отличие от ранее исследованных относительно высокоосновных образцов базальтового стекловолокна (волокно производства «Баск» [11]) не позволило однозначно определить природу ионного диффузионного потока, компенсирующего поток дырок при окислении Fe.

Исследования pH водной фазы, контактирующей с обработанным волокном, в отличие от ранее исследованных случаев, показало сколько-либо значимое повышение основности раствора только для волокон, отожженных при при 700 °С. Причем для волокон состава silce этот эффект был больше, чем для волокон состава P6, а для волокон состава P6 больше, чем для волокон состава Zr16 (рис. 4а-в). В целом величина роста основности раствора была заметно ниже, чем в ранее исследованных растворах, контактирующих с более основным волокном (производства «Баск»).

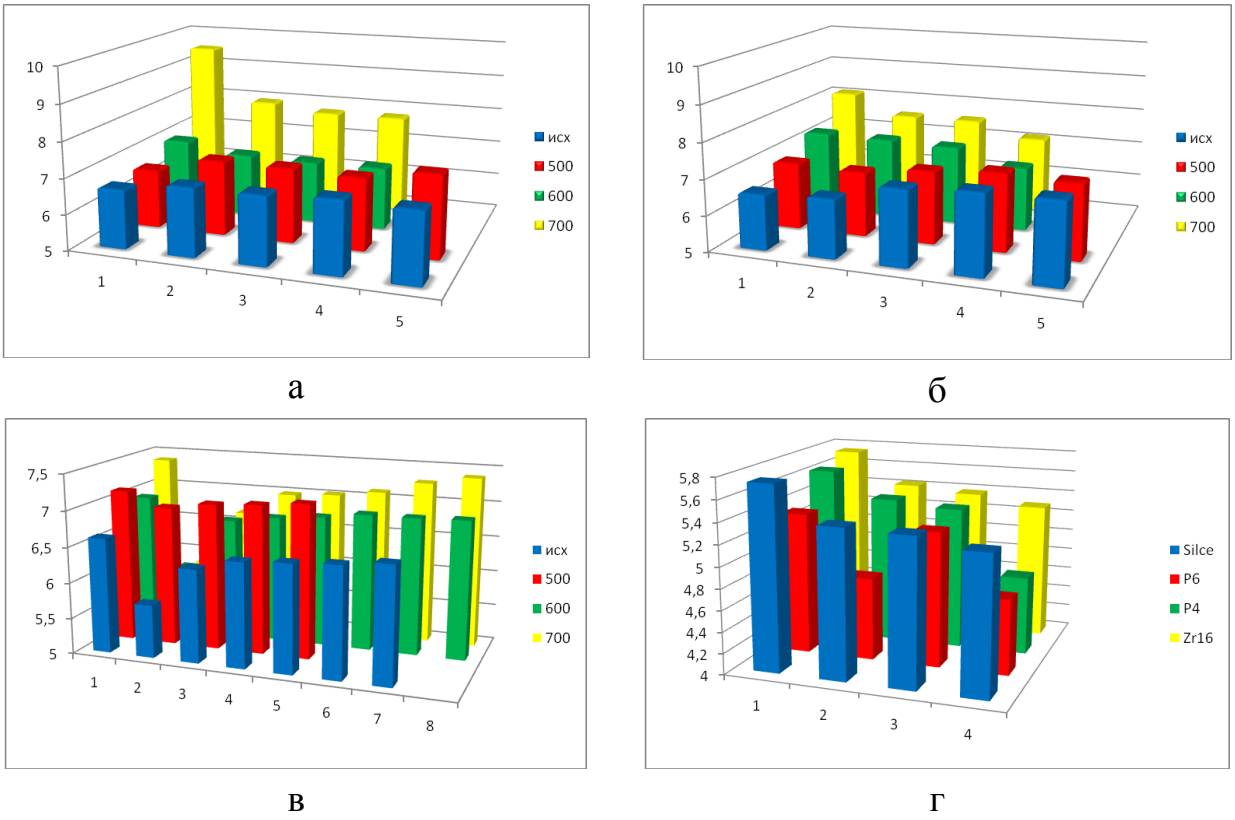


Рис. 4. Изменение pH воды с образцами состава silce (а), P6 (б), Zr16 (в), образцами после обработки раствором $LiNO_3$ (г).

pH-метрическое исследование волокна, выдержанного в насыщенном растворе $LiNO_3$ показало незначительное снижение основности водного раствора (рис. 1г) по сравнению с находившимся в контакте с необработанным волокном, причем в течении нескольких дней выдержки в растворе наблюдался рост величины pH в отличии от случая необработанных образцов (рис. 4а-в).

РЭМ исследование поверхности волокон (рис. 5), подвергнутых той или иной химической модификации и находившиеся в контакте с твердеющем цементом в течение 28 суток при комнатной температуре, показало наличие на поверхности всех рассмотренных волокон следов щелочной коррозии при не очень большом количестве гидросиликатных новообразований в контактной зоне. При этом характерная морфология различных типов волокон,

подвергнутых различной химической модификации оказалась в значительной степени сходной. Протекание шелочной коррозии при этом не приводит к сколь-либо значительному уменьшению наблюдаемой толщины волокон, однако может влиять на их прочность, облегчая зарождение трещин.

Полученный в работе комплекс данных позволяет сделать вывод, что зарядовая компенсация потока локализованных на ионах железа дырок при окислении (подтверждаемом методом Мёссбауровской спектроскопии) входящего в состав волокна Fe^{2+} протекает в рассматриваемом случае не только по рассмотренному в [8] механизму противодиффузии подвижных катионов в каналах структуры стекла. В качестве альтернативного (и основного в данном случае) механизма можно предположить параллельный потоку дырок поток отрицательно заряженных «концевых» (не связанных с другими катион-кислородными тетраэдрами каркаса) атомов кислорода, протекающий, вероятно, по эстафетному механизму. При высоких скоростях окисления (термообработка при 700^{o}C) оба механизма компенсации потока дырок протекают одновременно при преобладании кислородной диффузии, что приводит к наблюдавшимся при pH-метрических экспериментах и РСМА-картировании эффектам. Такая смена преобладающего диффузионного потока скорее всего вызывается резким снижением подвижности катионов из-за модификации системы пор и каналов структуры стекла при повышении его кислотности. Так, увеличение концентрации 4-х валентных кремния и циркония должно уплотнять структуру стекла, снижая долю концевых атомов кислорода. Проявление того же эффекта при легировании стекла фосфором выглядит на первый взгляд неожиданно, однако наблюдавшееся в мёссбауэровских экспериментах распределение Fe^{3+} по двум типам позиций позволяет предположить наличие подобного же распределения и для кристаллохимически сходных ионов Al^{3+}, в этом случае избыток положительного заряда каркаса, связанный с заменой Si^{+4} на P^{+5}, может компенсироваться переходом части атомов Al в каркас структуры стекла.

То же снижение катионной подвижности объясняет, вероятно, и незначительность эффекта при ионообменной обработке волокна раствором $LiNO_3$.

Выводы. Повышение кислотности, наблюдающееся в рассматриваемом волокне из базальта Сильцевского месторождения, по сравнению с ранее исследованными волокнами, приводит к снижению подвижности низкозарядных катионов в стекле, вследствие чего наблюдается смена преобладающего диффузионного потока при окислительной термообработке без образования новых фаз с катионного на кислородный и снижение селективности катионных диффузионных потоков. Указанный эффект заметно

подавляет повышение основности приповерхностных слоев волокна при его окислении без формирования новых кристаллических фаз.

Подшихтовка волокна с введением как ZrO_2, так и P_2O_5 снижает диффузионную подвижность катионов в стекле, а подшихтовка P_2O_5 при этом еще и снижает степень основности стекла. Это приводит к заметному ослаблению (по сравнению с ранее рассмотренными случаями более основных волокон) эффекта повышения при окислении равновесного с волокном pH водного раствора.

Литература

1. Пащенко А.А. Физико-химические основы композиции «неорганическое вяжущее - стекловолокно». / А.А. Пащенко, В.П. Сербин, В.С. Клименко, А.П. Паславская, под ред. А.А. Пащенко // — Киев: «Вища Школа», 1979. — С.224.
2. Douglas R.W. Amorphous materials. / R.W. Douglas, B.Ellis // — London: Wiley, 1972. — P.568.
3. Kopecky L. Crystallization of melted rocks. / L. Kopecky, J. Voldan J. // — Prague: CSAV, 1959. — P.218.
4. Morse S.A. Basalts and phase diagrams. — New York: Springer, 1980. — 493 pp.
5. Militky J. Influence of thermal treatment on tensile failure of basalt fibers / J. Militky, V. Kovacic, J. Rubnerova J. // Engineering Fracture Mechanics. — 2002. - — V. 69 — PP. 1025–1033.
6. Manylov M.S. Crystallization mechanism of basalt glass fibers in air / M.S. Manylov, S.I. Gutnikov, K.V. Pokholok, B.I. Lazoryak, Y.V. Lipatov // Mendeleev Communications. — 2013. — V. 23. - №6 — PP. 361—363.
7. Кнотько А.В. Химические процессы при термообработке базальтового волокна / А.В. Кнотько, А.В. Гаршев, И.Б. Давыдова, В.И. Путляев, В.К. Иванов, Ю.Д. Третьяков // Коррозия: материалы, защита. — 2007. — №3 — С. 37—42.
8. Cooper R.F. The mechanism of oxidation of a basic glass: chemical diffusion of network-modifying cations / R.F. Cooper, J.B. Fanselow, D.B. Poker // Geochim. Cosmochim. Acta. — 1996. — V. 60, N 17 — PP. 3253—3265.
9. Кнотько А.В. Модификация поверхности базальтового волокна для использования в стеклофиброцементных композитах / А.В. Кнотько, А.А. Меледин, В.В. Судьин, А.В. Гаршев, В.И. Путляев, Ю.Д. Третьяков // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. — 2010. — №3 — С. 16—20.
10. Кнотько А.В. Модификация поверхностного слоя базальтового волокна для увеличения его коррозионной стойкости в фиброцементных композитах / А.В. Кнотько, А.А. Меледин, В.В. Судьин, А.В. Гаршев, В.И. Путляев //

Строительные материалы. — 2010. — № 9 — С. 89—93.
11. Кнотько А.В. Комплексная обработка поверхности базальтового стекловолокна для оптимизации его коррозионной стойкости в цементном растворе / А.В. Кнотько, В.В. Судьин, А.В. Гаршев, Я.Ю. Филиппов, В.И. Путляев, Ю.Д. Третьяков // Коррозия: материалы, защита. — 2014. — №2 — С.42—47.
12. Манылов М.С. Влияние модификации базальтового сырья на условия кристаллизации волокон: дис. канд. хим. наук. — М., МГУ, 2013. — С.121.
13. Кнотько А.В. Коррозионная стойкость базальтового стекловолокна в условиях эксплуатации / А.В. Кнотько, Е.А. Пустовгар, А.В. Гаршев, В.И. Путляев // Сборник докладов II семинара – совещания «Керамика и огнеупоры: перспективные решения и нанотехнологии». — Белгород: БГТУ, 2009. — С. 285—289.

ДИГАРГУНШАВИИ КИМИЁВИИ САТҲИ НАХИ СИЛИКАТ ДАР АСОСИ БАЗАЛТИ ТАБИИИ ШИХТАИ ГУНОГУН

Кнотко А.В., Паньшина Д.Д., Филимонов Д.С.

Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В. Ломоносов

Ҳадафи ин кор омӯзиши равандҳои дифузионӣ дар шишанах дар асоси базалти табиӣ бо таркиби элементи дигаргункор ва бо иловаи оксид дигаргункори табиӣ (ва таъсири онҳо ба рафтори нах дар маҳлули семент) мебошад. Дар кор нахи аз базалти кони Силцевский (Карпаты) гирифташуда, ки ба таркиби базалти аслӣ ва шихтаи оксиди фосфор ё сирконий мувофиқ аст, тадқиқ шудааст.

Ин наххо дар зери гармӣ ҳангоми набудани кристаллизатсияи фазаҳои нав оксидонида шуданд, инчунин коркарди ион-мубодила дар ҳалли сермаҳлули $LiNO_3$ гузаронида шуданд. Барои наххои коркардшуда динамикаи озодшавии катионхо дар маҳлули обӣ таҳқиқ шуда, таркиби элементии нах ва тақсимоти элементҳо дар дохили он муайян карда шудааст. Ҳамчунин, таъсири коркарди гидролитикӣ ба ташаккули гидросиликатхои навташкил дар наххои мустаҳкам омӯхта шудааст. Тағйири холати окисии оҳан дар намунаҳои муоинашуда бо спектроскопияи Месбауери гузаронида шудааст. Таҳқиқотҳо нишон медиҳанд, ки баландшавии кислотнокӣ, ки дар нахи базалтаи кони Силцевский мушоҳида мешавад, дар муқоиса бо нахи пештар омӯхташуда, боиси тағйирот дар механизми оксидшавии оҳан дар онҳо, бо рафъи таъсири баланд бардоштани асоси қабатҳои болоии нах мегардад. Якҷоякунии нахи P_2O_5 зиёдтар асоси онҳоро коҳиш дода, якҷоякунии ZrO_2 бошад, харакати дифуузии катионхоро дар шиша коҳиш медиҳад. Ин инчунин ба сустшавии назарраси (дар муқоиса бо ҳолатҳои қаблан баррасӣ кардашуда) таъсири ёдрасшудаи баландбардории асоси сатҳи нах меорад.

Калимаҳои калидӣ: тақвияти дисперсии семент, пашми минералӣ, базалт, шиша, тағйири сохтор, микроструктура, муқовимати обӣ.

THE SURFACE CHEMICAL MODIFICATION OF SILICATE FIBERS BASED ON NATURAL BASALT WITH VARIOUS ALLOYING

Knotko A.V., Panshina D.D., Filimonov D.S.

M.V. Lomonosov's Moscow state university

The aim of this work is the study of the diffusion processes occurring in the glass fiber based on natural basalt with a composition modified by the insertion of oxides-modifiers of different nature (and their influence on the behavior of fibers in cement mortar). In the work the fibers derived from basalt Silce (Carpathians) field as appropriate on the composition of the original basalt and alloyed by oxides of phosphorus or zirconium were studied. These fibers were subjected to oxidative heat treatment at the absence of crystallization of new phases, and to ion exchange treatment in a saturated solution of $LiNO_3$. For the treated fibers was studied the dynamics of the output of the cations in aqueous solution was studied, the elemental composition of the fibers and the distribution of elements over the cross section of the fiber were determined. Also the effect of hydrolytic treatment on the formation of hydrosilicate new particles in fiber-reinforced concrete composites was studied. The change in the oxidation state of iron in the samples was carried out using Moessbauer spectroscopy.

The investigations have shown that the increase in acidity observed in the fiber of basalt Silce field in comparison with the previously investigated fibers leads to a change of the oxidation mechanism of iron in them, suppressing the effect of increasing the basicity of the surface layers of the fibers. The alloying of fiber by P_2O_5 further reduces their basicity, and alloying by ZrO_2 reduces the cations diffusion mobility in the glass. It also leads to a significant decline (compared to previously considered cases) of the mentioned effect of increasing the basicity of the surface of the fiber.

Key words: disperse reinforcement of cement, mineral wool, basalt, glass, modification of composition, microstructure, hydrolytic resistance.

Сведения об авторах. Кнотько Александр Валерьевич – д.х.н., доц., ведущий научный сотрудник химического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, зам. декана факультета наук о материалах МГУ имени М.В. Ломоносова, 119991, Россия, Москва, Ленинские горы, вл.1, стр.3, химический факультет МГУ. knotko@inorg.chem.msu.ru.

Паньшина Дарья Дмитриевна – студент факультета наук о материалах МГУ имени М.В. Ломоносова, 119991, Россия, Москва, Ленинские горы, вл.1, стр.3, химический факультет МГУ.

Филимонов Дмитрий Сергеевич – к.х.н., старший научный сотрудник химического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, Москва, Ленинские горы, вл.1, стр.3, химический факультет МГУ.

УДК 669.893

СИНТЕЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ МИКРОСТРУКТУРЫ И ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ИНТЕРМЕТАЛЛИЧЕСКОГО СОЕДИНЕНИЯ Al_3Fe

Джалолов Ф. Н., Умарова Т. М.

Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе

Синтезирован интерметаллическое соединение Al_3Fe, *исследована микроструктура, также определена теплоемкости полученного образца, предложены простые теоритические описания расчетов определения теплоемкости сплава.*

Ключевые слова: *алюминиевые сплавы, интерметаллическое соединение, микроструктура, теплоемкость.*

Сплавы системы Al-Fe стали объектом исследований много лет назад. Эти сплавы имеют низкие материальные затраты и более низкий удельный вес по сравнению с дорогими, стойкими к коррозии сортов стали, они гарантирует экономию таких цветных металлов, таких как хром, никель и другие, имеют большую стойкость в сульфидных и оксидных атмосферах, особенно при высоких температурах. Поэтому сплавы данной системы являются перспективными конструкционными материалами для изготовления структурной части авиации, нагревательных элементов теплообменника, оборудований в химической промышленности [1].

В работе Банных О. А., Поварова К. Б. сообщается об особом значении алюминида железа Fe_3Al - как перспективном конструкционном материале, обладающим уникальным комплексом физико-механических и служебных свойств, получивших распространение в последние годы [2]. Данная работа считается актуальной, так как исследуемые в работе сплавы являются более легкими (плотность 6.7 г/см^3) и значительно более дешевыми, чем многие жаропрочные стали и сплавы. При их изготовлении для обеспечения заданного уровня служебных свойств в условиях высоких температур не требуется большого количества дефицитных легирующих элементов. Однако, как конструкционные материалы алюминиды железа Fe_3Al все еще широко не востребованы промышленностью из-за отсутствия относительно простой и недорогой технологии их производства.

Диаграмма состояния A1-Fe достаточно распространена, ей посвящено большое число исследований.

Диаграмма состояния характеризуется наличием нескольких металлических соединений Fe_3Al, $FeAl_2$, Fe_2Al_5, $FeAl_3$ и ограниченных твердых растворов как со стороны Fe, так и Al. Каждый из ИМС обладает определенной областью гомогенности[3].

Согласно источнику [3], параметры решетки ИМС $FeAl_3$:a=1,549 нм, b=0,808 нм, c=1,248 нм.

Методика эксперимента и оборудования:

Для синтеза и физико-химических исследований сплава использованы нижеследующие аппаратура и приборы:

- печь KS 400/10 (производство Германия, характеристики: J=16 A, U=380 В и T_{max}=1350°C);
- вакуумный пост.
- микроскоп NIKON 2700 (Производство Япония);
- прибор KLY-TEK для определения теплофизических свойств.

Сплавы для исследования получали из алюминия А995 (ГОСТ 11069-74) и железа марки ЧДА.

Сплав получен в камерной печи KS 400/10 (производство Германия) в условиях вакуума**.** Из полученных таким образом сплава, в стальной изложнице отливали цилиндрические образцы диаметром 10 мм и длиной 60 мм. Изначально был произведен расчет шихты:

$$\omega\% = \frac{A_{ат}\% * M}{A_{ат}\% * M + A_{ат}\% * M_B}$$

Отсюда, ω_{Fe}=40,83%. общий вес исследуемого образца =25 г.

Металлографические исследования позволяют наблюдать изменение микроструктуры в зависимости от состава. Микроструктуру сплавов исследовали на металлографическом микроскопе “Nikon 2700 ” при 400- кратном увеличении при фотографировании. Подготовка образцов проводилась согласно рекомендациям авторов [4]. Для выявления микроструктуры исследуемого сплава образцы подвергались травлению различными травителями в зависимости от состава сплава и наличия присутствующей фазы. Так, например, для эвтектикой фазы использовали реактив 50 (раствор 1г NaOH на 100 мл H_2O в течение 10 мин при температуре 50^o С), в результате травления поверхность образца приобретает матовый оттенок с выраженной структурой, представленной на рис.1. На фотографии микроструктуры интерметаллического соединения можно отчетливо видеть твердые фазы $FeAl_3$ в виде круглых включений, что в целом идентифицирует данное соединение.

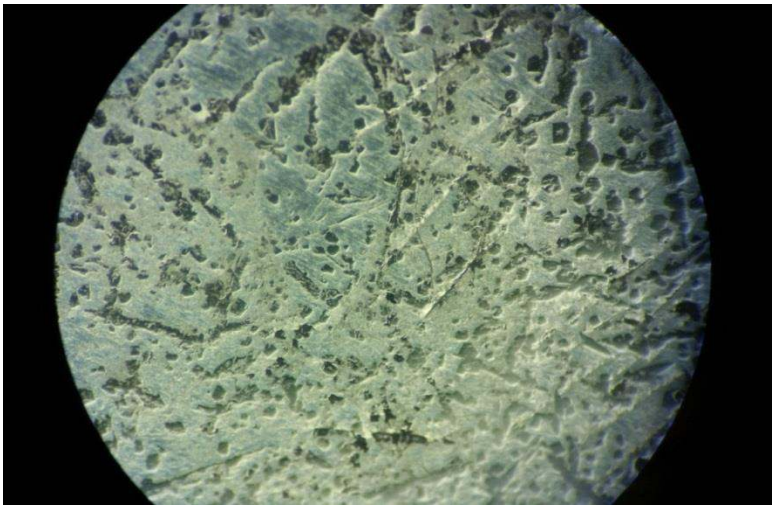


Рис 1. Микроструктура ИМС $FeAl_3$ (Х300).

Далее, с помощью прибора KLY-TEK была исследована теплоемкость синтезированного сплава. Согласно уравнению теплового баланса:

$$Q_{отд} = Q_{получ} \quad (1)$$

где

$$Q_{получ} = Q_{воды} + Q_{кол} \quad (2)$$

Количество теплоты, которое передается от нагретого образца исследуемого сплава до температуры воды калориметра определяли по формуле:

$$Q_{отдан} = Q_{тело} = C_т * m_т * (t - \Theta) \quad (3)$$

Количество теплоты, полученное водой калориметра от исследуемого образца сплава с температурой t_1 и после погружения образца исследуемого сплава до Θ:

$$Q_{воды} = C_в * m_в * (\Theta - t_1) \quad (4)$$

$$Q_{кол} = C_к * m_к * (\Theta - t_1) \quad (5)$$

В формуле 5 рассчитывается количество теплоты, полученное калориметром от образца сплава.

Подставляя (5), (4) и (3) в (1) получим:

$$C_т * m_т * (t - \Theta) = C_в * m_в * (\Theta - t_1) + C_к * m_к * (\Theta - t_1) \quad (6)$$

Из формулы (6) можем найти удельную теплоемкость слава:

$$C_T = \frac{C_B \cdot m_B \cdot (\Theta - t_1) + C_k \cdot m_k \cdot (\Theta - t_1)}{m_T \cdot (t - \Theta)} \quad (7)$$

В результате проделанных расчетов получены результаты, представленные в таблице 1.

Теплофизические свойства интерметаллического соединения $FeAl_3$.

Таблица 1.

№	$m_в$	t	t_1	Θ	C	<C>	ΔC	<ΔC>	Б,
	г	°C			$Дж \cdot кг^{-1} \cdot К^{-1}$				%
1	70	91	25	26,2	890	955	65	54,3	5,7
2	70	91	26,5	27,9	1064		109		
3	70	90	27	28,2	933,7		21,3		
4	70	90	28	29,2	933		22		

Сравнительный анализ значения теплофизических свойств (теплоемкости) алюминия, как материала основы и исследуемых состав (эвтектического и интерметаллического соединения) показывают, что в присутствии железа увеличивается значение теплоемкости исследуемого сплава, причем максимальное ее значение 987 $Дж \cdot кг^{-1} \cdot К^{-1}$ соответствует интерметаллическому соединению $FeAl_3$.

В результате проведенных исследований можно сделать вывод:

- синтезирован интерметаллическое соединение стехиометрического состава Al_3Fe;
- выявлена игольчатая структура с включениями твердой фазы Al_3Fe, что подтверждает наличие самой интерметаллической фазы;
- с помощью уравнения теплового баланса определена теплоёмкость синтезированного сплава.

Литература

1. P. Suchanek, I. Schindler, P. Kratochvil. Deformation Resistance and Structure – Forming Processes of Iron Aluminides in Hot Rolling // Проблемы прочности. -2008.- № 1.- С. 44-47.

2. Банных О.А., Поварова К.Б. Перспективы создания жаропрочных и жаростойких сплавов и интерметаллических соединений // Новые металлические материалы. -1989. -№8. - С.29 – 33.

3. Лякишева Н.П. Диаграммы состояния двойных металлических систем ред. Машиностроение, -1996-2000г., -С. 144-146.

4. Коваленко В.С. «Металлографические реактивы. *Справочник*.-1981. -3-е издание. – С. 27-28.

СИНТЕЗ ВА ОМӮЗИШИ МИКРОСТРУКТУРА ВА ХОСИЯТҲОИ ТЕПЛОФИЗИКИИ ПАЙВАСТАГИИ ИНТЕРМЕТАЛЛИДИИ Al_3Fe

Джалолов Ф.Н., Умарова Т.М.

Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар Душанбе

Пайвастагии интерметаллидии Al_3Fe синтез шуда, омӯхта микроструктура ва гармиғунҷоиши хоси намунаҳо муайян карда шудааст. Тавсифи назариявии оддии хисоби муайян кардани гармиғунҷоиши хоси хӯла пешниҳод шудааст.

Калимаҳои калидӣ: хӯлаҳои алюминий, пайвастагии интерметаллидӣ, микроструктура, гармиғунҷоиши хос.

SYNTHESIS AND STUDY MICROSTRUCTURE AND THERMAL PROPERTIES OF ALLOYS ALUMINUM-IRON (25%)

Dzhalolov F.N., Umarova T.M.

The branch of Lomonosov Moscow State University in Dushanbe

Intermetallic compound $FeAl_3$ were synthesized, the microstructure is studied, theoretically simple description of calculations determining the specific heat of alloy have been proposed as determined by the heat capacity of the samples.

Key words: aluminum alloys, intermetallic compound, microstructure, heat capacity.

Сведения об авторах: Умарова Татьяна Мухсиновна – д.т.н.,Филиал МГУ имени Ломоносова в городе Душанбе, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Бохтар, 17,. Тел.: 227-31-48. E-mail: umarova04@mail.ru. Джалолов Фаридун Наимович – студент 2 курса направления 04.03.02. естественно-научного факультета филиала МГУ имени Ломоносова в городе Душанбе, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бохтар, 17, Тел.: 928078444. E-mail: faridun_1812@mail.ru

УДК 669. 054:669.071

ВРЕМЯ ОСВОЕНИЯ РАЗВЕДАННЫХ ЗАПАСОВ МИНЕРАЛЬНОГО СЫРЬЯ ТАДЖИКИСТАНА

Мирзоев Б.[1], Мирзоев П. Б.[1], Бобоназаров М.[2], Баходури Н. [2]

[1]Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе

[2] ГНУ «Научно-исследовательский институт промышленности» Министерства промышленности и новых технологий Республики Таджикистан

В статье рассматриваются вопросы изучения, состояния исследований и промышленного освоения разведанных запасов природного минерального сырья Таджикистана на примере алюминийсодержащего сырья, фосфоритов и угля.

Ключевые слова: *алюмосодержащее сырьё-нефелиновые сиениты- мусковитовые сланцы-глинозем-фосфорит-фосфорные удобрения-уголь.*

Результаты исследований по переработке алюминийсодержащего сырья – нефелиновых сиенитов месторождения Турпи и ставролит-мусковитовых сланцев месторождения Курговат показывают, что из этого сырья можно эффективно получать не только глинозем для алюминиевой промышленности, но и ряд других побочных продуктов: клинкера для производства высококачественного цемента, калия и других химических элементов для производства минеральных удобрений, кальцинированной соды, поташа и т.п. Легко обогатимые фосфориты месторождения Каратаг можно использовать как сырьё для производства фосфорсодержащих минеральных удобрений, а из угля можно получать кокс, коксовый газ и другие продукты народно-хозяйственного назначения и химического производства.

Как известно, Таджикистан является горной страной, где 93 % территории составляют горы в недрах которых имеются огромные запасы минерального сырья. Поэтому, одна из основных направлений развития промышленности Таджикистана напрямую зависит от результатов геолого-разведочных работ и уточнения запасов полезных ископаемых, разработки новых технологий переработки руд.

Таджикскими геологами разведано более 400 месторождений, из них эксплуатируются более 100, из которых добывают более 50 видов минерального сырья. Однако, некоторые месторождения, в сырье которых остро нуждается промышленность, в частности, алюмосодержащее сырье, фосфориты, каменный уголь из-за отсутствия полного геологического изучения, разработанных и испытанных комплексных технологий переработки не используются. А ведь тот же глинозем для алюминиевой промышленности страны можно было бы получать на основе переработки местных алюмосодержащих минералов.

Научно- практические разработки праведных нами в последних лет показывают, что развитие алюминий - глиноземного производства с комплексным использованием имеющихся минерально-сырьевых ресурсов является наиболее перспективной и высокодоходной отраслью. Это направление развития промышленности будет эффективно способствовать решению многих экономических и социальных проблем.

Сейчас во всем мире (Таджикистан - не исключение) интенсивно ведутся исследования по разработке эффективных технологических способов переработки высококремнистого небокситового сырья, как нефелинового сиенита, каолина, алунита и других видов алюмосодержащих минералов.

В различных регионах Таджикистана геологами разведаны более 10 массивов алюмосодержащего сырья, наиболее крупными из которых являются массивы Турпи, Тутек, Ак-Сай, Рокшиф-Сабах, расположенные в Центральном Таджикистане и Раштской долине. Проведенные лабораторные исследования показали, что химический состав этих месторождений состоит из следующих оксидов:

по массиву Турпи, в%: Al_2O_3 – 21,54-22,6; Na_2O -4,97-5,0; K_2O-6,42-7,8; SiO_2-52,7-53,9; Fe_2O_3-4,9-5,74; P_2O_3 -0,15-0,17; CaO – 2,5-3,5;

по массиву Тутек, в %: Al_2O_3 – 21,7; Na_2O - 7,63; K_2O-7,9; SiO_2-53,2; Fe_2O_3-1,47; P_2O_3 - 0,13;

По массиву Ак-Сай: Al_2O_3 – 22,67; Na_2O -5,5; K_2O - 6,2; SiO_2 - 56,6; Fe_2O_3-6,75.

Как видно, почти у всех месторождений нефелиновых сиенитов Таджикистана показатели химического состава незначительно отличаются друг от друга. Среди названных месторождений наиболее изученным является массив Турпи [1], где по расчетным данным запасы сырья - нефелинового сиенита на глинозем составляет более 100 млн. т. В прошлые годы рядом академических институтов бывшего СССР и Институтом химии АН Республики Таджикистан [1,2] были исследованы некоторые технологические варианты получения глинозема из нефелиновых сиенитов этого

месторождения. Однако, до разработки технологии полной комплексной переработки и использования всех полезных компонентов, входящих в состав нефелиновых сиенитов, дело не дошло. В течение нескольких лет в лабораторных условиях нами исследованы физико-химические свойства нефелиновых сиенитов и технологические характеристики получения новых полезных продуктов. Вместе с тем, требуются повторные исследования характеристик этого алюмосодержащего сырья и разработки комплексной технологии переработки его в глинозем и другие продукты, и естественно, для этого необходимы достаточные капиталовложения.

На Западе ГБАО таджикскими геологами было обнаружено крупное месторождение (Курговат) [2] алюмосодержащего сырья – ставролитовые и мусковитовые сланцы. По предварительным данным более высокое содержание глиноземсодержащего сырья имеется в этом месторождении, что является обнадеживающим и предметом дальнейшего изучения и освоения.

Следует заметить, что поскольку содержание оксида алюминия в нефелиновых сиенитах 2 раза ниже, чем в высококачественных бокситах, промышленная ценность его определяется содержанием в нем оксидов натрия, оксидов калия, галлия, стронция, тория, иттрии и др., которые дают основание на комплексное исследование и новых технологических разработок по их переработке. Это позволит расширить сырьевую базу, устранить имеющийся в регионах Центральной Азии дефицит в ценных химических продуктах и обеспечить сырьем потребности Таджикской алюминиевой компании в глиноземе, завозимого до настоящего времени из-за пределов страны.

Фосфориты

Фосфориты Каратагского месторождения Таджикистана были открыты ещё в 30-х годах прошлого столетия геологом Здориком Б.М. [3] Это месторождение не раз отмечалось в докладах первых конференций по изучению производительных сил Таджикской ССР, как единственное месторождение, способное удовлетворить химическую и туковую промышленность Таджикистана. Фосфориты данного месторождения обладают невысоким содержанием P_2O_5 (от 4,7% до 14,5%).

Известно, что ныне аграрный сектор нашей страны остро нуждается в фосфорных удобрениях

Филиалом МГУ им. В.И. Ломоносова в г. Душанбе совместно Таджикским национальным университетом и Научно-исследовательским институтом промышленности ведутся исследовательские работы по разработке способов переработки фосфоритов с целью получения различных фосфорных и сложных минеральных удобрений. Объектом исследования выбрано Каратагское месторождение фосфоритов. Предварительные исследования

показали, что есть возможность обогащать сырьё с получением фосфоритной муки 20-28%, что является вполне достаточным для производства фосфорсодержащих и комплексных минеральных удобрений. Проводились опыты по синтезу фосфоритов этого месторождения с серной, азотной кислот, с 8% - ной аммиачной водой и получены новые виды полиаммофосфатов кальция [4]. Ведутся исследования по получению из фосфоритов этого месторождения потребные сельскому хозяйства страны фосфорсодержащие минеральные удобрения: суперфосфат, аммофос и др.

Запасы разведанных месторождений и прогнозные ресурсы региона не могут служить серьёзной базой для строительство крупного завода по производству фосфорных удобрений, поэтому возросшие за последние 10 лет потребности в связи с прогрессирующим истощением и снижением плодородия почв должны поглощаться малыми предприятиями годовой производительностью по руде 20-60 тысяч тонн.

Уголь

Доля угля в топливном балансе Таджикистана в разные годы менялась в пределах от 10 до 50%.

По своим свойствам углы Таджикистана подразделяются на несколько видов: бурые, каменные и антрацитовые.

В качестве топлива в основном используются длиннопламенные, газовые, тощие и антрацитовые углы.

Таджикистан располагает свыше 7 млрд.т. потенциальных угольных запасов, из которых 320,3 млн.т. составляют высококалорийные промышленные угли.

В различных районах Таджикистана известно более 30 месторождений углей. Наиболее крупными из них являются месторождения: на севере Таджикистана в Согдийской области: Шурабское (бурый уголь); в Зеравшанской долине: Фан-Ягнобское, Кштут-Зауранское, Магианское, Зиддинское; в Центральном Таджикистане: Равновское, Миёнаду-Хайронское; на Памире –Куртекинское.

В настоящее время добыча угля в республике достигла около 1 млн тонн. Исследованы физико-химические свойства углей более половины из 18 работающих месторождений. Считается, что промышленное освоение в ближайшие годы Фан-Ягнобского месторождения (запасы – более 2 млрд.т) целесообразно путем строительства шахт (производительностью 3-4 млн.т в год), теплоэлектростанций. Интенсивно ведутся геолого-разведочные работы на Назарайлокском месторождении с запасом около 300 млн.т высококачественного антрацитного угля. Его освоение, а также других месторождений этого региона является перспективным в плане обеспечения

труднодоступных горных районов Памира топливным сырьем.

В перспективе для развития экономики страны представляется целесообразным разработка проектов по производству из угля кокса, газа, активированного угля и других продуктов народно-хозяйственного назначения и химической промышленности.

Литература

1. Запольский А.К., Мирзоев Б., Сафиев Х. Сернокислотное разложение нефелиновых сиенитов месторождения Турпи //Докл. АН Тадж. ССР, 1984.Т.27. - №11. - С. 655-658.
2. Валиев Ю.В., Иброхим А., Мирзоев Б. Минералы Памира, как новый вид сырья // - М.: Горный журнал, 2008. №11. -С. 28-31.
3. Здорик Б.М. Таджикистанский фосфоритный район // В сб.: Удобрение и урожай. - М., 1930. - №6.
4. Бобоназаров М., Рахимова М.М., Мирзоев Б. Получение полиаммофосфатов кальция из муки фосфоритов месторождения Каратаг// Вестник Тадж. нац. университета. -Душанбе. 2014. 1/4(153). -С. 135- 140.

ЗАМОНИ АЗХУДКУНИИ ЗАХИРАҲОИ МАЪДАНҲОИ ИКТИШОФШУДАИ ТОҶИКИСТОН

Мирзоев Б. [1], Мирзоев П. [1], Бобоназаров М. [2], Баходури Н. [2]

[1]Филиали Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В. Ломоносов дар ш. Душанбе,

[2] МДИ « Пажӯҳишгоҳи илмӣ-тадқиқотии саноат»-и Вазорати саноат ва технологияҳои нави Ҷумҳурии Тоҷикистон

Дар мақолаи мазкур масъалахои омӯзиш, холати пажӯхиш ва азхудкунии саноатии захирахои ашёи хоми минералии табиии Точикистон дар мисоли ашёи хоми алюминийдор, фосфоритхо ва ангишт оварда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: ашёи хоми алюминийдор, сиенитҳои нефелинӣ, тахтасангҳои мусковитӣ, гилхок, фосфорит, нуриҳои фосфордор, ангишт.

THE TIME OF MASTERING OF PROSPECTED MINERAL RESERVES OF TAJIKISTAN

Mirzoev B. [1], Mirzoev P. [1], Bobonazarov M. [2], Bahoduri N. [2]

[1]The branch of Lomonosov Moscow State University in Dushanbe

[2]SSI *«*Research *Institute of Undustrial» Ministry of Industry and New Technologies of* the Republic of Tajikistan

The article deals with the study, the state of research and industrial development of proven reserves of natural mineral resources of Tajikistan for example, the aluminum raw materials, phosphate rock and coal.

Key words: aluminum-containing raw-nepheline sienity- muscovite schist-alumina-phosphorus fertilizer phosphorus-carbon.

Сведения об авторах: **Мирзоев Бодур** - к.х.н., с.н.с. Филиала МГУ ми М.В. Ломоносова в г. Душанбе. Тел. 900801184.

Мирзоев Парвиз – н.с. Филиала МГУ ми М.В. Ломоносова в г. Душанбе. Тел. 988921858.

Бобоназаров Махмади, с.н.с. ГНУ «Научно-исследовательский институт промышленности» Министерства промышленности и новых технологий Республики Таджикистан, тел. 904620060.

УДК 556.36 (575.3)

СМЕКТИТ И ГЕЙЛЮССИТ ИЗ ИСТОЧНИКА МИНЕРАЛЬНЫХ ВОД «ФИРУЗА МГУ» (СЕВЕРНЫЙ ПАМИР)

Салихов Ф.С.[1], Романовская М.А.[2], Вигасина М.Ф.[2]

[1]Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе

[2]Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

В статье приводятся новые данные о минералах в травертинах источника минеральных вод «Фируза МГУ» и солончаках и выцветах окружающей высокогорной пустыни Северного Памира.

Ключевые слова: *минеральные воды, состав, смектит, гейлюссит, Северный Памир, «Фируза МГУ».*

Источник Фируза МГУ расположен на Северном Памире, в долине р.Баландкиик, в месте слияния р.Джайловкумсай с р.Баландкиик, на высоте 3925м (рис.1). Источник представлен выходом слабоминерализованных вод в аллювиальных отложениях р.Джайловкумсай с дебитом 7л/сек, t 14ºС, образующих серию неглубоких (до 30см) веерообразно расходящихся ступенчатых бассейнов, борта и днища которых сложены известковистыми туфами, общая мощность которых достигает 15м [1]. Бассейны образуют линейно вытянутую каскадную площадку площадью около 5000м^2, длиной около 130м и максимальной шириной до 65м, что позволяет считать источник Фируза МГУ самым крупным по площади развития травертинов в Таджикистане [2].

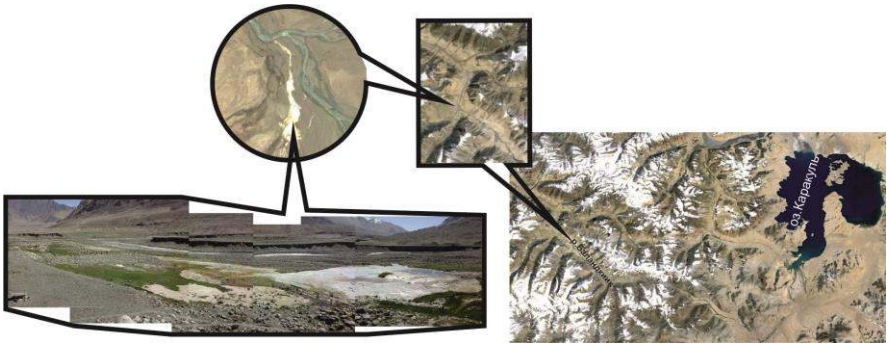


Рис. 1. Местонахождение источника Фируза МГУ

В ***геологическом отношении*** местоположение источника локализовано в глинистых сланцах, песчаниках и известняках карачатырского-мургабского горизонтов нижней-средней перми мощностью более 2000м и кварцевых песчаниках, кварцевых, хлоритовых и серицитовых сланцах ордовик-силурийского возраста мощностью 1500-2000м.

В ***тектоническом смысле*** источник расположен на тектоническом контакте отложений нижней-средней перми и нерасчлененых ордовик-силурийских отложений. Залегание пород как и разрывных нарушений крутое. Источник, по-видимому, связан с одним из оперяющих разломов Афгано-Центральнопамирского краевого глубинного разлома Афгано-Памиро-Куньлунской складчатой системы. Об этом свидетельствует ряд фактов.

1. ***Расположение источника***. Источник локализован на месте резкого (<90^0) изменения направления русла реки Баландкиик с Ю-З на С-В. Кроме того, он находится на линии простирания русел рек Маркансу, Караджилга, Караджилга западная, Баландкиик и Джайловкумсай, трассирующих как Афгано-Центральнопамирский глубинный разлом, так и общую направленность основных структур Памира (рис.2). По смещению, тектоническим «меандрам» рек Маркансу и Баландкиик (в районе источника Фируза МГУ до впадения р.Зулумарт) можно проследить направление и амплитуду сдвиговых движений по зоне Афгано-Центральнопамирского разлома (3-3,5км на СЗ).

Рис. 2. Тектоническая позиция источника

2. ***Минерализация источника.*** По величине общей минерализации (1,1г/л) и макрокомпонентному составу воды источника относятся к маломинерализованным гидрокарбонатно-кальциевым (pH - 6,7). Однако в них значительно увеличены содержания Ba, Cs, Mo, B, Pb, а содержания Zn, Mn, Sr понижены. Согласно современным представлениям [3, 5], воды зоны активного водообмена содержат U в среднем 5,0 мкг/л, зоны затрудненного водообмена – 2мкг/л, воды тектонических трещин – 4,0мкг/л. Содержание U, равное 2,4мкг/л в водах источника Фируза МГУ близко к значению для вод затрудненного водообмена (табл.1). Это факт, вместе повышенными значениями содержаний

Ce, Ba и, особенно B, свидетельствуют о глубинных условиях формирования его вод [4, 5].

Таблица 1.

Микрокомпонентный состав источника «Фируза МГУ» (мг/л)

K	As*10^{-3}	Zn*10^{-3}	Cu	Mn	U*10^{-3}	Pb	Ba
5,8	н/о	5	0,7	н/о	2,4	0,1	25

Li	Rb* 10^{-3}	Cs*10^{-3}	Ag*10^{-3}	Mo*10^{-3}	Sr	B	B/Cl
0,2	26	31	0,6	12	0,8	1,1	0,01

3. Состав травертинов и окружающих солончаков. Для сравнения состава травертинов источника Фируза МГУ и солончаковых выцветов окрестностей источника были проанализированы пробы этих образцов на ИК спектрографе в минералогической лаборатории геологического факультета МГУ им М.В. Ломоносова (Москва) по стандартным методикам. Результаты исследования приведены на рис. 3 и 4.

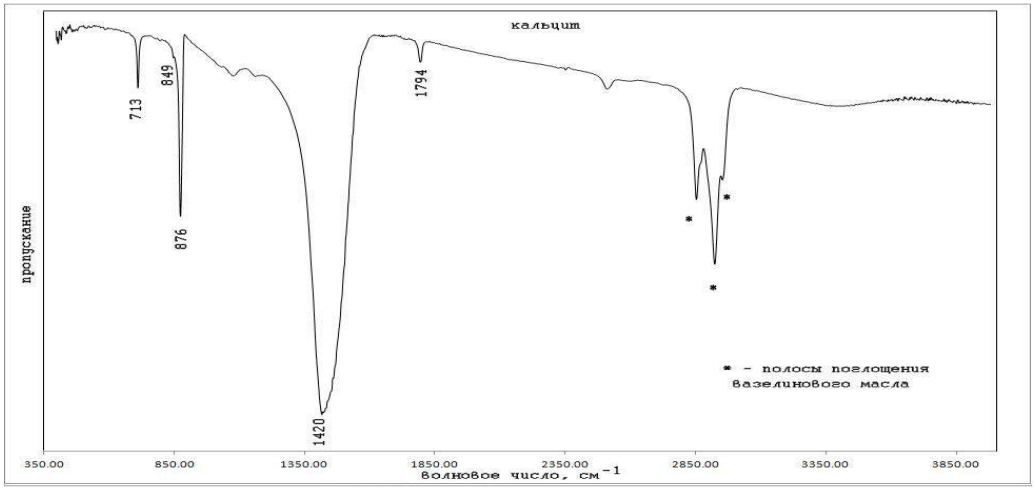


Рис. 3. ИКС травертина из источника

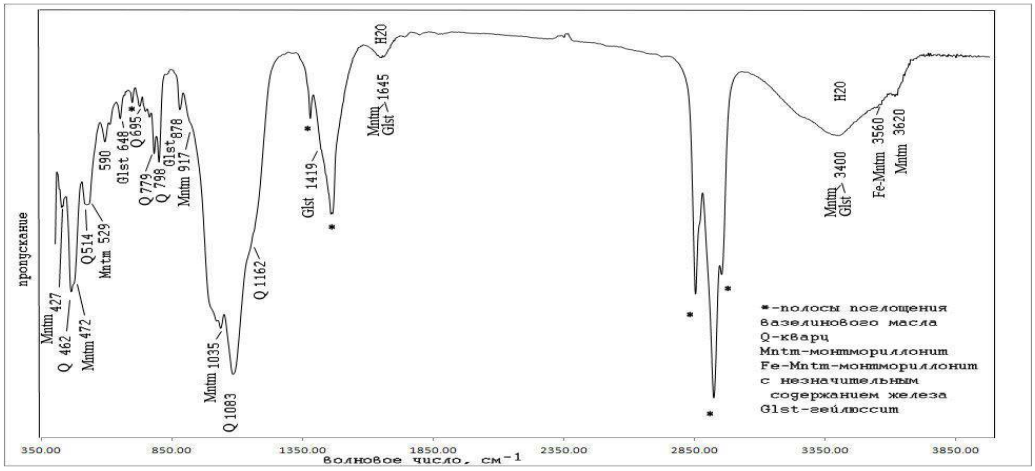


Рис. 4. ИКС образца из солончака

Травертины источника Фируза МГУ никак не связаны с поверхностными водами и выщелачиванием окружающих пород. Об этом свидетельствует чистота минерального состава травертинов – кальцит, и принципиально иной по генезису состав окружающих район источника естественных выцветов и солончаков, где нами обнаружены помимо обычных составляющих – кварц, монтмориллонит, также и смектит и гейлюссит (первая находка в Таджикистане). Гейлюссит Na2Ca(CO3)2*5H2O - эвапоритовый водный карбонат натрия и кальция со структурой островного типа встречается в глинистых отложениях содовых озёр, таких как Лагунильяс и Мерида, Венесуэла (Lagunilla, Mérida, Venezuela) и Сода-Лейк (Big Soda Lake) в шт. Невада, США, в ассоциациях с нортупитом, пирссонитом и тихитом [6]. Смектит ((Mg0,33Al1,67)2(OH)2(Si2O5)2)xNa0,33(H2O)4 – слоистый силикат экзогенного происхождения характерен для многих месторождений глин в угленосных толщах [7]. Применяется как лекарственное средство, в качестве энтеросорбента при диарее, гастрите, язвенной болезни желудка и двенадцатиперстной кишки, колите — в составе комплексной терапии.

Нахождение гейлюссита в солончаках и выцветах высокогорных пустынь Северного Памира указывает на особенности процессов выветривания этого региона. Применение же смектита из этих же пустынных образований в лечебных целях, учитывая его содержания, является весьма гипотетичным.

Макро- и микрокомпонентный состав воды (особенно повышенные значения содержаний цезия, бария, бора и отношение B/Br и B/Cl) свидетельствуют о глубинных (флюидных) условиях формирования вод источника Фируза, что подтверждается и сравнительной ИКспектрографией отложений источника и окружающих солончаков. Исходя из приведенных данных, можно предположить связь источника Фируза МГУ с Афгано-Центральнопамирским краевым глубинным разломом. Источник Фируза МГУ является единственным источником подобного типа на всем Северном Памире. Обнаружение специфических минералов содовых озер позволяет сделать выводы о специфическом, возможно превалирующем инсоляционном характере процессов выветривания на высокогорье Северного Памира.

Литература

1. Салихов Ф.С. Минеральный источник в долине р. Баландкиик (Северный Памир) // ДАН РТ. - 2015. - Т.58. - №4. - С. 338-342.
2. Чуршина Н.М. Минеральные воды Таджикистана. - Душанбе: Дониш, 1992. – 186 с.
3. Трухин Ю.П. Геохимия современных геотермальных процессов и перспективные геотехнологии. - М: Наука, 2003. – 376 с.

4. Арсанова Г.И. К геохимии цезия: источник цезия в термальных водах и кислых вулканитах [Электронный ресурс] // Геокнига: сайт. – URL: http://www.geokniga.org/bookfiles/geokniga-2013arsanova-gik-geohimii-cs-istochnik-v-termalnyh-vodah-i-kislyh-vulkanita.pdf (дата обращения: 12.11.2016).
5. Киреева Т.А. К методике оценки эндогенной составляющей глубоких подземных вод // Вестник МГУ. – 2009. – сер. 4, Геология. – №1. – С. 54-57.
6. Гейлюссит [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.catalogmineralov.ru/mineral/gaylussite.html (дата обращения: 12.11.2016).
7. Смектит [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.catalogmineralov.ru/mineral/smektit.html (дата обращения: 12.11.2016).

СМЕКТИТ ВА ГЕЙЛЮССИТ АЗ ЧАШМАИ ОБИ МИНЕРАЛИИ «ФИРӮЗА МГУ» (ПОМИРИ ШАРҚӢ)

Солеҳов Ф. С.[1], Романовская М. А.[2], Вигасина М.Ф.[2]

[1]***Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов дар ш. Душанбе***

[2]***Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В. Ломоносов***

Дар мақола маълумоти нав оид ба минералҳо дар травертинҳои чашмаи оби минералии «Фирӯза МГУ» ва шуразамини биёбони баланкӯҳи Помири Шарқӣ оварда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: обҳои минералӣ, таркиб, смектит, гейлюссит, Помири Шарқӣ, «Фирӯза МГУ».

GAYLUSSITE AND SMEKTIT FROM THE «FIRUZA MSU» MINERAL WATERS SPRING (NORTHERN PAMIR)

Salikhov F. S.[1], Romanovskaya M. A.[2], Vigasina M.F.[2]

[1]**The Branch of Lomonosov Moscow State University in Dushanbe**

[2]**Lomonosov Moscow State University**

New data about minerals into travertines of the «Firuza MSU» mineral water spring and salt marshes of surrounding high mountainous desert of the Northern Pamir is given.

Key words: mineral spring, composition, smektit, gaylussite, Northern Pamir, «Firuza MSU».

Сведения об авторах. **Салихов Фарид Салохиддинович** – к.г.-м.н., заведующий лабораторией геологии филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в г.Душанбе, 734002, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул.Бохтар, 35/1, Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе. E-mail: ffaarriidd@mail.ru.

Мария Александровна Романовская – к.г.-м.н., доцент кафедры динамической геологии геологического факультета МГУ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, геологический факультет. E-mail: maria_roman@mail.ru .

Вигасина Марина Федоровна - к.г.-м.н., доцент кафедры минералогии геологического факультета МГУ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, геологический факультет. E-mail: vigasina@geol.msu.ru.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

В научном журнале «Вестник Филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе» печатаются статьи, содержащие результаты научных исследований по естественным, гуманитарным и экономическим наукам. При направлении статьи в редколлегию авторам необходимо соблюдать следующие правила: размер статьи не должен превышать 10 страниц компьютерного текста, включая текст, таблицы, библиографию, рисунки и тексты аннотаций на таджикском, русском и английском языках. Статья должна быть подготовлена в системе Microsoft Word, при этом одновременно с распечаткой статьи в 2-х экземплярах сдаются также соответствующие файлы (для каждой статьи на отдельном диске). Рукопись должна быть отпечатана на компьютере (шрифт Times New Roman 14, формат А4, интервал 1,5, поля: верхнее – 3 см, нижнее – 2,5 см, левое – 3 см, правое – 2см;). Все листы статьи должны быть пронумерованы.

Текст статьи должен быть изложен кратко, тщательно отредактирован и подписан всеми авторами с указанием их фамилий, имен и отчеств, номера телефонов. Каждый экземпляр должен содержать: текст статьи, список литературы, тексты резюме на русском, таджикском и английском языках. В каждом резюме после заголовка статьи приводится название учреждения (-ий), в котором (-ых) выполнена данная работа. После каждого резюме отдельной строкой перечисляются ключевые слова на этих языках.

В верхнем правом углу первой страницы рукописи указывается раздел науки, которому соответствует статья, строкой ниже в левом углу страницы указывается индекс статьи по универсальной десятичной классификации (УДК). В центре следующей строки – инициалы и фамилия автора (-ов). Ниже приводится название статьи, затем указывается название организации. Ниже – краткая аннотация (на языке, на котором написана статья) с указанием конкретных результатов работы и вытекающих из них выводов, а также ключевые слова, наиболее полно отражающие область исследования и полученные в работе результаты (до 10 слов) через тире и адрес для корреспонденции (почтовый и электронный). Далее через строку следует основной текст. Сразу после текста статьи приводится список литературы (не более 10 названий) под заголовком «**Литература**» в порядке упоминания, тексты аннотаций и ключевые слова (например, на таджикском и английском языках, если статья написана на русском языке). Ссылки на цитируемую литературу даются в квадратных скобках, например [1].

Список литературы оформляется следующим образом: для книг – фамилия и инициалы автора (-ов), полное название книги, место издания, издательство, год издания, том или выпуск, общее количество страниц. Для

периодических изданий – фамилия и инициалы автора (-ов), название статьи, год издания, том, номер, первая и последняя страницы статьи.

Формулы и символы должны быть напечатаны на компьютере в одном стиле. Написание математических формул в виде рисунков не допускается. Следует избегать громоздких обозначений. Занумерованные формулы пишутся с красной строки, номер формулы в круглых скобках ставится у правого края. Нумеруются лишь те формулы, на которые имеются ссылки.

Сокращения должны быть расшифрованы, за исключением общепринятых.

В десятичных дробях после целой части числа ставится точка.

При упоминании в тексте иностранных фамилий в скобках необходимо давать их оригинальное написание.

Первое упоминание в статье названия вида животного или растения приводится по-русски и по латыни.

В тексте необходимо дать ссылки на все приводимые таблицы, рисунки и фотографии.

Научные статьи, представленные в редакцию журнала, должны иметь направление учреждения, в котором выполнялась данная работа, и экспертное заключение о возможности опубликования. При выполнении работы в нескольких учреждениях представляются направления из каждого учреждения. К статье должна быть приложена заверенная рецензия специалиста.

Редколлегия оставляет за собой право производить сокращения и редакционные изменения статьи. Статьи, не отвечающие настоящим правилам, редколлегией не принимаются.

ПОРЯДОК РЕЦЕНЗИРОВАНИЯ НАУЧНЫХ СТАТЕЙ, ПРЕДСТАВЛЯЕМЫХ В ЖУРНАЛ «ВЕСТНИК ФИЛИАЛА МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В ГОРОДЕ ДУШАНБЕ»

Статьи, поступающие в редакцию, проходят предварительную экспертизу (проводится членами редколлегии – специалистами по соответствующей отрасли науки) и принимаются в установленном порядке. Требования к оформлению оригинала статей приводятся в каждом номере журнала.

Если рукопись принята, то редакция сообщает автору замечания по содержанию и оформлению статьи, которые необходимо устранить до передачи текста на рецензирование.

Затем статьи рецензируются в обязательном порядке членами редколлегии журнала или экспертами соответствующей специальности (кандидатами и докторами наук).

Рецензия должна содержать обоснованное перечисление качеств статьи, в том числе научную новизну проблемы, её актуальность, фактологическую и историческую ценность, точность цитирования, стиль изложения, использование современных источников, а также мотивированное перечисление её недостатков. В заключении дается общая оценка статьи и рекомендации для редколлегии – опубликовать статью, опубликовать её после доработки, направить на дополнительную рецензию специалисту по определенной тематике или отклонить. Объем рецензии - не менее одной страницы текста. Статья, принятая к публикации, но нуждающаяся в доработке, направляется авторам с замечаниями рецензента и редактора. Авторы должны внести все необходимые исправления в окончательный вариант рукописи и вернуть в редакцию исправленный текст, а также его идентичный электронный вариант вместе с первоначальным вариантом рукописи. После доработки статья повторно рецензируется, и редколлегия принимает решение о ее публикации. Статья считается принятой к публикации при наличии положительной рецензии и если её поддержали члены редколлегии. Порядок и очередность публикации статьи определяется в зависимости от даты поступления её окончательного варианта. Рецензирование рукописи осуществляется конфиденциально. Разглашение конфиденциальных деталей рецензирования рукописи нарушает права автора. Рецензентам не разрешается снимать копии статей для своих нужд. Рецензенты, а также члены редколлегии не имеют права использовать в собственных интересах информацию, содержащуюся в рукописи, до её опубликования.

Ответственный редактор: Абдукаримов М.Ф.

Технический редактор: Рахмет-Заде Т. Н.

Муҳаррири масъул: Абдукаримов М.Ф.

Муҳаррири техникӣ: Рахмет-Заде Т. Н.

Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова, 734003, г. Душанбе, ул. Бохтар, 35/1, тел.: +992 (37) 221-99-41, 221-99-04, E-mail: info@msu.tj, сайт: http://www.msu.tj

Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов, 734003, ш. Душанбе, кӯч. Бохтар, 35/1, тел.: +992 (37) 221-99-41, 221-99-04, E-mail: info@msu.tj, сайт: http://www.msu.tj

Подписано в печать 15.02.2017 г.
Заказ 112. Тираж 100 экз.
Отпечатано в издательско-типографическом секторе Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе
г. Душанбе, ул. Бохтар, 35/1