ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В ГОРОДЕ ДУШАНБЕ

СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ЧАСТЬ II

Душанбе – 2016

Ш. Нуриддинов. Сборник индивидуальных заданий по Математическому анализу. Часть II. Душанбе, 2016

Приведены варианты индивидуальных заданий по курсу «Математический анализ», а также программа соответствующей части курса, примерные вопросы к экзамену и краткий справочник.

Целью создания пособия является совершенствование самостоятельной работы студентов. Пособие предназначено для работы со студентами физико-математических, а также инженерных направлений с углубленным изучением курса математического анализа.

Задания студентам выдаются в начале семестра, студенты их выполняют по разделам и представляют преподавателю, ведущему практические занятия.

Автор заранее приносить искренюю благодарность всем тем уважаемым читателям, которые выскажут свои соображения, способствующие совершенствованию содержания данного сборника, а следовательно, повышению качества подготовки специалистов.

Рецензенты: Икрамов С.Д., д.ф.-м.н., профессор Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова,
Мустафокулов Р.М., д.ф.-м.н., профессор Таджикского Национального университета,
Кучакшоев С.Х., к.ф.-м.н.

Рекомендовано к изданию Научно-методическим Советом Филиала М.ГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе (протокол № 7 от 8 июля 2016 г..).

РАЗДЕЛ I.
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Задание 1. Вычислить интегралы с помощью соответствующего метода и результаты выразить с четырьмя знаками после запятой (если это необходимо).

1. 1) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x}\,dx;$ 2) $\int\limits_0^1 \sqrt{2x+x^2}\,dx;$

3) $\int\limits_0^{\pi/2} \arcsin x\,dx;$ 4) $\int\limits_1^2 (2x+3)\ln x\,dx;$

5) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-4)(x-8)};$ 6) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^3};$

7) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x};$ 8) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}.$

2. 1) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin x\,dx;$ 2) $\int\limits_0^{\pi/3} \cos^3 x \sin 2x\,dx;$

3) $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx;$ 4) $\int\limits_0^{\pi} \sin^4 x \cos^4 x\,dx;$

5) $\int\limits_1^8 \frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)dx}{x};$ 6) $\int\limits_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}};$

7) $\int\limits_1^5 \frac{\sqrt{x-1}\,dx}{x};$ 8) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

3. 1) $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x\,dx;$ 2) $\int\limits_{-1}^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx;$

3) $\int\limits_0^{\pi/2} x^3\cos x\,dx;$ 4) $\int\limits_0^{\pi} x\cos x\,dx;$

5) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$; 6) $\int_0^{2} \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$.

7) $\int_{\pi/8}^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^2 2x}$; 8) $\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1}$.

4. 1) $\int_0^{e} \ln^3 x\,dx$; 2) $\int_0^{1} x^2 e^{-x} dx$;

3) $\int_0^{\pi/2} x^3 \cos x\,dx$; 4) $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$;

5) $\int_8^{27} \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}-1}$; 6) $\int_1^{4} \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$;

7) $\int_1^{2} \frac{\sqrt[x]{e}\,dx}{x^2}$; 8) $\int_3^{8} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$.

5. 1) $\int_0^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$; 3) $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x\,dx$;

3) $\int_0^{\pi} x\cos^2 x\,dx$; 4) $\int_0^{\pi/2} x\sin^2 x\,dx$;

5) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx$; 6) $\int_0^{\ln 3} \frac{e^{3x}\,dx}{1+e^{3x}}$;

7) $\int_0^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$; 8) $\int_1^{e} \frac{(1+\ln x)\,dx}{x}$.

6. 1) $\int_0^{1} xe^{-x} dx$; 2) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$;

3) $\int_0^{\pi} x^3 \cos x\,dx$; 4) $\int_0^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$;

5) $\int\limits_4^5 \frac{dx}{x^2-3x}$; 6) $\int\limits_0^7 \frac{x^3\ dx}{\sqrt[3]{7+x^2}} dx$;

7) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ \sqrt{1-\ln^2 x}}$; 8) $\int\limits_1^4 \frac{x\ dx}{\sqrt{2+4x}}$.

7. 1) $\int\limits_0^\pi x^3 \sin x\, dx$; 2) $\int\limits_0^1 \sqrt{4+x}\ dx$;

3) $\int\limits_0^{\pi^2/4} \sin\sqrt{x}\, dx$; 4) $\int\limits_0^1 x\ln\left(x^2+1\right) dx$;

5) $\int\limits_0^{0,5} \frac{(3-2x)\,dx}{x^2-1}$; 6) $\int\limits_1^e \frac{\sin\left(\ln x\right)dx}{x}$;

7) $\int\limits_0^\pi \mathrm{tg}^2\,\frac{x}{3}\ dx$; 8) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

8. 1) $\int\limits_1^3 \ln x\, dx$; 2) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 x\, dx$;

3) $\int\limits_1^e x^3 \ln x\, dx$; 4) $\int\limits_0^{\pi/4} \mathrm{ctg}^3 x\, dx$;

5) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{x\sin x\, dx}{\cos^2 x}$; 6) $\int\limits_3^4 \frac{\left(x^2+3\right)\ dx}{x-2}$;

7) $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$; 8) $\int\limits_{-a}^a \frac{x^2\ dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

9. 1) $\int\limits_1^e x\ln x\, dx$; 2) $\int\limits_0^\pi x^2 \cos x\, dx$;

3) $\int\limits_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^3 x\ dx$; 4) $\int\limits_1^9 \sqrt{x}\ln x\ dx$;

5) $\int\limits_1^e \frac{\cos(\ln x)\,dx}{x}$;   6) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{x+\sqrt{9x+4}}$;

7) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;   8) $\int\limits_1^4 \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)dx}{x^2}$.

10. 1) $\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx$;   2) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$;

3) $\int\limits_4^{16} \sqrt{x}\ln x\,dx$;   4) $\int\limits_0^{\pi} x^3 \sin x\,dx$;

5) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{9x^2+6x+1}$;   6) $\int\limits_1^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{4x+5}}$;

7) $\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$;   8) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

11. 1) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin x\,dx$;   2) $\int\limits_2^6 \sqrt{x-2}\,dx$;

3) $\int\limits_1^e x^3 \ln x\,dx$;   4) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^0 \ln\left(1-x^2\right)dx$;

5) $\int\limits_0^{0,5} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$;   6) $\int\limits_1^6 \frac{dx}{x+\sqrt{3x-2}}$;

7) $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}\,dx}{e^x+3}$;   8) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

12. 1) $\int\limits_1^2 e^x dx$;   2) $\int\limits_0^9 x^2\sqrt{81-x^2}\,dx$;

3) $\int\limits_0^{\ln 2} e^x\sqrt{e^x-1}\,dx$;   4) $\int\limits_0^{\pi/2} x^2 \cos x\,dx$;

5) $\int\limits_{1}^{2} \frac{\ln x\, dx}{x^5}$; 2) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\, dx}{\sin^2 x}$;

7) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^2}$; 8) $\int\limits_{1}^{4} \frac{\left(1+\sqrt{x}\right) dx}{x^2}$.

13. 1) $\int\limits_{0}^{\pi} e^x \sin x\, dx$; 2) $\int\limits_{0}^{4} x\sqrt{x^2+9}\, dx$;

3) $\int\limits_{1}^{5} \frac{\sqrt{x-1}}{x}\, dx$; 4) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\, dx$;

5) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$; 6) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{x\, dx}{1+2\sin^2 x}$;

7) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^6+4}}$; 8) $\int\limits_{0}^{16} \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$.

14. 1) $\int\limits_{0}^{1/2} \arcsin x\, dx$; 2) $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$;

3) $\int\limits_{-1}^{1} x^2 e^{-x}\, dx$; 4) $\int\limits_{0}^{\pi/2} (x+3)\sin x\, dx$;

5) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{(x+\sin x)\, dx}{1+\cos x}$; 6) $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$;

7) $\int\limits_{-1}^{7} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; 8) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^3 x\, dx}{x^2}$.

15. 1) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4 x\, dx$; 2) $\int\limits_{0}^{2} x^2\sqrt{1+x^3}\, dx$;

3) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos x\, dx$; 4) $\int\limits_{-2}^{2} x^2\sqrt{9-x^2}\, dx$;

5) $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{4x^2+4x+1}$; 6) $\int_{1/2}^{3/2} \frac{dx}{3+4x^2}$;

7) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$; 8) $\int_{0}^{1} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

16. 1) $\int_{0}^{1} xe^x dx$; 2) $\int_{0}^{\pi} x^4 \sin x\,dx$;

3) $\int_{0}^{\pi/2} \sin x \cos^3 x\,dx$; 4) $\int_{0}^{\pi} e^{x} \sin x\,dx$;

5) $\int_{3}^{8} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$; 6) $\int_{0}^{3} \frac{(x+4)\,dx}{\sqrt{25-x^2}}$;

7) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{x\cos x\,dx}{\sin^2 x}$; 8) $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x^2\,dx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

17. 1) $\int_{1}^{e} x^3 \ln x\,dx$; 2) $\int_{0}^{1} x^3 e^{2x} dx$;

3) $\int_{1}^{4} \sqrt{x}\,dx$; 4) $\int_{1}^{2} \left(x^2+x^{-4}\right) dx$;

5) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}$; 6) $\int_{0}^{5} \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$;

7) $\int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$; 8) $\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}\,dx}{x}$.

18. 1) $\int_{1}^{e} \ln^2 x\,dx$; 2) $\int_{0}^{\pi/6} x\cos 3x\,dx$;

3) $\int_{0}^{8} \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right) dx$; 4) $\int_{0}^{\pi/4} \cos^2 x\,dx$;

5) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}}$; 6) $\displaystyle\int_1^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{5+4x}}$;

7) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\left(x^2+1\right)dx}{x^3-x}$; 8) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+2}}$.

19. 1) 1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\cos 2x\,dx$; 2) $\displaystyle\int_0^1 x\ln\left(1+x^2\right)dx$;

3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$; 4) $\displaystyle\int_0^1 \left(e^x-1\right)^4 e^x dx$;

5) $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}$; 6) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x\,dx}{1+\cos^2 x}$;

7) $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln^3 x\,dx}{3x}$; 8) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{\left(3^x-2^x\right)dx}{6^x}$.

20. 1) $\displaystyle\int_{0,5}^1 x\sqrt[4]{2x-1}\,dx$; 2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^3\sin x\,dx$;

3) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$; 4) $\displaystyle\int_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx$;

5) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{tg}^2\frac{x}{3}\,dx$; 6) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{25-4x^2}}$.

7) $\displaystyle\int_3^5 \frac{\left(x^2+1\right)dx}{x-2}$; 8) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

21. 1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 3x\cos 7x\,dx$; 2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 x\,dx$;

3) $\displaystyle\int_{0,5}^1 \sqrt{4x-2}\,dx$; 4) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} 2^x 5^x dx$;

5) $\int_0^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx;$ 6) $\int_0^{0,5} \frac{x^2\ dx}{\sqrt{1-x^2}};$

7) $\int_0^{12\sqrt{3}} \frac{12x^5 dx}{\sqrt{1+x^6}};$ 8) $\int_0^{\pi} (x+2)\cos\frac{x}{2}\ dx.$

22. 1) $\int_0^{3} \sqrt{9-x^2} dx;$ 2) $\int_0^{1} \sin \pi x\ dx;$

3) $\int_0^{\pi} (2x+\sin 2x) dx;$ 4) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \cdot \ln\cos x\, dx;$

5) $\int_2^{5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}};$ 6) $\int_1^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}\, dx}{x};$

7) $\int_3^{4} \frac{dx}{x^2-6x+10};$ 8) $\int_0^{\pi/3} \cos^3 x \sin^2 x\, dx.$

23. 1) $\int_0^{e} \ln^2 x\, dx;$ 2) $\int_0^{2} \sqrt{25-3x}\, dx;$

3) $\int_0^{1} x\sqrt[4]{2x-1}\, dx;$ 4) $\int_0^{5} x^2\sqrt{25-x^2}\ dx;$

5) $\int_0^{1} \frac{dx}{9x^2+6x+1};$ 6) $\int_0^{4} \frac{x^2\ dx}{\sqrt{25-x^2}};$

7) $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 x\, dx;$ 8) $\int_0^{\pi/4} x\sin 2x\, dx.$

24. 1) $\int_0^{\pi} \sin 8x \sin 6x\, dx;$ 2) $\int_0^{1} \sqrt{4-x^2}\ dx;$

3) $\int_0^{3} x(3-x)^7 dx;$ 4) $\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\ dx;$

5) $\int_{1}^{5}\frac{x\,dx}{\sqrt{4x+5}}$; 6) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}$;

7) $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{dx}{2+\sin x}$; 8) $\int_{1}^{3}\frac{x\,dx}{x^{2}+3x-1}$.

25. 1) $\int_{0}^{1}x^{3}\operatorname{arctg}x\,dx$; 2) $\int_{0}^{4}\sqrt{x^{2}+9}\,dx$;

3) $\int_{1}^{2}3x(1-x)^{17}dx$; 4) $\int_{-1}^{0}xe^{-x}dx$;

5) $\int_{0}^{\pi/2}\frac{\sin 2x\,dx}{1+\sin^{2}x}$; 6) $\int_{0}^{e^{2}}\ln^{2}x\,dx$;

7) $\int_{\pi^{2}/9}^{\pi^{2}}\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; 8) $\int_{0}^{\pi/4}\cos x\sin 3x\,dx$.

26. 1) $\int_{0}^{\pi}x^{4}\sin x\,dx$; 2) $\int_{0}^{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{x}\right)^{2}dx$;

3) $\int_{0}^{2}\ln\left(x^{2}+4\right)dx$; 4) $\int_{0}^{1}\arcsin^{2}x\,dx$;

5) $\int_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{dx}{\sqrt{1+e^{x}}}$; 6) $\int_{0}^{5}\frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$;

7) $\int_{0}^{\pi/6}\sin^{3}x\cos x\,dx$; 8) $\int_{1}^{e}(x+1)\ln x\,dx$.

27. 1) $\int_{1}^{e}(1+\ln x)^{3}dx$; 2) $\int_{1}^{3}x^{3}\ln(x+4)\,dx$;

3) $\int_{0}^{1}4x\arcsin x\,dx$; 4) $\int_{-1}^{0}9x^{2}\ln(x+2)\,dx$;

5) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{2x^2+3x-2}$; 6) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

7) $\int\limits_{0}^{\pi} x^2 \sin x\, dx$; 8) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\left(1+\cos^2 x\right) dx$.

28. 1) $\int\limits_{0}^{\ln e} xe^{-3x} dx$; 2) $\int\limits_{2}^{9} \sqrt[3]{x-1}\, dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\pi/4} x\cos^2 x\, dx$; 4) $\int\limits_{0}^{25} e^{\sqrt{x}} dx$;

5) $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}\, dx}{x^2}$; 6) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x^2-2x-8}$;

7) $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\, dx$; 8) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

29. 1) $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\, dx$; 2) $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{x^2+9}\, dx$;

3) $\int\limits_{0}^{1} x^2 3^x dx$; 4) $\int\limits_{0}^{\pi/2} x^3 \sin x\, dx$;

5) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x\, dx}{3+\sin^2 x}$; 6) $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$;

7) $\int\limits_{0}^{1} x^3\sqrt{1+x^2}\, dx$; 8) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} x\cos 4x\, dx$.

30. 1) $\int\limits_{1}^{e} \left(1-\ln x\right)^2 dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1} (\arcsin x)^2 dx$;

3) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} 4x\ \mathrm{tg}^2 x\, dx$; 4) $\int\limits_{1}^{e} x^2 \ln^2 x\, dx$;

5) $\int\limits_{1}^{4}\frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x}+1}$; 6) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}\;dx}{x^2}$;

7) $\int\limits_{-2}^{0}\left(x^2-x\right)\cos 5x\,dx$; 8) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin x\cos^2 x\,dx$.

Задание 2. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

1. 1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$; 2) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x\;dx}{1+x^2}$;

3) $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}$; 4) $\int\limits_{1/2}^{1}\frac{x\;dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. 1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}$;

3) $\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{(x-2)^2}$; 4) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2-5x}$.

3. 1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-6x+10}$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\;\left(x^2+4\right)}$;

3) $\int\limits_{-3}^{2}\frac{dx}{(x+3)^2}$; 4) $\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{(x-2)^2}$.

4. 1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$; 2) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$;

3) $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$; 4) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1-x^2}$.

5. 1) $\int\limits_{0}^{+\infty}xe^{-x^2}dx$; 2) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x(x+3)}$;

3) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln x}}$;

4) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

6. 1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^x dx$;

2) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

3) $\int\limits_{-3}^{2} \frac{dx}{(x+3)^2}$;

4) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}}$.

7. 1) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$;

1) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+2}}$;

3) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

4) $\int\limits_{-3}^{2} \frac{dx}{(x+2)^2}$.

14

8. 1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{0,5x} dx$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{2x} dx$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2\, dx}{1+3x^3}$;

4) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(x-1)^4}$.

9. 1) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

2) $\int\limits_{0}^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$;

3) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}$;

4) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. 1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x\, dx}{x^2}$;

2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}}$;

3) $\int\limits_{0}^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$;

2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. 1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx$;

2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}}$;

3) $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^2 - 4}$; 4) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$.

12. 1) $\int\limits_{0}^{+\infty} x e^{-2x^2}\, dx$; 2) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$.

2) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$; 4) $\int\limits_{3\pi/4}^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos x}$.

13. 1) $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}$; 2) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt[2]{(x-3)^2}}$.

3) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 (x+1)}$; 4) $\int\limits_{0}^{1} x \ln x\, dx$.

14. 1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1 + x^6}$; 2) $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

3) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{16x dx}{\sqrt{16x^4 - 1}}$; 4) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{1 - \cos 2x}$.

15. 1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x\, dx}{x}$; 2) $\int \frac{dx}{x \ + x}$;

3) $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi\left(x^2 + 4x + 5\right)}$; 4) $\int\limits_{3\pi/4}^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos x}$.

16. 1) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$; 2) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$;

3) $\int\limits_{1/2}^{\infty} \frac{16\, dx}{\pi\left(4x^2 + 4x + 5\right)}$; 4) $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{(x-4)^2}$.

17. 1) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x\, dx}{1 + x^2}$; 2) $\int\limits_{-2}^{3} \frac{(2x+3)\ dx}{\sqrt[3]{x^4}}$;

3) $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x - 1)^2}$;　　　　4) $\int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{(3-x)^2}$.

18. 1) $\int\limits_{0}^{+\infty} 2x \sin x dx$;　　　　2) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \operatorname{ctg} x \, dx$;

3) $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{dx}{9x^2 - 8x + 2}$;　　　　4) $\int\limits_{5\pi/4}^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos x}$.

19. 1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4 + x^2}$;　　　　2) $\int\limits_{1}^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

3) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}}$;　　　　4) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x(x-2)}$.

20. 1) $\int\limits_{4}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^4 x}$;　　　　2) $\int\limits_{0}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{4 - x^2}}$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 + 4)^2}}$;　　　　4) $\int\limits_{3\pi/4}^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos x}$.

21. 1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1 + x)}$;　　　　2) $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}$;

3) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{16x^4 - 1}}$;　　　　4) $\int\limits_{3\pi/4}^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos x}$.

22. 1) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x^6 x}$;　　　　2) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^2 + 8)^4}}$;

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$;　　　　4) $\int\limits_{3\pi/4}^{\pi} \frac{dx}{1 + \cos x}$.

23. 1) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$;　　　　2) $\int\limits_{0}^{1} \ln x \, dx$;

3) $\int\limits_{4}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$; 4) $\int\limits_{3\pi/4}^{\pi}\frac{dx}{1+\cos x}$.

24. 1) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^3(1+x)}$; 2) $\int\limits_{0}^{1}x^3\ln x\,dx$.

3) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{\left(16+x^2\right)^5}}$; 4) $\int\limits_{3\pi/4}^{\pi}\frac{dx}{1+\cos x}$.

25. 1) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$; 2) $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{2\sqrt{x}-1}$;

3) $\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; 4) $\int\limits_{0}^{1}\frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$.

26. 1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x\,dx}{x^2+1}$; 2) $\int\limits_{4}^{+\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}$;

3) $\int\limits_{2}^{6}\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$; 3) $\int\limits_{-3/4}^{9}\frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$.

27. 1) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\ln(1+x)\,dx}{x}$; 2) $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt[5]{(x-1)^4}}$;

3) $\int\limits_{0}^{\infty}xe^{-3x}dx$; 4) $\int\limits_{3/4}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$.

28. 1) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{e^{-x^2}dx}{x^2}$; 2) $\int\limits_{0}^{0,5}\frac{dx}{x\ln x}$;

3) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{4dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$; 4) $\int\limits_{-1/3}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$.

29. 1) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{9+x^2}$; 2) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^4+x^2}$;

3) $\int\limits_{1/3}^{\infty} \frac{\pi dx}{\left(1+19x^2\right)\operatorname{arctg}^2 3x}$; 3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{1-x^4}$.

30. 1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\left(1+x^2\right) dx}{x^3}$; 2) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{3-x^2}{4+x^2}\, dx$;

3) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 4) $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(2x-1)^2}}$.

Задание 3. Интегралы вычислить с помощью формул прямоугольников, трапеций и Симпсона, разделив отрезок интегрирования на $n=10$ равных частей. Сравнить между собой полученные результаты. Расчеты выполнить с четырьмя знаками после запятой.

1. 1) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+4x^3}\, dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+4x^4}$.

2. 1) $\int\limits_{2}^{3} \sqrt{1+3x^3}\, dx$; 2) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{9-x^3}$.

3. 1) $\int\limits_{1}^{2} \sqrt{4+x^2}\, dx$; 2) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{11-x^3}$.

4. 1) $\int\limits_{2}^{3} \sqrt{3+2x^2}\, dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{5+2x^3}$.

5. 1) $\int\limits_{0}^{0,5} \sqrt{1+2x^3}\, dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{2+x^4}$.

6. 1) $\int\limits_{0}^{0,4} \sqrt{1+x^2}\, dx$; 2) $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$.

7. 1) $\int\limits_{-1}^{2} \sqrt{3+x^3}\, dx$; 2) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{3+2x^4}$.

8. 1) $\int\limits_{0}^{0,5} \sqrt{1+x^2}\,dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{3+4x^3}$.

9. 1) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{5+x^3}\,dx$; 2) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{1+2x^3}$.

10. 1) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{7+x^3}\,dx$; 2) $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{5+3x^4}$.

11. 1) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{2-x^3}\,dx$; 2) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{3+x^4}$.

12. 1) $\int\limits_{2}^{3} \sqrt{5+x^3}\,dx$; 2) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{2+x^3}$.

13. 1) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{4-x^3}\,dx$; 2) $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{3+x^3}$.

14. 1) $\int\limits_{1}^{2} \sqrt{1+2x^3}\,dx$; 2) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{2+x^3}$.

15. 1) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{4-3x^2}\,dx$; 2) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{1+x^3}$.

16. 1) $\int\limits_{3}^{4} \sqrt{1+3x^3}\,dx$; 2) $\int\limits_{4}^{5} \frac{dx}{5+x^3}$.

17. 1) $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{9-x^3}\,dx$; 2) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{6+x^3}$.

18. 1) $\int\limits_{2}^{3} \sqrt{4+x^2}\,dx$; 2) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{1+x^3}$.

19. 1) $\int\limits_{3}^{4} \sqrt{5+x^3}\,dx$; 2) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{2+x^3}$.

20. 1) $\int\limits_{-3}^{1} \sqrt{32+x^3}\,dx$; 2) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{4+x^2}$.

21. 1) $\int_0^2 \sqrt{10-x^3}\,dx$; 2) $\int_1^2 \frac{dx}{5+x^3}$.

22. 1) $\int_0^2 \sqrt{5+x^3}\,dx$; 2) $\int_0^1 \frac{dx}{6+x^3}$.

23. 1) $\int_{-1}^2 \sqrt{1+x^3}\,dx$; 2) $\int_1^2 \frac{dx}{7+x^3}$.

24. 1) $\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3}\,dx$; 2) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+x^2}$.

25. 1) $\int_{-2}^1 \sqrt{8+x^3}\,dx$; 2) $\int_1^2 \frac{dx}{2+x^3}$.

26. 1) $\int_{-1}^2 \sqrt{4+x^3}\,dx$; 2) $\int_2^3 \frac{dx}{1+x^3}$.

27. 1) $\int_{-2}^3 \sqrt{11+x^3}\,dx$; 2) $\int_1^2 \frac{dx}{3+x^2}$.

28. 1) $\int_0^1 \sqrt{9+2x^3}\,dx$; 2) $\int_0^1 \frac{dx}{6+x^3}$.

29. 1) $\int_0^1 \sqrt{5-x^3}\,dx$; 2) $\int_0^1 \frac{dx}{5+3x^3}$.

30. 1) $\int_0^1 \sqrt{12+3x^4}\,dx$; 2) $\int_1^2 \frac{dx}{3+2x^3}$.

Задание 4. С помощью определенного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

1. 1) $x=\sqrt{y},\ \ x=0,\ \ y=4$; 2) $y=e^x,\ \ y=e^{-x},\ \ x=1$;

3) $r=a\left(1+\cos\varphi\right)$.

2. 1) $y^2=3x,\ \ x^2=3y$; 2) $y=x^2\ ,\ \ x=-1\ ,\ \ x=2$;

3) $r=a\sin\varphi\ ,\ \ 0\le\varphi\le\pi$.

3. 1) $y^2 = 3x,\ \ y = -\dfrac{8}{x^2+4}$; 2) $y = 2x - x^2,\ y = -x$;

3) $r = a\sin 2\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le \pi/2$.

4. 1) $y^2 = x+1;\ \ y^2 = 9 - x$; 2) $y = x^2,\ y = 2 - x$;

3) $r = a\sin 3\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le \pi/3$.

5. 1) $y = x^2 - 1,\ \ x + 2y = 5$; 2) $y = x^2 + 4x,\ y = 4 + x$;

3) $r = a\sin 4\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le \pi/5$.

6. 1) $x^2 + y^2 = 16,\ y^2 = 6x$; 2) $y = 4x - x^2,\ y = 0$;

3) $r = a\sin 5\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le \pi/5$.

7. 1) $y = x^2 - 3x,\ \ 3x + y = 4$; 2) $y^2 = x,\ y = 1,\ x = 8$;

3) $r = a\sin 6\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le \pi/6$.

8. 1) $xy = 4,\ \ x + y = 5$; 2) $y = 3 - 2x,\ y = x^2$;

3) $r = a\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$.

9. 1) $y = \dfrac{1}{1+x^2},\ y = \dfrac{x^2}{2}$; 2) $y = x^2,\ y = 2 - x^2$;

3) $r = a\cos 2\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le \pi/2$.

10. 1) $y = x^2,\ y^2 = x$; 2) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1,\ y = \dfrac{9x^2}{32}$;

3) $r = a\cos 3\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le \pi/3$.

11. 1) $y^2 = 2x+1,\ x - y = 1$; 2) $y = 2x^2 + 1,\ y = x^2 + 10$;

3) $r = a\cos 4\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le \pi/4$.

12. 1) $y = 2 - x^2,\ y^2 = x^3$; 2) $y = \dfrac{x^2}{2} + 2x + 4,\ y = 8 + x$;

3) $r = a\cos 5\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le \pi/5$.

13. 1) $y = 5x,\ y = 0,\ x = 2$; 2) $y = \dfrac{x^2}{3} - 2x + 4,\ \ y = 10 - x$;

3) $r = a\cos 6\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/6$.

14. 1) $y=\sqrt{x},\ y=x-2,\ x=0;$ 2) $y=x^2-2x+3\ ,\ y=3x-1;$
3) $r=a\cos 2\varphi\ ,\ 0\le\varphi\le\pi/2.$

15. 1) $y^2=9x,\ y=3x;$ 2) $y=\dfrac{x^2}{2}-4x+10,\ y=x+2;$
3) $r=a\ \cos 2\varphi,\ 0\le\varphi\le\pi/4.$

16. 1) $y=6x-x^2,\ y=0;$ 2) $y=x^2+2,\ y=6;$
3) $r=a(1-\cos\varphi).$

17. 1) $y^2=4x,\ x^2=4y;$ 2) $x+2y-4=0,\ x=-3,\ x=2;$
3) $r=2\sqrt{3}\cos\varphi,\ r=2\sin\varphi.$

18. 1) $x^2+y^2=8x,\ y=4x;$ 2) $y=x^2,\ y=2+x;$
3) $r=2-\cos\varphi,\ r=\cos\varphi.$

19. 1) $x^2=4y,\ y=\dfrac{4}{x^2+2};$ 2) $y^2=x,\ y\ge 0,\ 1\le x\le 2;$
3) $r=\dfrac{a}{\varphi},\ \ \pi/4\le\varphi\le 2\pi.$

20. 1) $y=\dfrac{x^2}{2},\ y=4-\dfrac{2}{3}x^2;$ 2) $y=x^2,\ x=2,\ x=3;$
3) $r=2+\cos\varphi.$

21. 1) $y^3=x,\ y=1,\ x=8;$ 2) $y=\sqrt[3]{x},\ y=0,\ 1\le x\le 8;$
3) $r=2a(2+\cos\varphi).$

22. 1) $y=\dfrac{x^2}{2},\ y=0,\ y=3,\ x=2;$ 2) $y=6-x-2x^2,\ y=x+2;$
3) $r=1-\sin\varphi,\ \ r=\sin\varphi,\ \varphi=0.$

23. 1) $y=\dfrac{x^2}{4},\ y=2\sqrt{x};$ 2) $y=x^2-2x+1,\ y=0,\ 0\le x\le 2;$
3) $r=2\sin 5\varphi.$

24. 1) $xy=3, x+y=4$; 2) $y=\cos x,\ y=0,\ x=-\pi/2\le x\le \pi/2$;
3) $r=2a(1+\cos\varphi)$.

25. 1) $y=x^2,\ y=x^2/2,\ y=2x$; 2) $y=e^{-x},\ y=0,\ -1\le x\le 2$;
3) $r=a\sin 2\varphi,\ \ 0\le\varphi\le\pi/4$.

26. 1) $xy=4,\ x=3,\ x=9,\ y=0$; 2) $x^2+y^2=4y,\ 2y\ge x^2$;
3) $x=4\cos t,\ y=3\sin t,\ 0\le t\le\pi$.

27. 1) $y=x^2+2x,\ y=x+2$; 2) $y=\ln x,\ y=0,\ e\le x\le e^2$;
3) $x=2\cos t,\ \ y=2\sin t,\ \ 0\le t\le\pi/2$.

28. 1) $y=\dfrac{27}{x^2+9},\ y=\dfrac{x^2}{6}$; 2) $y=x^2+1,\ y=x,\ x=0\le x\le 1$;
3) $x=a\cos^3 t,\ \ y=a\sin^3 t,\ \ 0\le t\le 2\pi$.

29. $y=3+2x-x^2\ ,\ y=0$; 2) $y=\dfrac{x^2}{2},\ \ y=\dfrac{1}{1+x^2}$;
3) $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ \ y=0,\ \ 0\le t\le 2\pi$.

30. 1) $y=-x^2,\ x+y+2=0$; 2) $y=-x^2+x+6,\ y=0$;
3) $x=a\cos^3 t,\ \ y=a\sin^3 t,\ 0\le t\le 2\pi$.

Задание 5. Вычислить длину дуги кривой.

1. 1) $y=\ln x,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$;
2) $x=a\cos^3 t,\ \ y=a\sin^3 t,\ \ 0\le t\le\pi$.

2. 1) $y=\ln(1-x^2),\ 0\le x\le 1/2$;
2) $x=\cos^5 t,\ \ y=\sin^5 t,\ \ 0\le t\le\pi/2$.

3. 1) $y^2=4x,\ \ 0\le x\le 1$;
2) $x=e^t\cos t,\ \ y=e^t\sin t,\ \ 0\le t\le 1$.

4. 1) $y^2=x^3,\ \ 0\le x\le 4$;
2) $x=\dfrac{t^3}{3}-t,\ \ y=t^2+2,\ \ 0\le t\le 3$.

5. 1) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}, \quad 0\le x\le a;$

2) $x=8\sin t+6\cos t, \quad y=6\sin t-8\cos t, \quad 0\le t\le \pi/2.$

6. 1) $y=0,5e^x+e^{-x}, \quad 0\le x\le 1;$

2) $x=9(t-\sin t), \quad y=9(1-\cos t), \quad 0\le t\le 2\pi.$

7. 1) $y=0,25x^2-0,5\ln x, \quad 1\le x\le e;$

2) $x=\cos t-t\sin t, \quad y=\sin t-t\cos t, \quad 0\le t\le \pi/4.$

8. 1) $y=\dfrac{x^2}{2p}, \quad 0\le x\le \sqrt{2}p;$

2) $r=3(1+\sin\varphi), \quad -\pi/6\le t\le 0.$

9. 1) $y=\ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1}, \ a\le x\le b;$

2) $r=\cos^3\dfrac{\varphi}{3}, \quad 0\le t\le \pi/2.$

10. 1) $y^2=x, \quad 0\le x\le 3/4;$

2) $r=\dfrac{1}{2}\left(\varphi+\dfrac{1}{\varphi}\right), \quad 1\le\varphi\le 3.$

11. 1) $y=\ln\cos x, \quad 0\le x\le \pi/3;$

2) $r=\dfrac{p}{1+\cos\varphi}, \quad -\pi/2\le t\le \pi/2.$

12. 1) $y^2=x^3, \quad 0\le x\le 4/3;$

2) $x=3(2\cos t-\cos 2t), \quad y=3(2\sin t-\sin 2t), \quad 0\le t\le 2\pi.$

13. 1) $y=16-x^2, \quad -4\le x\le 4;$

2) $x=3(t-\sin t), \quad y=(t-\cos t), \quad 0\le t\le 2\pi.$

14. 1) $y=4-x^2, \quad -2\le x\le 2;$

2) $r=a(1+\cos\varphi), \quad 0\le t\le 2\pi.$

15. 1) $y = 25 - x^2, \quad -5 \le x \le 5;$

2) $x = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t,\ y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t,\ \ \pi/2 \le t \le 2\pi/3.$

16. 1) $y = \frac{1}{x},\ \ 3/4 \le x \le 4/3;$

2) $x = 8\left(\cos t + t\sin t\right),\ y = 8\left(\sin t - t\cos t\right),\ 0 \le t \le \pi.$

17. 1) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \ 0 \le x \le 1;$

2) $x = a\cos^3 t,\ \ y = a\sin^3 t,\ \ 0 \le t \le \pi.$

18. 1) $9y^2 = 4x^3,\ \ 0 \le x \le 3;$

2) $x = 4\cos^3 t,\ \ y = 4\sin^3 t,\ \ \pi/6 \le t \le 3\pi/2.$

19. 1) $x = 9 - y^2,\ \ -3 \le x \le 3;$

2) $x = 3\left(1 - \cos t\right)\cos t,\ \ y = 3\left(1 - \cos t\right)\sin t,\ \ 0 \le t \le \pi.$

20. 1) $y = 0{,}5\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),\ \ 0 \le x \le a;$

2) $x = 7\cos^3 t,\ \ y = 7\sin^3 t,\ \ \pi/2 \le t \le \pi.$

21. 1) $y^2 = \frac{2\left(x - 1\right)^3}{3},\ \ 1 \le x \le 4;$

2) $x = 3\left(t - \sin t\right),\ \ y = 3\left(1 - \cos t\right),\ \ \pi \le t \le 2\pi.$

22. 1) $y = \ln\cos x,\ \ 0 \le x \le \pi/3;$

2) $x = 2\cos t - \cos 2t,\ \ y = 2\sin t - \sin 2t,\ \ 0 \le t \le \pi/2.$

23. 1) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \ 0 \le x \le 1/2;$

2) $x = 2\cos^3\frac{t}{4},\ \ y = 2\sin^3\frac{t}{4},\ \ 0 \le t \le \pi.$

24. 1) $r = a\sin^4\left(\varphi/4\right),\ 0 \le \varphi \le 4\pi;$

2) $x = 3\sin t + 4\cos t,\ \ y = 4\sin t - 3\cos t,\ \ 0 \le t \le 2\pi.$

25. 1) $y = a\arcsin\dfrac{x}{a}, \quad 0 \le x \le b;$

2) $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad 0 \le t \le \pi.$

26. 1) $r = \sqrt{2}e^{\varphi}, \ 0 \le \varphi \le \pi/2;$

2) $x = 4(\mathrm{t} - \sin t), \quad y = 4(1 - \cos t), \quad \pi/2 \le t \le 2\pi/3.$

27. 1) $r = a \ \sin^3\dfrac{\varphi}{3}, \ 0 \le \varphi \le 3\pi;$

2) $x = \cos t + t\sin t, \quad y = \sin t - t\cos t, \quad 0 \le t \le \pi/4.$

28. 1) $y = \ln\sin x, \quad \pi/3 \le x \le 2\pi/3;$

2) $x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

28. 1) $y = 1 - \ln(\sin x), \quad 0 \le x \le \pi/4;$

2) $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

29. 1) $y = 1 - \ln\left(x^2 - 1\right), \quad 3 \le x \le 4;$

2) $r = 2 \ (1 - \cos\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \pi/3.$

30. 1) $y = 1 - \ln\cos x, \quad \pi/3 \le x \le \pi/2;$

2) $r = a \ \sin^4\dfrac{\varphi}{4}, \ 0 \le \varphi \le 4\pi.$

Задание 6. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг оси Ox (Oy).

1. 1) $y^2 = 4 - x, \quad x = 0$ (вокруг оси Ox);

2) $x^2 + y^2 = 1, \ y^2 = \dfrac{3x}{2}$ (вокруг оси Ox).

2. 1) $y = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi/2$ (вокруг оси Oy);

2) $y = \cos x, \ x = 0, \ x = \pi/2$ (вокруг оси Ox).

3. 1) $y = \sin^2 x \ , \quad x = 0 \ , \quad x = \pi$ (вокруг оси Ox);

2) $y = 2 - \dfrac{x^2}{2}, \quad x + y = 2$ (вокруг оси Ox).

4. 1) $y=\dfrac{x^2}{2},\ \ y=\dfrac{x^3}{8}$ (вокруг оси Ox);

2) $y=\sqrt{x}\ e^x$, $x=1$, $y=0$ (вокруг оси Ox).

5. 1) $xy=4,\ \ x=1$, $x=4$, $y=0$ (вокруг оси Ox).

2) $y^2=x$, $x^2=y$ (вокруг оси Ox).

6. 1) $y=\arcsin x$, $x=1$, $y=0$ (вокруг оси Ox).

2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ (вокруг оси Ox).

7. 1) $y=\sin x,\ \ 0\le x\le\pi$ (вокруг оси Ox);

2) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$, $x=3$, $x=6$, $y=0$ (вокруг оси Ox).

8. 1) $y^2=4x,\ \ x=4$ (вокруг оси Ox);

2) $x^2-y^2=4$, $x=2$, $x=4$, $y=0$ (вокруг оси Ox).

9. 1) $y=e^{-x},\ \ x=0,\ \ y=0$ (вокруг оси Ox);

2) $y=\cos x$, $x=0$, $x=\pi/2,\ \ y=0$ (вокруг оси Ox).

10. 1) $y=\sin x$, $x=0$, $x=\pi$, $y=0$ (вокруг оси Ox);

2) $y^2=9x,\ \ y=3x$ (вокруг оси Ox).

11. 1) $y=x\ +4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$ (вокруг оси Ox);

2) $y=\ln x,\ \ x=e,\ \ y=0$ (вокруг оси Ox).

12. 1) $y=2x-x^2,\ \ y=0$ (вокруг оси Ox);

2) $y^2=4(x-2)$, $x=3$, $x=6$, $y=0$ (вокруг оси Ox).

13. 1) $y^2=4(x+2)$, $x-y+2=0$ (вокруг оси Ox);

2) $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{9}=1$ (вокруг оси Ox).

14. 1) $y = x^3,\ x = 2,\ y = 0$ $\left(\text{вокруг оси } Oy\right)$;

2) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$ $\left(\text{вокруг оси } Ox\right)$.

15. 1) $y^2 = 16 - x,\ x = 0$ $\left(\text{вокруг оси } Oy\right)$;

2) $y = e^x,\ x = 1,\ y = 0$ $\left(\text{вокруг оси } Ox\right)$.

16. 1) $y = x^2 + 1$, $x = -a$, $x = a$, $y = 0$; $\left(\text{вокруг оси } Ox\right)$.

2) $x^2 + y^2 = R^2,\ y = 0$ $\left(\text{вокруг оси } Ox\right)$.

17. 1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ x = 0$ $\left(\text{вокруг оси } Oy\right)$;

2) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ $\left(\text{вокруг оси } Ox\right)$.

18. 1) $y^2 = x^3,\ x = 1,\ y = 0$ $\left(\text{вокруг оси } Ox\right)$;

2) $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ $\left(\text{вокруг оси } Oy\right)$.

19. 1) $y = \dfrac{4}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ $\left(\text{вокруг оси } Oy\right)$;

2) $y = 3 - x^2,\ y = 1 + x^2$ $\left(\text{вокруг оси } Ox\right)$.

20. $y = \sin 2x$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ $\left(\text{вокруг оси } Ox\right)$;

2) $y^2 = 9x$, $y = 3x$ $\left(\text{вокруг оси } Ox\right)$.

21. 1) $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$ $\left(\text{вокруг оси } Oy\right)$;

2) $y = 3\sin x,\ y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi/6$ $\left(\text{вокруг оси } Ox\right)$.

22. 1) $y = 5\cos x,\ y = \cos x,\ x = -\pi/2,\ x = \pi/2$ $\left(\text{вокруг оси } Ox\right)$;

2) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ $\left(\text{вокруг оси } Oy\right)$.

23. 1) $y^2 + x^2 = 1,\ x + y = 1$ $\left(\text{вокруг оси } Ox\right)$;

2) $y = x^2 + 1,\ y = x,\ x = 0$, $x = 1$ $\left(\text{вокруг оси } Ox\right)$.

24. 1) $y=\dfrac{4}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$ (вокруг оси Ox);

2) $y=x^2$, $y=2-x^2$ (вокруг оси Ox).

25. 1) $y=3-x^2$, $y=x^2$ (вокруг оси Ox);

2) $y=x^2$, $y^2-x=0$ (вокруг оси Oy).

26. 1) $y=x^2$, $y=1$, $x=2$ (вокруг оси Oy);

2) $y=x^3$, $x=0$, $y=1$ (вокруг оси Oy).

27. 1) $y=2-x^4$, $y=x^2$ (вокруг оси Ox);

2) $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$ (вокруг оси Oy).

28. 1) $y=x^3$, $y=x^2$ (вокруг оси Oy);

2) $3x^2+4y^2=12$ (вокруг оси Oy).

29. 1) $y=x^2$, $y=\sqrt[3]{x}$ (вокруг оси Oy);

2) $y=\dfrac{x^3}{3}$, $x=-1$, $x=1$ (вокруг оси Ox).

30. 1) $y=2^x, -3x+4y=5$ (вокруг оси Ox);

2) $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=0$ (вокруг оси Oy).

РАЗДЕЛ II.
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Задание 1. Найти область определения функции и приведите геометрическую иллюстрацию, если возможно.

1. 1) $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$; 2) $z = \sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)^2}$;

3) $u = \ln\left(3 - x^2 - 6y^2 - 9z^2\right)$.

2. 1) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$; 2) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

3) $u = \dfrac{x-2y}{4x^2 + y^2 + 8z^2 - 8}$.

3. 1) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$; 2) $z = \ln\left(x+y\right)$;

3) $u = \dfrac{3x-y}{\sqrt{4 - x^2 - 2y^2 - z}}$.

4. 1) $z = \dfrac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$; 2) $z = \arcsin\dfrac{x}{2} + \sqrt{xy}$;

3) $u = \ln\left(2x^2 + 4y^2 + 8z^2 - 8\right)$.

5. 1) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}}$; 2) $z = \ln\left(-x-y\right)$;

3) $u = \arccos\left(x^2 + y^2 + z^2 - 5\right)$.

6. 1) $z = \ln\left(x^2 + y\right)$; 2) $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$;

3) $u = \dfrac{z}{x^2 + y^2 + z^2 - 4}$.

7. 1) $z = \ln\left(y^2 - 4x + 8\right)$; 2) $z = y + \arccos x$;

3) $u = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}$.

8. 1) $z=\dfrac{2x+3y-1}{x-y}$; 2) $z=\ln(xy)+3y$;

3) $u=\ln\left(2x^2+4y^2+8z^2-8\right)$.

9. 1) $z=\dfrac{1}{\sqrt{R^2-x^2-4y^2}}$; 2) $z=\ln\left(x^2y\right)+x$;

3) $u=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{49}-\dfrac{z^2}{36}}$.

10. 1) $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$; 2) $z=\ln\left(4+4x-y^2\right)$;

3) $u=\sqrt{3-x^2-y^2-z^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}$.

11. 1) $z=\dfrac{1}{R^2-x^2-y^2}$; 2) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$;

3) $u=\ln\left(4-x^2-y^2-z^2\right)+\ln\left(x^2+y^2+z^2-1\right)$.

12. 1) $z=\arcsin\dfrac{y-1}{x}$; 2) $z=\ln\left(x^3y\right)+\sqrt{x}$;

3) $u=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{49}-\dfrac{z^2}{36}}$.

13. 1) $z=\ln\left(xy^2\right)+\sqrt{y}$; 2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}$;

3) $u=\arcsin(x+y+z)$.

14. 1) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$; 2) $z=\ln\left(y-x^2\right)$;

3) $u=\arcsin(x+y+z-4)$.

15. 1) $z=\ln\left(x^2+y^2-1\right)$; 2) $z=\sqrt{x+2y}+\sqrt{x-y}$;

3) $u=\dfrac{\sqrt{z}}{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}$.

16. 1) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$; 2) $z = \sqrt{x+y}\ \ln\left(y^2 - x^2\right)$;

3) $u = \sqrt{1 - x - y - z}$.

17. 1) $z = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$; 2) $z = \ln\left(4 - 2x - y^2\right)$;

3) $u = \arccos\left(x^2 + y^2 + z^2 - 6\right)$.

18. 1) $z = \ln\left(8 - 2x - y^2\right)$; 2) $z = y^2\ \sqrt{x^2 - y^2}$;

3) $u = \dfrac{x^2 + y^2}{4x - y + z - 4}$.

19. 1) $z = \ln\left(y^2 - 4x + 8\right)$; 2) $z = \arcsin\dfrac{y}{x^2}$;

3) $u = \sqrt{x} + \sqrt{4 - y - z}$.

20. 1) $z = \lg\left(2x + y^2 - 6\right)$; 2) $z = \sqrt{1 + x - y^2}$;

3) $u = \dfrac{4x}{x + y + z - 2}$.

21. 1) $z = e^{-xy} + \ln(xy)$; 2) $z = \arccos\dfrac{y}{x}$;

3) $u = \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + \sqrt{z}$.

22. 1) $z = \ln\left(x^2 - y^2\right)$; 2) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y}$;

3) $u = \dfrac{3\sqrt{z}}{\sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}}$.

23. 1) $z = \lg\left(16 - x^2 - y^2\right)$; 2) $z = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{y}}$;

3) $u = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$.

24. 1) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$; 1) $z=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{y}}$;

3) $u=\ln z+\ln(x+y-1)$.

24. 1) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$; 1) $z=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{y}}$;

3) $u=\lg\left(9-x^2-y^2-z^2\right)$.

25. 1) $z=\ln(2x-y)$; 2) $z=x+\sqrt{x^2-y^2}$;

3) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-9}$.

26. 1) $z=\arcsin\frac{y-1}{x}$; 2) $z=\ln\left(y^2-4x+8\right)$;

3) $u=\ln\left(x^2+y^3-z^2\right)$.

27. 1) $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$; 2) $z=\sqrt{x+y}\ln\left(y^2-x^2\right)$;

3) $u=\frac{x+y+4z}{x^2+y^2+z^2-4}$.

28. 1) $z=\sqrt{4x-y^2}$; 2) $z=\ln\left(3x^2-y^2\right)$;

3) $u=\frac{1}{\ln\left(4-x^2-y^2-z^2\right)}$.

29. 1) $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$; 2) $z=\frac{1}{\ln\left(4-x^2-y^2\right)}$;

3) $u=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{y}}+\sqrt{z}$.

30. 1) $z=\sqrt{y^2-1}+\sqrt{1-x^2}$; 2) $z=\ln(xy)$;

3) $u=\sqrt{25-x^2-y^2-z^2}$.

Задание 2. Вычислить пределы.

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{y}$.

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{xy}$.

4. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$.

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$.

6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{\sin xy}{x}$.

7. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{y}$.

8. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\operatorname{tg} xy}{xy}$.

9. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$.

10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\operatorname{tg}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$.

11. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 4}}\left(2x+3y\right)$.

12. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}$.

13. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{x^2y^2\left(x^2+y^2\right)}$.

14. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+4}-2}{xy}$.

15. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+9}-3}$

16. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\frac{x^2-y^2}{x^2+2x-xy-2y}$.

17. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{1-xy}{x^2+y^2}$.

18. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}\frac{x+1}{y-1}$.

19. $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\frac{1}{x^2+y^2+1}$.

20. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+2y}{y}$.

21. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos\left(x^2+2y^2\right)}{x^2+2y^2}$.

22. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\frac{\operatorname{tg}\left(x^2y\right)}{3xy^2}$.

23. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{3x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2+9}-3}$.

24. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

25. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+16}-4}$.

26. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+5}-\sqrt{5}}{x^2y^2}$.

27. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{\sin\left(xy^2\right)}{x^2y^2}$.

28. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin\left(x^2y^2\right)}{x^2y}$.

29. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos\left(x^2y^2\right)}{x^2y^2}$.

30. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2y^2}$.

Задание 3. Исследовать на непрерывность следующие функции и найти точки (линии) разрыва функции, если имеются.

1. 1) $z=\dfrac{3}{y^2-4x^2}$; 2) $z=\arccos\dfrac{y-1}{x}$.

2. 1) $z=\sqrt{x^2+y^2-9}+xy$; 2) $z=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

3. 1) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; 2) $z=x+\sqrt{y-x^2}$.

4. 1) $z=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+1}{x^2-y^2}$; 2) $z=\dfrac{x^2+2y^2+3}{(x-1)(y-2)}$.

5. 1) $z=\ln\left(x^2+y^2-16\right)$; 2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$.

6. 1) $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$; 2) $z=\sqrt{y^2-6x+12}$.

7. 1) $z=\arcsin\dfrac{y-2}{x}$; 2) $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.

8. 1) $z=\sqrt{x+y}$; 2) $z=\sqrt{y^2-4x+8}$.

9. 1) $z=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y-1)^2}$; 2) $z=\dfrac{x^2+y^2}{(x+y)\left(y^2-x\right)}$.

10. 1) $z=\dfrac{1}{2x-y+1}$; 2) $z=\sqrt{x-2y^2}$.

11. 1) $z=\dfrac{1}{(x-1)(y-2)}$; 2) $z=y+\arcsin(x+2)$.

12. 1) $z=\sqrt{xy}$; 2) $z=\dfrac{1}{x-2}+\ln(xy)$.

13. 1) $z=\ln x+\sqrt{y}$; 2) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$.

14. 1) $z=\ln\left(x^2+y^2-1\right)$; 2) $z=\dfrac{2x-3}{x^2+y^2-4}$.

15. 1) $z=\dfrac{x+y}{x^3-y^3}$; 2) $z=\dfrac{3}{x^2+y^2}$.

16. 1) $z=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; 2) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2-9}$.

17. 1) $z=\sin\dfrac{1}{x+y}$; 2) $z=\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$.

18. 1) $z=\cos\dfrac{1}{x^2+y^2-9}$; 2) $z=\dfrac{1}{xy}$.

19. 1) $z=\ln\left(9-x^2-y^2\right)$; 2) $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$.

20. 1) $z=\dfrac{1}{x-y}$; 2) $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$.

21. 1) $z=\dfrac{x^2+y^2}{y-x}$; 2) $z=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$.

22. 1) $z=\cos\dfrac{1}{xy}$; 2) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

23. 1) $z=\sqrt{x^2+y^2-25}$; 2) $z=\dfrac{1}{(x-y)^3}$.

24. 1) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 16}$; 2) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

25. 1) $z = \sin\dfrac{2}{xy}$; 2) $z = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16}}$.

26. 1) $z = \sqrt{\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} - 1}$; 2) $z = \ln\left(x^2 + y^2 - 36\right)$.

27. 1) $z = \ln\left(16 - x^2 - y^2\right)$; 2) $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$.

28. 1) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 25}$; 2) $z = \ln(x - y) + \sqrt{x^2 + y^2}$.

29. 1) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 4}$; 2) $z = \ln(xy) + \sqrt[3]{x^2 + y^3}$.

30. 1) $z = \ln\left(x^2 - y^2\right) + \sqrt[5]{xy}$; 2) $z = \sqrt{9 - x - y}$.

Задание 4. Найти частные производные функции.

1. 1) $z = x^3 + y^3 - 3axy$; 2) $xy + xz + yz - 1 = 0$.

2. 1) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; 2) $z - ye^{\frac{x}{y}} = 0$.

3. 1) $z = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$; 2) $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos z - 1 = 0$.

4. 1) $z = x^{y^2}$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 - xyz = 0$.

5. 1) $z = xe^{-xy}$; 2) $x^3 + y^3 + z^3 - xyz = 0$.

6. 1) $z = \arcsin(x + y)$; 2) $x^2 + y^3 + z^2 - xyz = 0$.

7. 1) $z = \arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; 2) $x + y + z - e^z = 0$.

8. 1) $z = \arccos(x - y)$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 4z - 1 = 0$.

9. 1) $z = \left(1 + \log_x y\right)^3$; 2) $x^2 + y^2 - z^2 - a^2 = 0$.

10. 1) $z = x^{xy}$; 2) $yz - \operatorname{arctg}(xz) = 0$.

11. 1) $z = \operatorname{arctg}(xy)$; 2) $x^2 + y^2 - z^3 + 2xy + yz - 1 = 0$.

12. 1) $z = xy\ln(x + y)$; 2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} - 1 = 0$.

13. 1) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; 2) $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$.

14. 1) $z = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$; 2) $z - ye^{\frac{x}{y}} = 0$.

15. 1) $z = x^2y + xy^3 + 1$; 2) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$.

16. 1) $z = e^{xy}$; 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

17. 1) $z = y^{xy}$; 2) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{49} + \frac{z^2}{16} - 1 = 0$.

18. 1) $z = x^{x^2y}$; 2) $\ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - xyz = 0$.

19. 1) $z = x\sqrt{y} + \frac{x}{\sqrt[3]{y}}$; 2) $x + y + z^2 - xyz = 0$.

20. 1) $z = x^{y^3}$; 2) $yz - \operatorname{arctg}(x - z) = 0$.

21. 1) $z = \sqrt{3x^2 - 5y^2}$; 2) $x + \operatorname{arctg}\frac{y}{z - x} = 0$.

22. 1) $z = \ln \operatorname{tg}\frac{y}{x}$; 2) $e^z - xyz = 0.$

23. 1) $z = y\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{y}}$; 2) $\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y} + 1.$

24. 1) $z = \left(\frac{y}{x}\right)^x$; 2) $x^2 + y^2 + e^{xyz} = 0.$

25. 1) $z = x - 3\sin y$; 2) $xyz = \ln x + \sin yz.$

26. 1) $z = \operatorname{arctg}\sqrt{xy}$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0.$

27. 1) $z = (\sin x)^{\cos y}$; 2) $x + y + z = e^z.$

28. 1) $z=\left(x^2+y^2\right)^3$; 2) $z^3-3xyz=a^3$.

29. 1) $z=\dfrac{x}{y}e^{xy}$; 2) $x\cos y+y\cos z+z\cos x=1$.

30. 1) $z=\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$; 2) $z^3-3xyz-6=0$.

Задание 5. Найти полный дифференциал функции.

1. 1) $z=x^{\ln y}$; 2) $z=x^2y^2-x^3y^3+x^4y^2$.

2. 1) $z=\ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)$; 2) $z=xy-x^2y^3+x^3y$.

3. 1) $z=y^{\sin x}$; 2) $z=\dfrac{1}{2}\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

4. 1) $z=x^{\cos y}$; 2) $z=\cos(xy)$.

5. 1) $z=xe^{-x^2-y^2}$; 2) $z=\dfrac{x+y}{x-y}$.

6. 1) $z=\ln\left(1+\dfrac{x}{y}\right)$; 2) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{y}$.

7. 1) $z=xe^{x^2+y^2}$; 2) $z=\sin(xy)$.

8. 1) $z=\ln x^y$; 2) $z=y^x$.

9. 1) $z=\sqrt{x^3+y^3}$; 2) $z=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

10. 1) $z=\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}$; 2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

11. 1) $z=xe^{-xy^2}$; 2) $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$.

12. 1) $z=ye^{-x^2y}$; 2) $z=\dfrac{x+y+xy}{x^2+y^2}$.

13. 1) $z=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$; 2) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

14. 1) $z=\sqrt{x^2+2xy+y^2}$; 2) $z=\operatorname{arctg}\left(x^2+3y\right)$.

15. 1) $z=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$; 2) $z=\operatorname{arctg}\left(xy\right)$.

16. 1) $z=\dfrac{x}{2x-3y}$; 2) $z=x^2y-xy^2$.

17. 1) $z=e^{\frac{x}{y}}\ln y$; 2) $z=\sin^2 x+\cos^2 y$.

18. 1) $z=\ln\cos\left(x-2y\right)$; 2) $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

19. 1) $z=\dfrac{x^2}{1-2y}$; 2) $z=yx^y$.

20. 1) $z=\operatorname{tg}\ \dfrac{y^2}{x}$; 2) $z=x^3+x^3-3xy$.

21. 1) $z=\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^2 y$; 2) $z=\sin\left(x^2+y^2\right)$.

22. 1) $z=\ln\left(\cos\dfrac{x}{y}\right)$; 2) $z=\sin y+x^2$.

23. 1) $z=\arccos\dfrac{y}{x}$; 2) $z=\ln\left(\sin\dfrac{y}{x}\right)$.

24. 1) $z=\left(\dfrac{y}{2}\right)^x$; 2) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

25. 1) $z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$; 2) $z=\ln\left(x^2+y^2-xy\right)$.

26. 1) $z=\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}\right)$; 2) $z=\operatorname{arctg}\ \left(3x+y^2\right)$.

27. 1) $z=\dfrac{y}{x}e^{xy}$; 2) $z=\dfrac{\sin y^2}{x}$.

28. 1) $z=\dfrac{x}{y}e^{xy^2}$; 2) $z=x^2+xy^2\sin y$.

29. 1) $z = x^5 + y^5 - 5xy$; 2) $z = \dfrac{\cos x^2}{y}$.

30. 1) $z = xy + \dfrac{x}{y}$; 2) $z = e^{x^2+y^2}$.

Задание 6. Используя понятие полного дифференциала, вычислить приближенное значение выражения.

1. 1) $\sqrt[3]{2,03^3 + 117,01}$; 2) $\sqrt{4,03} \cdot 3,02^{4,03}$.

2. 1) $\left(2 - \sqrt{0,97}\right)^{3,02}$; 2) $\ln\left(\sqrt[3]{1,01} + \sqrt{0,99} - 1\right)$.

3. 1) $\ln\left(\sqrt[5]{0,97} + \sqrt[4]{1,02} - 1\right)$; 2) $1,03^{-3,05}$.

4. 1) $z = \sqrt{3 \cdot 2,94^2 + 5 \cdot 4,05^2 + 14}$; 2) $\left(4 - 3\sqrt{0,96}\right)^{3,02}$.

5. 1) $\sqrt[3]{7,96} \cdot 0,98^{7,96}$; 2) $z = \sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^3}$.

6. 1) $\sqrt{(4,05)^2 + (2,96)^2}$; 2) $(4,05)^2 e^{1-(1,02)^2}$.

7. 1) $\sqrt{3,98} \cdot (1,03)^{3,98}$; 2) $\ln\left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[3]{1,98} - 1\right)$

8. 1) $\ln\left((2,02)^3 + \sqrt[3]{0,98} - 8\right)$; 2) $\sqrt[4]{(2,02)^2 + (2,99)^2 + 3}$.

9. 1) $\sqrt[7]{(3,03)^4 + (1,98)^5 + 15}$; 2) $\ln\left(\sqrt[3]{0,97} + \sqrt[5]{1,02}\right)$.

10. 1) $\sqrt{(3,02)^2 - (2,03)^2 + 11}$; 2) $1,08^{3,96}$.

11. 1) $\sqrt[4]{(2,03)^3 + (1,98)^3}$; 2) $\ln\left(3,03 + 6\sqrt[3]{0,96} - 2\right)$.

12. 1) $\sin 29^\circ \cdot \mathrm{tg} 46^\circ$; 2) $\sqrt[3]{2,01 + 0,97^2 + 5}$.

13. 1) $(0,96)^2 \cdot (1,02)^3$; 2) $\sqrt{(3,94)^2 + (3,04)^2}$.

14. 1) $\sqrt{(2,01)^3 + (3,97)^2 + 1}$; 2) $0,98^{2 \cdot 2,04}$.

15. 1) $\dfrac{10}{(4,02)^3+(1,97)^5+4}$; 2) $\operatorname{arctg}\dfrac{0,98}{(1,02)^2}$.

16. 1) $\dfrac{(2,03)^2}{\sqrt{(2,03)^3+(1,05)^3+7}}$; 2) $1,94\cdot e^{0,12}$.

17. 1) $\sqrt{5e^{0,02}+2,03^2}$; 2) $\dfrac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98}\sqrt[4]{1,05^3}}$.

18. 1) $\sqrt{3,98}\cdot(1,03)^{3,98}$; 2) $\dfrac{4,02^2}{\sqrt[5]{0,97}\cdot\sqrt[4]{1,03^3}}$.

19. 1) $\sqrt[3]{1,02^2+0,05^2}$; 2) $\sqrt[3]{0,94}\cdot 2,05^{0,94}$.

20. 1) $\sqrt[4]{(2,03)^3+(1,94)^3}$; 2) $\sqrt{3,95}\cdot 1,03^{3,95}$.

21. 1) $\ln\left(0,09^3+0,99^3\right)$; 2) $\sqrt[4]{1,96^2+3,04^2+3}$.

22. 1) $\sqrt[3]{(3,95)^2+(3,03)^2+2}$; 2) $(1,03)^{-3,05}$.

23. 1) $\sqrt[5]{2,95^3+2,03^2+1}$; 2) $\sqrt[4]{1,02}\cdot 3^{0,96}$.

24. 1) $\sqrt{1,02^3+1,97^3}$; 2) $\dfrac{4,02^2}{\sqrt[5]{0,97}\cdot\sqrt[4]{1,03^3}}$.

25. 1) $\sqrt{3,98}\cdot 1,03^{3,98}$; 2) $\sin 31^\circ \cos 61^\circ$.

26. 1) $2,01^{3,03}$; 2) $\sqrt[5]{1,98^4+3,02^2+7}$.

27. 1) $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1,07}{1,02}-1\right)$; 2) $\sqrt[4]{0,96^5+3,05^2+6}$.

28. 1) $\operatorname{arctg}\dfrac{1,02}{0,95}$; 2) $\sqrt[5]{1,93^4+3,98^2}$.

29. 1) $\sin 32^\circ\cdot\cos 59^\circ$; 2) $\sqrt[3]{2,93^2+4,05^2+2}$.

30. 1) $\sin 28^\circ \cos 61^\circ$; 2) $\sqrt{1,94^3+4,07^2+1}$.

Задание 7. Найти производные второго порядка функции $z = f(x, y)$
.

1. 1) $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3$; 2) $xy + z\ln y + z = 0$.

2. 1) $z = x^y$; 2) $z - ye^x + ze^y = 0$.

3. 1) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; 2) $x^2 + y^2 + yz^2 = 0$.

4. 1) $z = e^x(\cos y + x\sin y)$; 2) $xz^2y - y^x = 0$.

5. 1) $z = xe^y$; 2) $z = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$.

6. 1) $z = x + y + \dfrac{xy}{x - y}$; 2) $z = \sin^2(y - 3x)$.

7. 1) $z = y^{\ln x}$; 2) $z = \sqrt[3]{2y^2 - x^2}$.

8. 1) $z = \operatorname{tg}\left(x^2 + y^2\right)$; 2) $z = \ln\left(x^2 - y^2\right)$.

9. 1) $z = x^{2y}$; 2) $z = y\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

10. 1) $z = e^{x\ln y}$; 2) $z = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

11. 1) $z = \sin^2(ax + by)$; 2) $z = \sqrt{x^2 - 3y^2}$.

12. 1) $z = x\sin x + \dfrac{x}{y}$; 2) $z = \dfrac{\cos(x - y)}{y}$.

13. 1) $z = x\cos y$; 2) $z = e^{-\cos(3x + y)}$.

14. 1) $z = \operatorname{arctg}\sqrt{xy}$; 2) $z = \dfrac{\sin(x - y)}{x}$.

15. 1) $z = \ln\left(x + y^2\right)$; 2) $z = x^5 + y^5 - 5xy$.

16. 1) $z = \sqrt{x^2 + y}$; 2) $z = \ln\left(x^2 + y^2 + 2y + 1\right)$.

17. 1) $z = \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}\right)$; 2) $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$.

18. 1) $z = xy\ln x$; 2) $z = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}$.

19. 1) $z = x^3 + 3x^2y + 12xy^3$; 2) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy}$.

20. 1) $z = e^x \cos y$; 2) $z = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$.

21. 1) $z = 2x^2y^3 + 3x + 5y - 7$; 2) $z = xy\sqrt{x^2 + xy}$.

22. 1) $z = e^{xy} \sin x$; 2) $z = x^3y^2\left(6 - x - y\right)$.

23. 1) $z = x^2 \ln\frac{y}{x}$; 2) $z = x^2 - 2xy^2 + y^4$.

24. 1) $z = e^{xy} + x^2 + y^3$; 2) $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

25. 1) $z = x^2 \ln\frac{y}{x}$; 2) $z = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

26. 1) $z = y\ln\frac{x}{y}$; 2) $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{x + y}$.

27. 1) $z = \sin\frac{x}{y}$; 2) $z = \frac{2}{\sqrt{3x + 5y}}$.

28. 1) $z = \sin\frac{y}{x}$; 2) $z = \left(x + y\right)e^{xy}$.

29. 1) $z = x^2y^3e^{xy}$; 2) $z = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

30. 1) $z = e^x \ln y + \sin y \ln x$; 2) $z = e^{2x}\left(x + 2y^2 + 2y\right)$.

Задание 8. Дана функция $z = f\left(x, y\right)$. Проверить, удовлетворяет ли она данному уравнению.

1. $z = e^{\frac{x}{y}}$; $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial z}{\partial x}\right) - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

2. $z=e^{xy}; \quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

3. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}; \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

4. $z=\ln\left(x^2+y^2+2y+1\right); \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

5. $z=\sin^2\left(y-ax\right); \quad a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

6. $z=\dfrac{y}{x}; \quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

7. $z=y\sqrt{\dfrac{y}{x}}; \quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

8. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}; \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

9. $z=\dfrac{\sin\left(x-y\right)}{x}; \quad \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)-x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

10. $z=\dfrac{y}{\left(x^2-y^2\right)^5}; \quad \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}.$

11. $z=\sqrt{\dfrac{x}{y}}; \quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$

12. $z=\dfrac{y^2}{3x}+\arcsin\left(xy\right); \quad x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+y^2=0.$

13. $z=e^{xy}; \quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

14. $z=\ln\left(x+e^{-y}\right); \quad \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$

15. $z=\frac{x}{y};\quad x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

16. $z=x^y;\quad y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(1+y\ln x\right)\frac{\partial z}{\partial x}.$

17. $z=xe^{\frac{y}{x}};\quad x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

18. $z=\sin\left(x+ay\right);\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

19. $z=\cos y+\left(y-x\right)\sin y;\quad \left(x-y\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}.$

20. $z=\cos^3\left(3x-5y\right);\quad \frac{5}{3}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

21. $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{2y};\quad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

22. $z=y\ln\left(x^2-y^2\right);\quad \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$

23. $z=\ln\left(x^2+xy+y^2\right);\quad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2.$

24. $z=xy+xe^{\frac{y}{x}};\quad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z.$

25. $z=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right);\quad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}.$

26. $z=\sqrt{x}\sin\frac{y}{x};\quad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y}.$

27. $z=xe^{-\frac{y}{x}};\quad x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

28. $z=e^{\frac{x}{y^2}};\quad 2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

29. $z = e^{\frac{y}{x}}; \quad x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = yz.$

30. $z = \frac{x^2 y^2}{x + y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

Задание 9. Найти полные дифференциалы первого порядка dz и второго порядка $d^2 z$ функции $z = f(x, y)$.

1. $z = xy^2 - x^2 y$.

12. $z = \ln(x - y)$.

3. $z = x \sin^2 y$.

14. $z = e^{xy}$.

5. $z = 3x^2 y - 2xy - y^3$.

16. $z = x^2 + 2xy$.

7. $z = x \ln \frac{y}{x}$.

18. $z = e^x \cos y$.

9. $z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

10. $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{x + y}$.

11. $z = (x + y) e^{xy}$.

12. $z = \sin x \cos y$.

13. $z = \frac{x}{x + y}$.

14. $z = xy - \frac{y}{x}$.

15. $z = \ln(x^2 + y)$.

16. $z = \frac{x}{y} e^{xy}$.

17. $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

18. $z = (x^2 + y^2)^3$.

19. $z = y^{\ln x}$.

20. $z = \frac{2x + 3y}{x - y}$.

21. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

22. $z = \cos(2x + y)$.

23. $z = \sin(xy)$.

24. $z = \operatorname{arcctg} \frac{y}{x}$.

25. $z = e^{ax + by}$.

26. $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$.

27. $z = x^2 + y^2 - 3xy$.

28. $z = \arcsin(1 + xy)$.

29. $z=\sin^3(2x+3y)$. **30.** $z=\sin(x^2y^2)$.

Задание 10. Найи экстремумы функции двух переменных $z=f(x,y)$

1. 1) $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$;

2) $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

2. 1) $z=xy^2(1-x-y),\ x\ge 0,\ \ y\ge 0$;

2) $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$.

3. 1) $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$;

2) $z=x^3+y^3-15xy$.

4. 1) $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{50}{y};\quad x\ge 0,\ y\ge 0$;

2) $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$.

5. 1) $z=x^2+y^2-2\ln x-18\ln y;\quad x\ge 0,\ y\ge 0$;

2) $z=(x-1)^2+2y^2$.

6. 1) $z=x^3+3xy^2-15x-12y$;

2) $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

7. 1) $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$;

2) $z=x^3y^2(6-x-y),\quad (x>0,y>0)$.

8. 1) $z=x^2-4xy+9y^2$;

2) $z=\dfrac{1}{2}xy+(47+x-y)\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}\right)$.

9. 1) $z=10xy-9x^2-y^2$;

2) $z=(x-1)^2+2y^2$.

10. 1) $z=1-6x-x^2-xy-y^2$;

2) $z=x^2y(2-x-y),\ (x>0,y>0)$.

11. 1) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y;$

2) $z = y^2(1 - x - y).$

12. 1) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y;$

2) $z = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y, \ \left(x > 0, y > 0\right).$

13. 1) $z = x^2 y^3 \left(6 - x - y\right); \quad x \geq 0, \ y \geq 0;$

2) $z = e^{(x-y)}\left(x^2 - 2y^2\right).$

14. 1) $z = x^3 y^2 \left(6 - x - y\right); \ x \geq 0, \ y \geq 0;$

2) $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y.$

15. 1) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2;$

2) $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}, \ \left(x > 0, y > 0\right).$

16. 1) $z = 5xy - x^2 y - xy^2;$

2) $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y, \ \left(x > 0, y > 0\right).$

17. 1) $z = 6xy - xy^2 - x^2 y;$

2) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$

18. 1) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10;$

2) $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2.$

19. 1) $z = 4\left(x - y\right) - x^2 - y^2;$

2) $z = 1 + 6x - x^2 - xy + y^2.$

20. 1) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y;$

2) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y.$

21. 1) $z = x^2 + 2y^2 - 2x + 1;$

2) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3.$

22. 1) $z=1-2x+x^2-2y^2$;

2) $z=2xy-2x-4y$.

23. 1) $z=x^2+xy+y^2-5x-3y$;

2) $z=x^3+xy^2+6xy$.

24. 1) $z=1-x+2y-6x^2-y^2$;

2) $z=\left(x^2+y\right)\sqrt{e^y}$.

25. 1) $z=2x^2+3y^2-x-7y$;

2) $z=3\ln\frac{x}{6}+2\ln y+\ln\left(12-x-y\right)$.

26. 1) $z=x^2+y^2-4y+4$;

2) $z=3x+6y-x^2-xy+y^2$.

27. 1) $z=2xy-3x^2-2y^2+12$;

2) $z=x^2+y^2-2x-4\sqrt{xy}-2y+8$.

28. 1) $z=x^2+xy+y^2-3x-2y+5$;

2) $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$.

29. 1) $z=x^2y+xy^2-xy+3$;

2) $z=3x^2-2x\sqrt{y}+y-8x+8$.

30. 1) $z=2x^3y-x^2y^2+x$; 2) $z=x^2-xy-y^2$.

Задание 11. Исследовать на условный экстремум функцию $z=f\left(x,y\right)$ при заданных условиях $\varphi\left(x,y\right)=0$.

1. $z=x^2-y^2$ при условии $2x-y-3=0$.

2. $z=x^2+8xy+2y^2$ при условии $x+y-5=0$.

3. $z=x^2+8xy+3y^2$ при условии $9x+10y-29=0$.

4. $z=x^2+10xy+2y^2$ при условии $17x+16y-82=0$.

5. $z=x^2+10xy+3y^2$ при условии $9x+13y-31=0$.

6. $z = 3x^2 - 8xy + y^2$ при условии $x - 10y + 17 = 0.$

7. $z = x + y$ при условии $x^2 + y^2 - 2 = 0.$

8. $z = x + y$ при условии $2x^2 + y^2 - 6 = 0.$

9. $z = x + y$ при условии $3x^2 + y^2 - 12 = 0.$

10. $z = x + 9y$ при условии $xy - 1 = 0.$

11. $z = 2x + 16y$ при условии связи $xy + y^2 - 7 = 0.$

12. $z = 3x - 6y$ при условии $xy - y^2 + 1 = 0.$

13. $z = 4x - y$ при условии $x^2 - y^2 - 15 = 0.$

14. $z = 4x - 2y$ при условии $x^2 + xy + 3 = 0.$

15. $z = -12x + 7y$ при условии $x^2 - xy - 35 = 0.$

16. $z = -4x + 2y - 5xy$ при условии $x^2 y + x - 2 = 0.$

17. $z = x^2 + y^2$ при условии $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0.$

18. $z = 6 - 4x - 3y$ при условии $x^2 + y^2 - 1 = 0.$

19. $z = x^2 - 4y$ при условии $x - y - 1 = 0.$

20. $z = x^2 - y^2$ при условии $2x - y - 3 = 0.$

21. $z = x^2 + y^2$ при условии $x + y - 2 = 0.$

22. $z = x^2 - y^2$ при условии $x^2 + y^2 - 1 = 0.$

23. $z = x^2 + 2y^2$ при условии $3x + 2y - 11 = 0.$

24. $z = 2x + y$ при условии $x^2 + y^2 - 5 = 0.$

25. $z = x + 3y$ при условии $x^2 + y^2 - 10 = 0.$

26. $z = 3y^3 + 4x^2 - xy$ при условии $x + y = 0.$

27. $z = 5xy - 4$ при условии $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} - 1 = 0.$

28. $z = 2x + 3y$ при условии $x^2 + y^2 - 1 = 0.$

29. $z = x^2 + y^2$ при условии $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0.$

30. $z = xy + 3x^2$ при условии $x + y + 1 = 0.$

Задание 12. Найти наибольшее $\left(\max\limits_D f(x, y)\right)$ и наименьшее $\left(\min\limits_D f(x, y)\right)$ значения функции $z = f(x, y)$ в области D, ограниченной данными линиями.

1. 1) $z = x^3 + y^3 - 3xy; \quad D\{0 \le x \le 2, \ \ 0 \le y \le 2.\}$

2) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y; \quad D\{x = 0; \ y = 0; \ x + y = -3.\}$

2. 1) $z = x^2 y(4 - x - y); \quad D\{x \ge 0, \ y \ge 0, \ x + y \le 6.\}$

2) $z = 2x + y - xy; \quad D\{0 \le x \le 4; \ 0 \le y \le 4.\}$

3. 1) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y; \quad D\{0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1.\}$

2) $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1; \quad D\{x = 0; \ y = 0; \ x + y = 3.\}$

4. 1) $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1; \quad D\{x \ge 0, \ y \ge 0, \ x + y \le 3.\}$

2) $z = x^3 + y^3 - 3xy; \quad D\{0 \le x \le 2; \ 0 \le y \le 3.\}$

5. 1) $z = 2x^2 y - x^3 y - x^2 y^2; \quad D\{x \ge 0, \ y \ge 0, \ x + y \le 6.\}$

2) $z = xy; \quad D\{x^2 + y^2 \le 1.\}$

6. 1) $z = x^2 + y^2 - xy - x - y; \quad D\{x \ge 0, \ y \ge 0, \ x + y \le 3.\}$

2) $z = x^2 + 3y^2 + x - y; \quad D\{x = 1; \ y = 1; \ x + y = 1.\}$

7. 1) $z = xy + x + y; \quad D\{1 \le x \le 2, \ 2 \le y \le 3.\}$

2) $z = x^2 - xy + y^2 - 4x; \quad D\{x = 0; \ y = 0; \ 2x + 3y = 14.\}$

8. 1) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 2; \quad D\{x \le 3, \ y \ge 0, \ -x + y \le 1.\}$

2) $z = xy - 2x - y; \quad D\{0 \le x \le 3; \ 0 \le y \le 4.\}$

9. 1) $z = x^2 + 3y^2 + x - y; \quad D\{x \le 1, \ y \le 1, \ x + y \ge 1.\}$

2) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y; \quad D\{x = 0; \ y = 0; \ x = 1; \ y = 2.\}$

10. 1) $z = x^2 - 2xy + \dfrac{5}{2}y^2 - 2x; \quad D\{0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 2.\}$

2) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1; \quad D\{y = -1;\ y = 1;\ x = 0;\ x = 2.\}$

11. 1) $z = x^2 + 2xy - 10; \quad D\{y = 0, \quad y = 2x^2 - 4.\}$

2) $z = \dfrac{1}{2}x^2 - xy; \qquad D\left\{y = \dfrac{1}{3}x^2;\ y = 3.\right\}$

12. 1) $z = 2x^2 + 2xy - \dfrac{1}{2}y^2 - 4x; \quad D\{x \ge 0, \quad y \le 2, \ y - 2x \ge 0.\}$

2) $z = x^2 + xy; \quad D\{-1 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 3.\}$

13. 1) $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 6; \quad D\{-1 \le x \le 1, \quad -1 \le y \le 1.\}$

2) $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x; \quad D\{x \le 0;\ y \le 0;\ x + y + 2 = 0.\}$

14. 1) $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2; \quad D\{x \le 0\ ,\ y \le 0\ ,\ x + y + 2 \ge 0.\}$

2) $z = 10 + 2xy - x^2; \quad D\{0 \le y \le 4 - x^2.\}$

15. 1) $z = xy - 2x - y; \quad D\{0 \le x \le 3, \ 0 \le y \le 4.\}$

2) $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4; \quad D\{x \ge -1;\ y \ge -1;\ x + y \le 1.\}$

16. 1) $z = x^2 y; \quad D\{y = 0, \ y = 1 - x^2.\}$

2) $z = x^2 + 2xy + 2y^2; \quad D\{-1 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 2.\}$

17. 1) $z = x + \sqrt{y}; \quad D\{x + y = 1, \quad x = 0, \ y = 0.\}$

2) $z = x^2 + 3xy^2 + x - y; \quad D\{x \ge 1;\ y \ge -1;\ x + y \le 1.\}$

18. 1) $z = \dfrac{1}{2}x^2 - xy; \quad D\left\{y = 3, \ y = \dfrac{x^2}{2}.\right\}$

2) $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2; \quad D\{x \le 1;\ y \ge 0;\ y \le x.\}$

19. 1) $z = 1 + xy^2; \quad D\{0 \le x \le 1, \quad -1 \le y \le 2.\}$

2) $z = x^2 + 2y^2 - 1; \quad D\{x \ge 0;\ y \ge 0;\ x + y \le 3.\}$

20. 1) $z = 2x + y - xy; \quad D\{0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 4\ .\}$

2) $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27; \quad D\{0 \le x \le 3;\ 0 \le y \le 2.\}$

21. 1) $z = x^2 + xy; \quad D\{-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3.\}$

2) $z = xy - x - 2y; \quad D\{y = x;\ x = 3;\ y = 0.\}$

22. 1) $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27; \quad D\{0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 5.\}$

2) $z = x^2 + xy - 3x - y; \quad D\{0 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 3.\}$

23. 1) $z = xy^2\left(4 - x - y\right); \quad D\{x = 0;\ y = 0;\ x + y \le 6.\}$

2) $z = xy - 3x - 2y; \quad D\{0 \le x \le 4;\ 0 \le y \le 4.\}$

24. 1) $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2; \quad D\{1 \le x \le 4,\ -3 \le y \le 2.\}$

2) $z = 3x + y - xy; \quad D\{y = x;\ y = 4;\ x = 0.\}$

25. 1) $z = x^2 + 2y^2 + 1; \quad D\{x \ge 0;\ y \ge 0;\ \mathrm{x} + y \le 3.\}$

2) $2z = x^2 - 2xy; \quad D\{y = 2x^2;\ y = 8.\}$

26. 1) $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2; \quad D\{x \le 1,\ y \ge 0,\ y \le x.\}$

2) $z = 5x^2 - 3xy + y^2; \quad D\{-1 \le x \le 1;\ -1 \le y \le 1.\}$

27. 1) $z = x^2 + 3y^2 + x - y; \quad D\{x \ge 1,\ y \ge -1,\ x + y \le 1\ .\}$

2) $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2; \quad D\{x = 0;\ y = 0;\ x + y + 2 = 0.\}$

28. 1) $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4; \quad D\{x \ge -1,\ y \ge -1,\ x + y \le 1.\}$

2) $z = 2x^2 + 2xy - \dfrac{1}{2}y^2 - 4y; \quad D\{y = 2x;\ y = 2;\ x = 0.\}$

29. 1) $z = x^2 + 2xy + 2y^2; \quad D\{-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2.\}$

2) $z = x^2 + xy - 2; \quad D\{y = 4x^2 - 4;\ y = 0.\}$

30. 1) $z = 10 + xy - x^2\ ; \quad D\{0 \le y \le 4 - x^2.\}$

2) $z = \dfrac{1}{2}x^2 - xy; \quad D\left\{y = \dfrac{1}{3}x^2;\ y = 3.\right\}$

Задание 13. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке.

1. 1) $z = xy + y^2 - 2x, \quad M_0(2;\ 1;\ -1);$

2) $-2x^2 + 6xy - xy^2 - z^2 + 3 = 0, \quad M_0(1;\ 2;\ 3).$

2. 1) $z = 2x^2 + 2xy - y^2, \quad M_0(1;\ 3;\ -1);$

2) $xy + e^{yz} = 0, \quad M_0\left(5;\ -\dfrac{1}{5};\ 0\right).$

3. 1) $z = 5\sqrt{x^2 + y^2} - 2xy - 39, \quad M_0(3;\ -4;\ 10);$

2) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0, \quad M_0(1;\ 2;\ -1).$

4. 1) $z = 2xy - x, \quad M_0(2;\ 2;\ 6);$

2) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} - \dfrac{z^2}{9} = 0, \quad M_0(2;\ -3;\ -6).$

5. 1) $z = x^2 + 3xy - y^2, \quad M_0(1;\ 3;\ 1);$

2) $x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0, \quad M_0(1;\ 2;\ 3).$

6. 1) $z = 3y^2 - 9xy + y, \quad M_0(1;\ 3;\ 3);$

2) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6 = 0, \quad M_0(2;\ 2;\ 3).$

7. 1) $z = 3x^2y^4 - 6xy^3 + 5x - 4y + 10, \quad M_0(-2;\ 1;\ 20);$

2) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 9 = 0, \quad M_0(2;\ 1;\ 1).$

8. 1) $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}, \quad M_0(2;\ 3;\ 2);$

2) $x(y + z)(xy - z) + 8 = 0, \quad M_0(2;\ 1;\ 3).$

9. 1) $z = x^2 - y^2 - x - y, \quad M_0(1;\ -3;\ -6);$

2) $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} - 8 = 0, \quad M_0(2;\ 2;\ 1).$

10. 1) $z = 2xy + y^2 - 5x, \quad M_0(1;\ 1;\ -2);$

2) $3xy^2z + 5xy + z^2 - 10xz + 2y - 1 = 0, \quad M_0(1;\ -2;\ 3).$

11. 1) $z = x^2 - y^2 + 5x + 4y, \quad M_0(0;\ 1;\ 3)$;

2) $3x^2 + z^3 + 4xyz - 5y - 7 = 0, \quad M_0(0;\ -3;\ -2)$.

12. 1) $z = 3x^2 + 2y^2 - xy, \quad M_0(2;\ 1;\ 12)$;

2) $x^2 + 2y^2 - z^2 - 5 = 0, \quad M_0(2;\ -1;\ 1)$.

13. 1) $z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1, \quad M_0(-1;\ 2;\ 4)$;

2) $x^2 + y^2 + z^2 + xyz - 6 = 0, \quad M_0(1;\ 2;\ -1)$.

14. 1) $z = x^2 + 2xy + 3y^2, \quad M_0(1;\ 0;\ 1)$;

2) $3xy + y^2 z - xz + 2y - x = 0, \quad M_0(-3;\ 1;\ 1)$.

15. 1) $z = x^2 + y^2 + 6x + 3y, \quad M_0(1;\ -2;\ -3)$;

2) $x^2 + y^2 - (z-5)^2 = 0, \quad M_0(4;\ 3;\ 0)$.

16. 1) $z = x^2 + 3xy - 6y, \quad M_0(1;\ -2;\ 10)$;

2) $3x^2 + y^2 - 4z^2 - 15 = 0, \quad M_0(-3;\ 2;\ 2)$.

17. 1) $z = 3x^2 - xy + x + y, \quad M_0(1;\ 3;\ 4)$;

2) $x^3 + y^3 - 3z^2 + 3 = 0, \quad M_0(1;\ -1;\ 1)$.

18. 1) $z = x^2 + xy + y^2, \quad M_0(2;\ -1;\ 3)$;

2) $x^2 + y^2 + z^2 - 169 = 0, \quad M_0(3;\ 4;\ 12)$.

19. 1) $z = 2x^2 + 3xy + 4y^2, \quad M_0(0;\ 1;\ 4)$;

2) $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt, \quad M_0\left(\dfrac{a}{2};\ \dfrac{a\sqrt{3}}{2};\ \dfrac{\pi b}{3}\right)$.

20. 1) $z = x^2 - y^2 - 2x + y, \quad M_0(3;\ -3;\ -9)$;

2) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 6z - 20 = 0, \quad M_0(2;\ 4;\ 6)$.

21. 1) $z = 2xy + 3x - 2y, \quad M_0(1;\ 0;\ 3)$;

2) $x^3 + y^3 - 3xy + z^3 - 11 = 0, \quad M_0(1;\ 2;\ 2)$.

22. 1) $z == y^2 - 2, \quad M_0(2;\ 1;\ -1)$;

2) $xy^2z - x^2z + 2x - y - 1 = 0, \quad M_0(-2;\ 1;\ -1)$.

23. 1) $z = xy + y^2 - 2x, \quad M_0(2;\ 1;\ -1)$;

2) $x^2 + y^2 + 4z^2 - 9 = 0, \quad M_0(-2;\ 1;\ -1)$.

24. 1) $z = -x^2y + y^3 + 2xy, \quad M_0(2;\ -1;\ -1)$;

2) $x^3 + 2xy^2 + z^3 - 17 = 0, \quad M_0(1;\ -2;\ 2)$.

25. 1) $z = 7x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x + 7y - 12, \quad M_0(1;\ 1;\ -5)$;

2) $3x^2 + 3xz - yz + x + 1 = 0, \quad M_0(-1;\ 1;\ 1)$.

26. 1) $z = \operatorname{arctg}\left(x^2 + y^3\right), \quad M_0\left(0;\ 1;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$;

2) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{25} - 1 = 0, \quad M_0\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3};\ \sqrt{3};\ \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)$.

27. 1) $z = 2x^2 - 4y^2, \quad M_0(2;\ 1;\ 4)$;

2) $x^2y^2 - xyz + yz + 2xy = 0, \quad M_0(2;\ -1;\ 4)$.

28. 1) $z = 2x^2 + y^2, \quad M_0(-1;\ 2;\ 6)$;

2) $4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z - 9 = 0, \quad M_0(1;\ -2;\ 1)$.

29. 1) $z = 5 - x^2 - y^2, \quad M_0(1;\ 1;\ 3)$;

2) $2xyz + xy^2 + y^2z - x = 0, \quad M_0(4;\ -2;\ 1)$.

30. 1) $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y, \quad M_0(1;\ 1;\ 1)$;

2) $x^2y^2 + 2xyz - 4yz - 5x = 0, \quad M_0(3;\ -1;\ -3)$.

Задание 14. Даны: функция $z = f(x, y)$, точка $A(x_0;\ y_0)$ и вектор $\bar{s} = \{s_x;\ s_y\}$. Найти: 1) $\operatorname{grad} z$ в точке $A(x_0;\ y_0)$; 2) производную в точке $A(x_0;\ y_0)$ по направлению вектора $\vec{s}$.

1. $z = \ln(5x + 3y), \quad A(2;\ 2), \quad \bar{s} = \{2;\ -3\}$.

2. $z = \mathrm{arctg}\dfrac{y^2}{x}$, $A(2;\ 1)$, $\vec{s} = \{3;\ 4\}$.

3. $z = \dfrac{xy}{x-y}$, $A(2;\ 1)$, $\vec{s} = \{1;\ -1\}$.

4. $z = 2x^4 + 8x^2y^3$, $A(2;\ -1)$, $\vec{s} = \{-3;\ 4\}$.

5. $z = \ln\left(2x^2 + y^3\right)$, $A(3;\ -1)$, $\vec{s} = \{1;\ -2\}$.

6. $z = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{y^2}$, $A(3;\ 1)$, $\vec{s} = \{1;-1\}$.

7. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$, $A(2;\ -2)$, $\vec{s} = \{1;\ -3\}$.

8. $z = \ln(3x^2 + 5y^3)$, $A(2;\ 3)$, $\bar{s} = \{-4;\ 3\}$.

9. $z = 2x^3y + 3x^2y^2$, $A(1;\ -2)$, $\bar{s} = \{6;\ -8\}$.

10. $z = \ln(5x + 3y)$, $A(2;\ 2)$, $\bar{s} = \{2;\ -3\}$.

11. $z = 3x^2y^2 + 5xy^2$, $A(1;\ 1)$, $\bar{s} = \{2;\ 1\}$.

12. $z = 3x^2 + 2x^2y^3$; $A(-1;\ 2)$; $\bar{s} = \{4;\ -3\}$.

13. $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$; $A(1;\ 3)$; $\bar{s} = \{2;\ -1\}$.

14. $z = \arcsin\dfrac{x^2}{y}$, $A(1;\ 2)$, $\bar{s} = \{5;\ -12\}$.

15. $z = \mathrm{arctg}(xy^2)$, $A(2;\ 3)$, $\bar{s} = \{4;\ -3\}$.

16. $z = 5x^2 + 6xy$, $A(2;\ 1)$, $\bar{s} = \{1;\ 2\}$.

17. $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$, $A(1;\ 1)$, $\bar{s} = \{2;\ -1\}$.

18. $z = \ln(x^2 + 3y^2)$, $A(1;\ 1)$, $\bar{s} = \{3;\ 2\}$.

19. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$, $A(2;\ 1)$, $\bar{s} = \{3;\ -4\}$.

20. $z = x^2 + xy + y^2$, $A(1;\ 1)$, $\bar{s} = \{2;\ -1\}$.

21. $z = 5x^2 - 2xy + y^2$, $A(1;\ 1)$, $\bar{s} = \{2;\ -1\}$.

22. $z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2},\quad A(1;\ -2),\quad \bar{s}=\{1;\ 2\}.$

23. $z=\ln(3x^2+2xy^2),\quad A(1;\ 2),\quad \bar{s}=\{3;\ -4\}.$

24. $z=\operatorname{arctg}(xy),\quad A(2;\ 3),\quad \bar{s}=\{4;\ 3\}.$

25. $z=\dfrac{3x}{y^2},\quad A(3;\ 4),\quad \bar{s}=\{-3;\ -4\}.$

26. $z=5x^2y+3xy^2,\quad A(1;\ 1),\quad \bar{s}=\{6;\ -8\}.$

27. $z=\ln(2x+3y),\quad A(2;\ 2),\quad \bar{s}=\{2;\ -3\}.$

28. $z=x^3y+xy^2,\quad A(1;\ 3),\quad \bar{s}=\{-5;\ 12\}.$

29. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\quad A(-1;\ 2),\quad \bar{s}=\{1;\ -1\}.$

30. $z=\ln\left(x^2+2xy+y^3\right),\quad A(-1;\ 2),\quad \bar{s}=\{1;\ -1\}.$

Задание 15. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)$ в точке $M(x_0;y_0;z_0)$ по направлению вектора $\bar{s}$.

1. $u=x+\ln\left(x^2+y^2\right),\quad \bar{s}=\{-2;1;\ -2\},\quad M(1;1;1).$

2. $u=xy^2-\sqrt{xy+z^2},\quad \bar{s}=\left\{-1;1;\ -\sqrt{2}\right\},\quad M(1;1;\ -1).$

3. $u=\ln\left(4-x^2\right)+xyz^2,\quad \bar{s}=\left\{-1;1;\ -\sqrt{2}\right\},\quad M(1;\ -1;1).$

4. $u=x\ln\left(1+y^2\right)+\operatorname{arctg} z,\quad \bar{s}=\left\{0;1;\sqrt{3}\right\},\quad M(1;\ 2;1).$

5. $u=y\ln x-\operatorname{arcctg} z,\quad \bar{s}=\{2;1;\ -2\},\quad M(2;1;\ -1).$

6. $u=2\sqrt{xyz}+\sin(x+z),\ \bar{s}=\left\{2;\ \sqrt{5};\ -4\right\},\ M(\pi/2;\ 3;\ 3\pi/2).$

7. $u=\sin(x+2y)+\sqrt{xyz},\quad \bar{s}=\{4;3;0\},\quad M(\pi/2;\ \pi/2;1).$

8. $u=x^2yz+3\ln(z-1),\quad \bar{s}=\{-1;\ 2;\ -2\},\quad M(1;1;\ 2).$

9. $u=y^3+\sqrt{x^2+z^2},\quad \bar{s}=\{1;1;\ -1\},\quad M(-3;1;\ 4).$

10. $u=\dfrac{\sqrt{y}}{x}+\dfrac{xz}{y+\sqrt{x}}$, $\quad \bar{s}=\left\{-1;\sqrt{2};-1\right\}$, $\quad M\left(1;\ 4;\ -1\right)$.

11. $u=\sqrt{xz}+\sqrt{4-y^2}$, $\quad \bar{s}=\{-2;\ 1;\ -2\}$, $\quad M\left(1;\ 0;\ 1\right)$.

12. $u=\sqrt{x^2+y^2}+y\cdot\operatorname{arctg} z$, $\quad \bar{s}=\left\{\sqrt{2};\ 1;\ -1\right\}$, $\quad M\left(-1;\ 1;\ 1\right)$.

13. $u=z^2+2\operatorname{arcctg}\ (x-y)$, $\quad \bar{s}=\{1;\ -2;\ 2\}$, $\quad M\left(1;\ 2;\ -1\right)$.

14. $u=\ln\left(x^2+y^2\right)+xyz$, $\quad \bar{s}=\{2;\ 1;\ -2\}$, $\quad M\left(1;\ -1;\ 2\right)$.

15. $u=xy-\dfrac{x}{z}$, $\quad \bar{s}=\left\{-\sqrt{3};\ 2;\ -\sqrt{2}\right\}$, $\quad M\left(-1;\ 2;\ 1\right)$.

16. $u=xz+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $\quad \bar{s}=\{3;\ 0;\ -4\}$, $\quad M\left(1;\ 1;\ 1\right)$.

17. $u=x\sqrt{y}+(z+y)\sqrt{x}$, $\quad \bar{s}=\{1;\ 2;\ 2\}$, $\quad M\left(1;\ 1;\ 2\right)$.

18. $u=x^2y+\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}$, $\quad \bar{s}=\{-1;\ 1;\ 1\}$, $\quad M\left(3;\ -1;\ 4\right)$.

19. $u=\ln\left(1+y^2\right)+zy\sqrt{x}$, $\quad \bar{s}=\left\{1;1;-\sqrt{2}\right\}$, $\quad M\left(4;\ -1;\ -1\right)$.

20. $u=\ln\left(x^2+y^2\right)-\sqrt{x^2+z^2}$; $\bar{s}=\left\{\sqrt{2};-1;-1\right\}$, $M\left(-1;-1;1\right)$.

21. $u=-2y+\ln\left(x^2+z^2\right)$, $\quad \bar{s}=\left\{3;-2;\sqrt{3}\right\}$, $\quad M\left(-1;\ -2;\ 1\right)$.

22. $u=-3y+\sqrt{x^2+2z}$, $\quad \bar{s}=\left\{3;\ -2;\ \sqrt{3}\right\}$, $\quad M\left(-1;\ -2;\ 1\right)$.

23. $u=\sqrt{z}-3x^2+y^2$, $\quad \bar{s}=\left\{\sqrt{2};\ 2;\ -\sqrt{2}\right\}$, $\quad M\left(-1;\ 1;\ 4\right)$.

24. $u=yz+\sqrt{x^2+y}$, $\quad \bar{s}=\left\{-1;\ -\sqrt{3};\ 2\right\}$, $\quad M\left(-1;\ 1;\ 1\right)$.

25. $u=\sqrt{xyz}-\ln\left(16-z^2\right)$, $\bar{s}=\left\{-3;2\sqrt{3};-2\right\}$, $M\left(-\sqrt{5};-1;\sqrt{5}\right)$.

26. $u=-2z+\ln\left(3x+y^2\right)$, $\quad \bar{s}=\left\{-\sqrt{3};\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}$, $\quad M\left(1;-1;1\right)$.

27. $u=xz\sqrt{y}+\operatorname{arctg} y$, $\quad \bar{s}=\left\{-1;\ 1;\ -\sqrt{2}\right\}$, $\quad M\left(1;\ 1;\ 1\right)$.

28. $u=\sqrt{x+y}+\ln\left(4-z^2\right)$, $\quad \bar{s}=\{1;\ 1;\ -1\}$, $\quad M\left(0;\ 1;\ 1\right)$.

29. $u=\sqrt{xy}-\ln\left(z^2+y^2\right)$, $\bar{s}=\left\{-2;\sqrt{3};-\sqrt{2}\right\}$, $M\left(-1;-\sqrt{3};-1\right)$.

30. $u=x+3\sqrt{xz}+\ln\left(5-y^2\right)$, $\bar{s}=\left\{-1;\,1;\,-\sqrt{2}\right\}$, $M\left(1;-1;1\right)$.

Задание 16. Найти градиент скалярного поля u в точке $M_0\left(x_0;\,y_0;\,z_0\right)$.

1. $u=\dfrac{x^3}{\operatorname{ctg}\left(yz\right)}$, $M_0\left(2;\,\pi/2;\,1/2\right)$.

2. $u=y\,\operatorname{arctg}\dfrac{z}{x}$; $M_0\left(1;\,2;\,1\right)$.

3. $u=\dfrac{\sin xz^2}{y}$; $M_0\left(\pi/6;\,1/2;\,1\right)$.

4. $u=y\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{z}{x}$; $M_0\left(1;\,2;\,1\right)$.

5. $u=\dfrac{y^2z}{\cos^2 x}$; $M_0\left(\pi/3;\,1/2;\,1\right)$.

6. $u=\sqrt{46-6x^2-y^2-3z^2}$; $M_0\left(1;\,2;\,1\right)$.

7. $u=\dfrac{3x^2}{\sqrt{2}}-\dfrac{y^2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}z^2$; $M_0\left(2/3;\,2;\,\sqrt{2/3}\right)$.

8. $u=x^2+y^2+z^2-2xyz$; $M_0\left(1;\,-1;\,2\right)$.

9. $u=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$; $M_0\left(1;\,2;\,2\right)$.

10. $u=x^y-z$; $M_0\left(2;\,2;\,4\right)$.

11. $u=3x^2y-3xy^2+yz^2$; $M_0\left(1;\,2;\,0\right)$.

12. $u=\alpha\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $M_0\left(2;\,-2;\,1\right)$.

13. $u=\dfrac{z^2}{x^2y^2}$; $M_0\left(2/3;\,2;\,\sqrt{2/3}\right)$.

14. $u=x^2+y^2+z^2-2xyz$; $M_0\left(1;\,-1;\,2\right)$.

15. $u=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$; $\quad M_0(1;\ 2;\ 2)$.

16. $u=x^2+y^2-z^2$; $\quad M_0\left(1;\ 1;\ \sqrt{7}\right)$.

17. $u=\operatorname{arctg}\left(x^2+2y+z^2\right)$; $\quad M_0(1;\ 1;\ 0)$.

18. $u=\dfrac{x^3}{\operatorname{ctg}(yz)}$; $\quad M_0(2;\ \pi/2;\ 1/2)$.

19. $u=\sqrt{4+x^2+y^2-z}$; $\quad M_0(2;\ -2;\ 3)$.

20. $u=\dfrac{y^2z}{\cos^2 x}$; $\quad M_0(\pi/3;1/2;1)$.

21. $u=\dfrac{\sin xz^2}{y}$; $\quad M_0(\pi/4;1/4;1)$.

22. $u=\dfrac{9x^2+y^2-1}{z^2}$; $\quad M_0(1;\ 2;\ 5)$.

23. $u=e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\quad M_0\left(7;\ \sqrt{2};\ -7\right)$.

24. $u=\dfrac{x^2}{y^2+z^2}$; $\quad M_0(8;\ 4;\ -3)$.

25. $u=\arcsin\dfrac{2y}{x^2+z^2}$; $\quad M_0(-1;\ 1;\ 2)$.

26. $u=\dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2}$; $\quad M_0\left(7;\ \sqrt{2};\ 7\right)$.

27. $u=y\operatorname{arctg}\dfrac{z}{x}$; $\quad M_0(1;\ 2;\ 1)$.

28. $u=\operatorname{arctg}\dfrac{x^2+z^2}{y}$; $\quad M_0(1;\ 2;\ 3)$.

29. $u=\operatorname{arctg}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\quad M_0(3;\ 4;\ 1)$.

30. $u = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x^2+y^2}$; $\quad M_0(-3;\ 4;\ 1)$.

Задание 17. Найти методом наименьших квадратов линейную зависимость $y = ax + b$ по следующим данным:

1.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	2	3	2	3	3	4	7

2.

x	2	4	6	8	10	12	14	16
y	2	3	4	5	5	6	7	9

3.

x	1	3	5	7	9	11	13	15
y	1	2	3	4	5	6	7	7

4.

x	2	4	6	7	10	11	14	15
y	1	3	5	6	9	10	13	16

5.

x	1	3	5	7	9	11	13	15
y	1	2	4	6	8	9	13	14

6.

x	2	4	7	9	11	12	13	14
y	1	3	6	8	9	13	12	13

7.

x	1	2	4	6	7	9	10	12
y	2	3	4	6	6	8	9	10

8.

x	2	4	5	8	9	10	11	13
y	2	4	5	7	8	9	10	11

9.

x	1	3	5	7	8	9	10	11
y	1	3	3	6	7	8	9	9

10.

x	-1	1	3	4	6	7	9	11
y	0	2	3	4	5	6	8	10

11.

x	1	3	4	6	7	9	10
y	1,5	3,5	4	5,5	7	8	9

12.

x	2	4	5	7	8	9	11
y	2,5	4	5,5	6	7	8,5	10

13.

x	1	3	4	6	7	9	12
y	1,5	2,5	2	4	4,5	5	6,5

14.

x	2	4	6	7	8	10	12
y	2	2,5	4	4,5	5	5,5	7,5

15.

x	2	3	5	7	8	9	11
y	1,5	2,5	3	4	5,5	5	7

16.

x	1	3	4	6	8	9	12
y	1,5	2	1,5	3	4	3	4,5

17.

x	2	4	6	7	9	11	12
y	1	2,5	3	4,5	5	6,5	7

18.

x	3	4	6	8	9	10	13
y	1,5	2	3	3,5	4	4,5	5

19.

x	1	3	4	6	8	10	12
y	1,5	2	3,5	4	5,5	6	7

20.

x	2	3	5	8	9	10	12
y	1	2	2,5	3,5	4	5	5,5

21.

x	2	4	6	7	8	10	11
y	1,5	2	3	3,5	4	4,5	5

22.

x	2	4	5	7	8	9	13
y	2	3,5	4,5	6	7	7,5	10

23.

x	1	3	5	6	8	10	13
y	0,5	1	2,5	3	4,5	6	7

24

24.

x	1	3	5	6	8	9	12
y	0,5	2	2,5	4	4,5	6	6,5

25.

x	2	3	5	7	8	10	12
y	1,5	2	3,5	4	5,5	6	7

26.

x	2	4	5	7	9	10	12
y	1,5	2	3	3,5	4,5	5	7

27.

x	1	3	5	7	8	9	13
y	0,5	1,5	3	3,5	4	5	6

28.

x	0	2	4	7	8	10	12
y	0,5	1	3	4	4,5	6	6,5

29.

x	1	3	5	6	8	9	13
y	0,5	2	2,5	3	3,5	4	6

30.

x	2	3	5	7	8	9	11
y	1	2	2,5	3	4	3,5	4,5

РАЗДЕЛ III.
ЧИСЛОВЫЕ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Задание 1. Вычислить сумму ряда.

1. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+7)(2n+9)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n-2^n}{16^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 5^{n-1}}$.

2. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+6)(n+7)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n-5^n}{35^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^n}$.

3. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+7)(n+2)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{11^n-3^n}{33^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$.

4. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+11^n}{22^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 3^n}$.

5. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3\cdot 4^{n-1}}$.

6. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{15^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2\cdot 7^n}$.

7. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+6n+8}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{11^n-3^n}{33^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3\cdot 31^{n-1}}$.

8. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{17^n-2^n}{34^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4\cdot 23^{n-1}}$.

9. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2-3n-2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{19^n-2^n}{38^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5\cdot 19^n}$.

10. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2+3n-20}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n-3^n}{24^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{7\cdot 11^n}$.

11. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-n+2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n+3^n}{24^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2\cdot 13^{n-1}}$.

12. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+21n-8}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{13^n+2^n}{26^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5\cdot 17^{n-1}}$.

13. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{10^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\cdot 6^{n-1}}$.

14. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{12^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2\cdot 5^n}$.

15. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+7^n}{21^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5\cdot 2^{n-1}}$.

16. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n+3^n}{18^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5\cdot 3^{n-1}}$.

17. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+7^n}{35^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\cdot 7^{n-1}}$.

18. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n-3^n}{21^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\cdot 5^{n-1}}$.

19. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+4)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-2^n}{10^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3\cdot 7^{n-1}}$.

20. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+4)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-3^n}{15^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3\cdot 6^{n-1}}$.

21. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n-2^n}{14^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4\cdot 3^n}$.

22. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+4)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-4^n}{20^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3\cdot 11^n}$.

23. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+4)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n-3^n}{18^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3\cdot 9^n}$.

24. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+5)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n-3^n}{24^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3\cdot 4^{n-1}}$.

25. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)\cdot(n+6)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{13^n+2^n}{26^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5\cdot 9^{n-1}}$.

26. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\cdot(n+6)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+7^n}{28^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^n}$.

27. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)(n+5)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{17^n-2^n}{34^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2\cdot 8^n}$.

28. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)(n+6)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n-3^n}{18^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3\cdot 5^{n-1}}$.

23. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\cdot(n+5)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+9^n}{18^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5\cdot 4^{n-1}}$.

24. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\cdot(n+7)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{15^n-2^n}{30^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8\cdot 5^{n-1}}$.

25. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n+3^n}{24^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5\cdot 2^{n-1}}$.

26. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n-4^n}{28^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot 3^{n-1}}$.

27. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+9)(n+10)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+15^n}{30^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}$.

28. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+6n+8}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n-2^n}{18^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5\cdot 8^{n-1}}$.

29. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-13^n}{26^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3\cdot 5^n}$.

30. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+7n+12}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n+3^n}{18^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5\cdot 3^{n-1}}$.

Задание 2. Исследовать сходимость ряда с помощью одного из признаков (достаточный признак расходимости ряда, признаки сравнения, предельный признак сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши и т.п.).

1. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100n+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n}$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 10\cdot 17\cdot\ldots\cdot(7n-4)}{8\cdot 11\cdot 14\cdot\ldots\cdot(3n+5)}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{1}{n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{100n+1}$.

2. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n-\operatorname{tg}2n}{3n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{n^5+\sin\frac{1}{n}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2^n\left(2^n-1\right)}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots\cdot(2n+3)}{9\cdot 14\cdot 19\cdot\ldots\cdot(5n+4)}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{3n}\right)^n$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+3}$.

3. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+n+5}{5n^2+3n+11}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\left(1+n^2\right)}}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+2n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7\cdot 10\cdot 13\cdot\ldots\cdot(3n+4)}{9\cdot 11\cdot 13\cdot\ldots\cdot(2n+7)}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^n\left(\frac{\pi}{2n}\right)$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n+1}\right)^{n}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{4n^3+5n}$.

4. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^3+4n^2+1}{21n^3+n+5}$; 2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-6}{3n^4+5n-2}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots\cdot(2n+3)}{6\cdot 11\cdot 16\cdot\ldots\cdot(5n+1)}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+3n+1}{5n^2-n+7}\right)^{n}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^5 n}$.

5. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{3n-1}{2n+3}$; 2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2-2}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5n}{4n^3+2n+1}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 3^n}{3^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{2\cdot 7\cdot 12\cdot\ldots\cdot(5n-3)}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{1}{n}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+4n+1}{n^2-5n+8}\right)^{n}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$.

6. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{3n-2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{\sqrt[4]{n^5}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-1)(6n+3)}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2n+1}\right)^{n}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5n+8}{3n^2-2}\right)^n$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\sqrt{\ln^3(3n+1)}}$.

7. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^3+3n^2+1}{7n^3+2n+6}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^4}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+4}{7n-1}\right)^{n^2}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^3+3n^2+1}{5n^3-n-11}\right)^n$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln^5(n+1)}}$.

8. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{(n+3)^2}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n^2+1)^2}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{3^{n^2}}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n+1}\right)^n$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+4n+5}{6n^2-3n-1}\right)^{n^2}$;

8) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(2n-5)\ln^2(2n-5)}$.

9. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^2+3}{n^2+4n+2}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+3}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ (n+1)}{3^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100\cdot 103\cdot\ldots\cdot(97+3n)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{5n+4}\right)^{n^2}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^4+3n^2+n}{5n^4-n^3+2n-1}\right)^n$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3+8n)\ln^2(3+8n)}$.

10. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+3n+11}{(n+2)^3+4}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\ (n+3)}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{(n+1)(n^2+1)}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 7\cdot 12\cdot\ldots\cdot(5n-3)}{7\cdot 10\cdot 13\cdot\ldots\cdot(3n+4)}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}10^m\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-n-1}{7n^2+3n+4}\right)^n$;

8) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(3n-5)\sqrt{\ln(3n-5)}}$.

11. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4-n^2+3n}{(n+3)^2+2+1}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n+n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n+1}{n^5+5}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{8\cdot 13\cdot 18\cdot\ldots\cdot(5n+3)}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-8n+4}{5n^2+3n-1}\right)^n$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^3(2n+1)}$.

12. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+\sin n+1}{7n+3}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2n^3+1}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2n^4+5}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{\pi}{2^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots\cdot(2n+3)}{8\cdot 11\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+5)}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+2)}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^3+3n^2-3}{5n^3-2n+7}\right)^n$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\ln^2(3n+1)}$.

13. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+11n+3}{n^2+n\sin 2n+1}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\ (1+n^2)}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)(4n+5)}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{7^n}\right)^{3n}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

14. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+n^2\sin 3n+1}{(n+1)^3+4}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^3}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n^2+3}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^n$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+n-1}{5n^2+3n}\right)^n$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+6}$.

15. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n+11n^2-3}{5n^2-4n+1}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+7}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot7\cdot10\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{2\cdot6\cdot10\cdot\ldots\cdot(4n-2)}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+3}\right)^n$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^3+2n+1}{4n^2-2n+3}\right)^n$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+3}$.

16. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+n\sin 3n+5}{n^2+3n-2}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 11\cdot 21\cdot\ldots\cdot(10n-9)}{(2n-1)!}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{5n+1}\right)^n$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5n+1}$.

17. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2n+5}{n^2+3n-2}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n+1}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{(n+1)!}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{5n+1}\right)^n$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left[\ln(n+1)\right]^{2n}}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi}{n\ln n}$.

18. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+\sin 2n}{3n+1}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln(n+1)}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+n}{(n+3)^2}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n)!}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{3^n}\right)^n$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{3n^2-2n}$.

19. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\sin 2n+3n+2}{8n^3+11n-5}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2n^3+n^2+3}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n^4-n+5}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^n$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+7^n}{14^n}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+4}$.

20. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+7\sin 3n+2}{4n+21}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1}{3n^4+2n^2+7}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2-1}}{\sqrt{n}\cdot 2^{n^2}}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n}\right)^{n^2}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^4+2}$.

21. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3+n^2\sin n+3}{5n^3+2n^2\sin 2n+1}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\ (n+3)}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+2}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n+1)}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n-1}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$.

22. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n-\sin n+5}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n\sqrt{n+1}}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{n^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{6\cdot11\cdot16\cdot\ldots\cdot(5n+1)}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^2-1}$.

23. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^3+4n+1}{2(n+2)^3+7}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n+n}$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\left(\frac{\pi}{4^n}\right)$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot7\cdot12\cdot\ldots\cdot(5n-3)}{7\cdot13\cdot19\cdot\ldots\cdot(6n+1)}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)^2}$.

24. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+n\sin n}{5n^2+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3\sqrt{n}+4n+1}{n^6\sqrt{n}+4n^3+7}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+4}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(2n+1)\cdot3^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot7\cdot12\cdot\ldots\cdot(5n-3)}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{2^n}\right)^{3n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$.

25. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sin 4n}{2n+3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\cos^2 6n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{5^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 8\cdot 13\cdot\ldots\cdot(5n-2)}{8\cdot 15\cdot 22\cdot\ldots\cdot(7n+1)}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^n$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}4^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1000n+1}$.

26. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,\mathrm{tg}\,2n+13}{n^2+5n+2}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n-1}+n-1}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n^2+n+1}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{7^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot 11\cdot 15\cdot\ldots\cdot(4n+3)}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{5n}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$.

27. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3\,\mathrm{tg}\,2n+1}{2n+\sin 3n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^2-1}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{7\cdot 12\cdot 17\cdot\ldots\cdot(5n+2)}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+3}$.

28. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+\sin n}{3n-1}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^4}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{10^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{7\cdot 10\cdot 13\cdot\ldots\cdot(3n+4)}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5}$.

29. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{5n+\operatorname{tg}2n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+2n}$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n}{n^3+3n-3}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{3n\cdot 5^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot 7\cdot 9\cdot\ldots\cdot(2n+3)}{6\cdot 11\cdot 16\cdot\ldots\cdot(5n+1)}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+3}{2n+5}\right)^{n}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2+1}$.

30. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2\sin 3n}{7\sin 2n+5n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9n+7}{2n^3+5n^2-4}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n^2+n+5}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7\cdot 11\cdot 15\cdot\ldots\cdot(4n+3)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-2}$.

Задание 3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость числовой ряд:

1. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^2}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^{n^2}$.

2. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{(2n+1)^2}$.

3. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\ln(n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n\,!}$.

4. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{5^n}{(3n+1)^2}$.

5. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n\,!}{(n+1)^n}$.

6. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha}{n^3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(n+1)^2}{2^n}$.

7. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^{n-1}}{n!}$.

8. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^3+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^3}$.

9. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

10. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}$.

11. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$.

12. 1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n\ln n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

13. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{n!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$.

14. 1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(2n+1)\cdot n}$.

15. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}}$.

16. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n-5}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

17. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+3}{4^n}$.

18. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n!}{n\sqrt[3]{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{5n+2}$.

19. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n!}{n^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}$.

20. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3}$.

21. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{(3n)!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$.

22. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4^n(n+1)^2}{3^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(4n-3)^2}$.

23. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(4n-1)^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$.

24. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{3n+7}\right)^n$.

25. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{\sqrt{n\cdot 2^n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{5n(n+1)}$.

26. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n+1}{(n+1)\cdot(n+2)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n(2n+1)}$.

27. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{5^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 7^n}$.

28. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{5}{\ln(n+1)}$.

29. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

30. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{4n+1}{(3n+1)\cdot(n+5)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{5n^n+1}$.

Задание 4. Вычислить сумму с точностью $\varepsilon=0,001$.

1. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{3n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\pi n}{3^n(n+1)}$.

2. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n!\cdot 3^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{4^n(2n+1)}$.

3. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{n^2(n+5)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n!}$.

4. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n)!\cdot n!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{n^2}{3^n}$.

5. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(2n)^3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n!}$.

6. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{(2n)!\cdot(n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\pi n}{n\cdot 3^n}$.

7. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n!(2n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)}{n^3}$.

8. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3}{n^3(n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{(2n)^3}$.

9. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n+1)!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{2^n}{(n+1)^5}$.

10. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{(n^2+1)^2}$.

11. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\cdot 2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n^3(n+1)}$.

12. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2(n+3)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(3n)!}$.

13. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$.

14. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)}{n^3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}$.

15. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\pi n}{(n^3+1)^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n^2}$.

16. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4^n(2n+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{1+n^3}$.

17. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3^n\cdot(2n)!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{7^n}$.

18. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n(2n+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4^n\cdot n!}$.

19. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!}$.

20. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4^{n+1}\cdot 2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}$.

21. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{1+n^3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n\cdot n!}$.

22. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{15^n}$.

23. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{2^n}$.

24. 1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+7)(2n+9)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3n!}$.

25. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)!\cdot 2n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{\left(n^3+1\right)^2}$.

26. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^3\cdot(n+3)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+2}{(2n)!\cdot n!}$.

27. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{2^n\cdot n!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n$.

28. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{\left(n^3+1\right)^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(3n+1)!}$.

29. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin\left((-1)^n \pi/2\right)}{2^n\cdot n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{(n+1)^4}$.

30. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{1+n^3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3^n\cdot n!}$.

Задание 5. Найти область сходимости функционального ряда.

1. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+8)(x-5)^{n+1}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot 5^{\frac{n}{3-x}}$.

2. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{(n+1)^5 x^{2n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n^2 (x+3)^n}$.

3. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 9^n (x-1)^{2n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}(x-1)^{2n}$.

4. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 4^n(x+5)^{n+1}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$.

5. 1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)\cdot 5^n(x-3)^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x}$.

6. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\cdot 2^n(x-2)^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

7. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)2^n(x-2)^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$.

8. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\sqrt{3^n}}{\sqrt{n}}\operatorname{tg}\frac{3x}{n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}$.

9. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n x^n\operatorname{tg}\frac{3x}{n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\left(x^2-4x+6\right)^n}{3^n}$.

10. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tg}^n x}{n\sqrt{8^n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n\left(x^2-6x+10\right)^n}$.

11. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 9^n(x-1)^{2n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n\left(x^2-6x+13\right)^n}$.

12. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}16^n x^{3n}\arcsin\frac{x}{\sqrt[3]{n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x\right)^n$.

13. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tg}^n x}{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2\left(x^2-4x+5\right)^n}$.

14. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tg}^n 2x}{n^3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$.

15. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\cdot x^{3n}\cdot\arcsin\frac{x}{3n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n^2}(x+2)^{n^2}$.

16. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tg}^n x}{n\sqrt{3^n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$.

17. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot x^n\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x}{n+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot n\cdot\cos^n x$.

18. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3^n\cdot(x-2)^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2(5x+9)^{2n-1}}$.

19. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}27^n\cdot x^{3n}\cdot\operatorname{arctg}\frac{3x}{2n+3}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}(n!)^2}{(3n)!}\operatorname{tg}^n x$.

20. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}9^n\cdot n^2\cdot\sin^{3n}x$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x+2)^n}$.

21. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n\sin^{3n}x}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n(x^2-2x+3)^n}$.

22. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^{2n}2x}{\sqrt{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-x}$.

23. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\operatorname{tg}^{2n}x}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^3(x^2-4x+7)^n}$.

24. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\sin^n 3x}{n^4}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-5x+11)^n}{5^n(n^2+5)}$.

25. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+8)(x-5)^{n+1}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\sin^{3n}x}{n^2}$.

26. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2 2^{nx}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x+2)^n}$.

27. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\operatorname{tg}\frac{x}{3^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-5}{5n^3+4}\cdot(7x+1)^n$.

28. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 \pi x}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^2-6x+12\right)^n}{4^n\cdot\left(n^2+1\right)}$.

29. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{4^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^2-2x+2\right)^n}{2^n\left(n^2+2\right)}$.

30. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\left(x+3\right)^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\left(x+4\right)^{2n+1}}{\left(n+1\right)!}$.

Задание 6. Найти область сходимости степенного ряда.

1. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3n+2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{\left(2n-2\right)!}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2\left(x+3\right)^n}{3^n}$.

2. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3x^n}{5^n+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n-1}\left(x-3\right)^n}{4^{3n-1}}$.

3. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left(2n-1\right)!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\left(x+3\right)^n}{3^{n+1}}$.

4. 1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2n+1\right)x^n}{n+21}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x+5\right)^{n^2}}{\left(n+1\right)^n}$.

5. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^nx^n}{n\left(n+1\right)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt[n]{n}}x^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left(x-1\right)^n}{4n-3}$.

6. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{3n}x^n}{\left(n+1\right)^{3n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^nx^n}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x+3\right)^n}{\sqrt{4n^2+5}}$.

7. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n+1\right)x^n}{3^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\left(x+4\right)^{2n+1}}{\left(n+1\right)!}$.

8. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\,x^n}{n!}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n\left(x-1\right)^n}{5^{n-1}\left(n+1\right)}$.

9. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3n-1}n(x-2)^n}{(2n-1)4^{n+1}}$.

10. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\sqrt{n+1}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!x^n}{n^n}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5^{2n-1}(x-1)^n}{2^{5n+1}}$.

11. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)4^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3n-1}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5^{3n-1}(x-7)^n}{(n^2+n)2^n}$.

12. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\,x^n}{4^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n\cdot(n+1)}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3n+1}(x-1)^n}{5^{2n-2}}$.

13. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{(n+1)^n}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3n}(x-1)^n}{5^{2n+1}}$.

14. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{7^n(n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n x^n}{n}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5^{2n}(x-3)^n}{2^{3n-1}}$.

15. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n3^n x^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!x^n$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^{2n}}$.

16. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\sqrt{n+1}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3n+1}(x-1)^n}{3^{2n-1}}$.

17. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{n}{2}}x^n}{n!}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5^{2n+3}(x-2)^n}{3^{2n+1}}$.

18. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3n+2)x^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{\sqrt{n}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{n^3}$.

19. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{7^n(n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n(x+1)^n}{\sqrt{n}}$.

20. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n+1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt{n+1}}$.

21. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} 10^n x^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!(x+3)^n}{n^n}$.

22. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+3)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}$.

23. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!5^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{3^{n+1}}$.

24. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)x^n}{n(+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n x^n}{n \cdot 5^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{\sqrt{n+1}\, 4^n}$.

25. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^{2n}}{9^n (n+1)}$.

26. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n (n+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$.

27. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{8^n (n^2+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2n+3}$.

28. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{5^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{2^n}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{(3n+1)!}$.

29. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-4)^n}{2n-1}$.

30. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n x^n}{n!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{5^{n+1}}$.

Задание 7. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$:

1. 1) $f(x) = (1+x)\ \ln(1+x)$; 2) $f(x) = \ln(x+2)$.

2. 1) $f(x) = \sec x$; 2) $f(x) = e^{-3x}$.

3. 1) $f(x)=\sin x\cdot\cos\sqrt{x}$; 2) $f(x)=\sqrt{x+4}$.

4. 1) $f(x)=\ln\cos x$; 2) $f(x)=e^{-x^4}$.

5. 1) $f(x)=(1+x)\operatorname{arctg} x$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{4-x^2}$.

6. 1) $f(x)=\sin\dfrac{x}{4}$; 2) $f(x)=4^x$.

7. 1) $f(x)=\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$.

8. 1) $f(x)=\sec^2 x$; 2) $f(x)=\dfrac{1-e^{-x^3}}{x^3}$.

9. 1) $f(x)=e^{-x}\cos\sqrt{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

10. 1) $f(x)=\cos^2 x$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-3x)}$.

11. 1) $f(x)=\ln\left(1+x+x^2+x^3\right)$; 2) $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\cos x$.

12. 1) $f(x)=\sin^2 x$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-6x+8}$.

13. 1) $f(x)=e^x\sin x$; 2) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$.

14. 1) $f(x)=e^{-x}\sin x$; 2) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

15. 1) $f(x)=(\operatorname{arctg} x)^2$; 2) $f(x)=x\ln\left(1+x^2\right)$.

16. 1) $f(x)=e^x\cos x$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x-4}$.

17. 1) $f(x)=\arcsin x^3$; 2) $f(x)=\ln(1+5x)$.

18. 1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2}$; 2) $f(x)=x\ln\left(1+x^2\right)$.

19. 1) $f\left(x\right)=\cos^3 x$; 2) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{3+x^2}$.

20. 1) $f\left(x\right)=\sin^3 x$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

21. 1) $f\left(x\right)=\dfrac{\cos x}{1+x}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$.

22. 1) $f\left(x\right)=\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}$; 2) $f\left(x\right)=\cos\sqrt{x^3}$.

23. 1) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1+x^3}$; 2) $f\left(x\right)=\sin\dfrac{x^2}{3}$.

24. 1) $f\left(x\right)=\arcsin x^2$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^3}$.

25. 1) $f\left(x\right)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; 2) $f\left(x\right)=1-\sin^4 x$.

26. 1) $f\left(x\right)=\arcsin^2 x$; 2) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

27. 1) $f\left(x\right)=e^{\frac{x}{2}}$; 2) $f(x)=x^2\cos x$.

28. 1) $f\left(x\right)=e^{3x}\cos x$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^4}$.

29. 1) $f\left(x\right)=\cos^4 x$; 2) $f(x)=\sqrt[4]{1+x^3}$.

30. 1) $f\left(x\right)=e^x\sin x^2$; 2) $f\left(x\right)=\sqrt{x^3}\cos x$.

Задание 8. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $\left(x-x_0\right)$:

1. 1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$, $x_0=2$; 2) $f(x)=e^x$, $x_0=-2$.

2. 1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+4}$, $x_0=-1$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x_0=2$.

3. 1) $f(x)=\sqrt{x}, \quad x_0=4;$ 2) $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{8}, \quad x_0=4.$

4. 1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}, \quad x_0=2;$ 2) $f(x)=\cos x, \quad x_0=\pi/4.$

5. 1) $f(x)=\ln(x+2), \quad x_0=1;$ 2) $f(x)=\dfrac{1}{1+x} \quad x_0=2.$

6. 1) $f(x)=\dfrac{1}{x}, \quad x_0=-2;$ 2) $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}, \quad x_0=1.$

7. 1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}, \quad x_0=-4;$ 2) $f(x)=\cos^2 x, \quad x_0=\pi/4.$

8. 1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-8x+5}, \quad x_0=4;$ 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}, \quad x_0=-1.$

9. 1) $f(x)=\ln x, \quad x_0=1;$ 2) $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{4} \quad x_0=2.$

10. 1) $f(x)=\operatorname{tg} x, \quad x_0=\pi/4;$ 2) $f(x)=\ln x, \quad x_0=2.$

11. 1) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}, \quad x_0=1;$ 2) $f(x)=\sqrt{x+4}, \quad x_0=1.$

12. 1) $f(x)=\ln x, \quad x_0=4;$ 2) $f(x)=\sqrt{x}, \quad x_0=4.$

13. 1) $f(x)=x^3\ln x, \quad x_0=1;$ 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}, \quad x_0=2.$

14. 1) $f(x)=e^{3x}, \quad x_0=1;$ 2) $f(x)=\cos\dfrac{\pi x}{2}, \quad x_0=1.$

15. 1) $f(x)=\dfrac{1}{x}, \quad x_0=2;$ 2) $f(x)=\dfrac{1}{x-4}, \quad x_0=-2.$

16. 1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-6x+10}, \quad x_0=3;$ 2) $f(x)=\sqrt[3]{x}, \quad x_0=8.$

17. 1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+3} \quad x_0=-1;$ 2) $f(x)=2^x, \quad x_0=1.$

18. 1) $f(x)=\sqrt[3]{x}, \quad x_0=27;$ 2) $f(x)=\cos\dfrac{\pi x}{4} \quad x_0=2.$

19. 1) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$, $x_0=1$; 2) $f\left(x\right)=\cos x$, $x_0=\pi/2$.

20. 1) $f(x)=e^{2x}$, $x_0=1$; 2) $f\left(x\right)=\ln\left(1+x\right)$, $x_0=3$.

21. 1) $f(x)=\ln x$, $x_0=1$; 2) $f(x)=\cos x$, $x_0=-\pi/4$.

22. 1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+7}$, $x_0=-2$; 2) $f(x)=e^x$, $x_0=1$.

23. 1) $f(x)=\sin x$, $x_0=\pi/6$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x_0=-1$.

24. 1) $f(x)=\ln x$, $x_0=e$; 2) $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{6}$, $x_0=3$.

25. 1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-8x+5}$, $x_0=4$; 2) $f(x)=\cos x$, $x_0=\pi/3$.

26. 1) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=9$; 2) $f\left(x\right)=\ln\left(2+x\right)$, $x_0=1$.

27. 1) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2-2x+5}$, $x_0=1$; 2) $f(x)=\sin x$, $x_0=\pi/4$.

28. 1) $f(x)=x^3\ln x$, $x_0=1$; 2) $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$ $x_0=1$.

29. 1) $f(x)=\sin x$, $x_0=-\pi/4$; 2) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$, $x_0=3$.

30. 1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+6}$, $x_0=-2$; 2) $f\left(x\right)=\sqrt{x}$, $x_0=4$.

Задание 9. Определенный интеграл вычислить с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд и почленным интегрированием с точностью до $0{,}0001$:

1. 1) $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x}{x}dx$; 2) $\int\limits_0^{0,5}\sqrt{1+x^4}\,dx$; 3) $\int\limits_0^{0,5}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}dx$.

2. 1) $\int\limits_0^1 \sin x^2 dx$; 2) $\int\limits_0^{0,5}\sqrt{1+x^6}\,dx$; 3) $\int\limits_0^{0,5}\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

3. 1) $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$; 2) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^5}$; 3) $\int_0^{0,25} \sqrt{x}\sin^2 x\,dx$.

4. 1) $\int_0^{0,5} e^{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int_{0,5}^1 \sqrt[3]{x}\cos x\,dx$; 3) $\int_0^{0,25} \sqrt{1+x^2}\,dx$.

5. 1) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$; 2) $\int_0^{0,5} \sin\frac{x^2}{2}\,dx$; 3) $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{3}}\,dx$.

6. 1) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx$; 2) $\int_0^1 \sqrt[4]{x}\sin x\,dx$; 3) $\int_0^{0,5} \operatorname{arctg} x^2\,dx$.

7. 1) $\int_0^1 e^x\cos\sqrt{x}\,dx$; 2) $\int_0^{0,25} \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$; 3) $\int_0^{0,5} \sqrt{x}e^{-x}\,dx$.

8. 1) $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}dx$; 2) $\int_0^{0,2} \sqrt{1+x^2}\,dx$; 3) $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$.

9. 1) $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{4}}dx$; 2) $\int_0^1 x^2\sin x^3dx$; 3) $\int_0^{0,5} \frac{\sin x^2dx}{x^2}$.

10. 1) $\int_0^{0,5} \frac{\cos x}{\sqrt{1-x}}dx$; 2) $\int_{0,5}^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$; 3) $\int_0^{0,25} \sqrt[3]{1+x^3}\,dx$.

11. 1) $\int_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x^2}\,dx$; 2) $\int_0^{0,5} e^{-x^2}x^3dx$; 3) $\int_0^{0,25} x\cos\sqrt{x}\,dx$.

12. 1) $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx$; 2) $\int_0^1 xe^{-x^3}\,dx$; 3) $\int_0^{0,25} \frac{\sin 2x}{x}dx$.

13. 1) $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$; 2) $\int_{\frac{2}{5}}^1 \sin x^2dx$; 3) $\int_0^{0,25} \frac{\sin 2x}{x}dx$.

14. 1) $\int_0^1 x\sin x^3\,dx$; 2) $\int_0^1 e^{-x^3}x^3\,dx$; 3) $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^2}\,dx$.

15. 1) $\int_0^{0,5}\frac{dx}{1+x^3}$; 2) $\int_0^{0,2}\frac{e^{-2x}-1}{x}dx$; 3) $\int_0^{0,5}x\ln\left(1+x^3\right)dx$.

16. 1) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x^2\,dx$; 2) $\int_{0,5}^1\frac{\ln(1+x)}{x}dx$; 3) $\int_0^{0,5}x\ln\left(1-x^2\right)dx$.

17. 1) $\int_0^{0,5}\cos\sqrt{x^3}\,dx$; 2) $\int_{\frac{1}{4}}^1\sqrt{1+x^2}\,dx$; 3) $\int_0^{0,5}x\operatorname{arctg} x\,dx$.

18. 1) $\int_0^{0,5}\frac{1-\cos x}{x}dx$; 2) $\int_0^{0,5}x^2\ln(1+x)\,dx$; 3) $\int_0^{0,5}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$.

19. 1) $\int_0^1 x\sin\sqrt{x}\,dx$; 2) $\int_0^{0,6}e^{-x^4}dx$; 3) $\int_0^1\sqrt[3]{x^2}\cos x\,dx$.

20. 1) $\int_0^1\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}dx$; 2) $\int_0^1\frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx$; 3) $\int_0^{0,25}\sqrt{1+x^4}\,dx$.

21. 1) $\int_0^{0,25}x\sin^2 x\,dx$; 2) $\int_{0,1}^{0,2}\frac{e^{-x}}{x^3}dx$; 3) $\int_0^{0,5}x^2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$.

22. 1) $\int_0^{0,25}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$; 2) $\int_0^1\cos\frac{x^3}{3}dx$. 3) $\int_0^{0,25}\frac{dx}{\sqrt[5]{1+x^2}}$.

23. $\int_0^{1/2}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}dx$. 2) $\int_0^{1/2}\frac{\sin x^2}{x}dx$; 3) $\int_0^1\cos\sqrt[3]{x}\,dx$.

24. 1) $\int_0^{0,25}\sqrt{x}\,e^{-x}dx$; 2) $\int_0^{0,5}\cos\frac{x^2}{2}dx$; 3) $\int_0^{0,5}\frac{dx}{1+x^4}$.

25. 1) $\int_0^{0,5}\sqrt{1+x^4}\,dx$; 2) $\int_0^1\cos\frac{x^4}{4}dx$; 3) $\int_0^{0,1}\frac{e^x-1}{x}dx$.

26. 1) $\int_0^{0,5}e^{-x^3}dx$; 2) $\int_{0,5}^1\frac{(1-\cos x)\,dx}{x^2}$; 3) $\int_0^1 x\sin x^2\,dx$.

27. 1) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 2) $\int_0^{0,4} \sin x^2\,dx$; 3) $\int_0^{0,5} \operatorname{arctg} x^3\,dx$.

28. 1) $\int_0^{0,5} x^{10} \sin x\,dx$; 2) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$; 3) $\int_0^{0,2} \frac{e^{-x}dx}{x^2}$.

29. 1) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$; 2) $\int_{0,1}^{0,6} \frac{\sin x}{x}\,dx$; 3) $\int_0^{1} \sqrt{x}\cos x\,dx$.

30. 1) $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^5}\,dx$; 2) $\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$; 3) $\int_0^{0,8} \ln\left(1+x^2\right)dx$.

Задание 10. Используя разложение функции в степенной ряд, вычислить ее значения с точностью до $\varepsilon = 0,0001$.

1. 1) $\sqrt{e}$; 2) $\cos 1$; 3) $\sqrt[10]{1020}$.

2. 1) $\sin 0,5$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$; 3) $e^{-0,25}$.

3. 1) $\cos 0,3$; 2) $\cos 10^{\circ}$; 3) $e^{0,1}$.

4. 1) $e^{-1,5}$; 2) $\frac{1}{e}$; 3) $\sqrt[10]{1026}$.

5. 1) $\sqrt[3]{500}$; 2) $\arcsin 1$; 3) $e^{\frac{1}{4}}$.

6. 1) $\operatorname{arctg} 0,1$; 2) $\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[4]{620}}$.

7. 1) $\sin 18^0$; 2) $\sqrt{e}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{65}}$.

8. 1) $\sin 0,1$; 2) $\sqrt[3]{30}$; 3) $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$.

9. 1) $\arcsin 1$; 2) $e^{\frac{1}{3}}$; 3) $\sqrt[4]{80}$.

10. 1) $\sin 9^0$; 2) $e^{-\frac{2}{3}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[5]{30}}$.

11. 1) $\sin 0,4$; 2) $\sqrt[4]{e}$; 3) $\sqrt[3]{1,012}$.

12. 1) $\cos 18^0$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{132}}$; 3) $e^{-\frac{2}{3}}$.

13. 1) $\ln 0,2$; 2) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$; 3) $\sin\dfrac{\pi}{10}$.

14. 1) $\ln\dfrac{1}{9}$; 2) $\cos 0,2$; 3) $\sqrt[10]{1030}$.

15. 1) $\sqrt[10]{1028}$; 2) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

16. 1) $e^{0,75}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{72}}$; 3) $\cos 0,2$.

17. 1) $\operatorname{arctg} 0,1$; 2) $\sqrt[5]{30}$; 3) $\ln 0,3$.

18. 1) $\dfrac{1}{\sqrt{630}}$; 2) $\sqrt[4]{80}$; 3) $\dfrac{1}{e^2}$.

19. 1) $\sqrt[7]{130}$; 2) $\sqrt[3]{130}$; 3) $\operatorname{arctg} 0,3$.

20. 1) e^{-2}; 2) $\ln 1,25$; 3) $\sqrt[3]{129}$.

21. 1) $\sqrt[6]{70}$; 2) $\dfrac{1}{e}$; 3) $\operatorname{arctg} 0,2$.

22. 1) $\sin 0,3$; 2) $\ln 5$; 3) $\sqrt[5]{250}$.

23. 1) $\cos 0,1$; 2) $\operatorname{arctg} 1,2$; 3) $\sqrt[3]{8,36}$.

24. 1) $\sqrt[10]{1032}$; 2) $\operatorname{tg} 0,5$; 3) $\sqrt[3]{1,018}$.

25. 1) $\ln 27$; 2) $\operatorname{tg}\dfrac{1}{5}$; 3) $\sqrt[4]{17}$.

26. 1) $\sqrt[6]{738}$; 2) $\sin\dfrac{\pi}{5}$; 3) $e^{-0,2}$.

27. 1) $\sqrt{1,3}$; 2) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}$; 3) $\sqrt[5]{250}$.

28. 1) $\sqrt[3]{e}$; 2) $\sqrt[10]{1027}$; 3) $\lg 3$.

29. 1) $\dfrac{1}{\sqrt[7]{136}}$; 2) $\sqrt[4]{19}$; 3) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}$.

30. 1) $\ln 12$; 2) $\sqrt[3]{7}$; 3) $\cos 10^\circ$.

Задание 11. Найти шесть первых значащих члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с заданным начальным условием:

1. $y' = xy + x^2 + 2e^{2x}, \quad y(0) = 2.$

2. $y' = y^2 + 5xe^x, \quad y(0) = 1.$

3. $y' = x^2 y + y^2 - xe^{-x}, \quad y(0) = -1.$

4. $y' = ye^y + y^2 - x, \quad y(0) = -2.$

5. $y' = e^x + 2xy^2 - 1, \quad y(0) = 3.$

6. $y' = x^2 + y^2 + xe^{-2x}, \quad y(0) = 1.;$

7. $y' = 2x^2 y^2 + ye^x, \quad y(0) = 2.$

8. $y' = x^2 - y^2 - xy + e^x, \quad y(0) = 4.$

9. $y' = xy + x^2 y^2 + e^{-x}, \quad y(0) = 1.$

10. $y' = x - y^3 + xe^{-x}, \quad y(0) = 3.$

11. $y' = x^2 + y^2 + 3x + 2, \quad y(0) = 0.$

12. $y' = x^2 + 9y + e^y + 4, \quad y(0) = 0.$

13. $y' = 2y^2 + x^2 + 4x + 11, \quad y(0) = 0.$

14. $y' = 2e^y + 3y + x, \quad y(0) = 0.$

15. $y' = 7\cos x + \cos y - 3x + 7, \quad y(0) = 0.$

16. $y' = \sin x + e^x + 2xy + 2, \quad y(0) = 0.$

17. $y' = \dfrac{x^2}{2} + 5\sin y + 4, \quad y(0) = 0.$

18. $y' = 2\sin 2x + 3e^y + 1, \quad y(0) = 0.$

19. $y' = xy + x^2 + 2e^{2x}, \quad y(0) = 2.$

20. $y' = y^2 + 5xe^x, \quad y(0) = 1.$

21. $y' = x^2 y + y^2 - xe^{-x}, \quad y(0) = -1.$

22. $y' = ye^x + y^2 - x, \quad y(0) = -2.$

23. $y' = 2xy^2 + e^x - 1, \quad y(0) = 3.$

24. $y' = x^2 + y^2 + e^{-2x}, \quad y(0) = 1.$

25. $y' = 2x^2 y^2 + ye^x, \quad y(0) = 2.$

26. $y' = x^2 - y^2 - xy + e^x, \quad y(0) = 4.$

27. $y' = xy + x^2 y^2 + e^{-x}, \quad y(0) = 1.$

28. $y' = x - y^3 + xe^{-x}, \quad y(0) = 3.$

29. $y' = \dfrac{x^3}{3} + e^{2x} + 6y, \quad y(0) = 0.$

30. $y' = \sin x + 2\sin y - 6, \quad y(0) = 0.$

Задание 12. Найти решение дифференциального уравнения с помощью степенного ряда, используя метод неопределенных коэффициентов.

1. $y'' + xy' + y = x\cos x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

2. $(1 - x)y'' + xy' - y = x^2 - 2x + 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

3. $y'' - 2y' + y = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

4. $y'' - y = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

5. $y'' - xy' + xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

6. $y'' - xy' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

7. $y'' + xy' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

8. $y'' - xy' + y = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

9. $y'' - xy' + y = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

10. $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$

11. $xy''+2y'-xy=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0.$

12. $y''-xy'=-x^2, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$

13. $x^2y''+2xy'-6y=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$

14. $y''+3xy'+y=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$

15. $xy''-xy'=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$

16. $x^2y''+xy'+y=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$

17. $x^2y''-xy'-3y=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$

18. $y''-2y'+y=e^x, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$

19. $y''+xy'+y=x\cos x, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$

20. $y''-xy=0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$

21. $y''-x^2y=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$

22. $y''+2y'+xy=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0.$

23. $x^2y''-xy'+y=2x, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$

24. $y''+4y=2, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0.$

25. $y''-xy'-y=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$

26. $y''-xy'-2y=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0.$

27. $y''-y'=e^x, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$

28. $y''-xy=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0.$

29. $y''+xy=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0.$

30. $y''-2y'=e^x\left(x^2+x-2\right), \quad y(0)=2, \quad y'(0)=2.$

Задание 13. Комбинированным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ найти приближенный корень уравнения $f(x)=0$.

1. $x^3+2x-8=0.$

2. $x^3-12x+8=0.$

3. $x^3+6x-8=0.$

4. $x^3-2x-6=0.$

5. $x^3-13x-5=0.$

6. $x^3+3x+7=0.$

7. $x^3+9x-11=0.$

8. $x^3-15x+8=0.$

9. $x^3+11x-14=0.$

10. $x^3+x-4=0.$

11. $x^3+13x+2=0.$

12. $x^3+3x-8=0.$

13. $x^3-9x-2=0.$

14. $x^3+7x-4=0.$

15. $x^3-x+7=0.$

16. $x^3-4x-1=0.$

17. $x^3-8x-7=0.$

18. $x^3+9x+1=0.$

19. $x^3-3x-5=0.$

20. $x^3-8x-3=0.$

21. $x^3-5x-3=0.$

22. $x^3+8x-10=0.$

23. $x^3-6x-7=0.$

24. $x^3+4x+8=0.$

25. $x^3-4x+5=0.$

26. $x^3+5x-8=0.$

27. $x^3+10x-7=0.$

28. $x^3+12x+8=0.$

29. $x^3-2x+5=0.$

30. $x^3-13x-5=0.$

Задание 14. Методом простой итерации с точностью $\varepsilon=0.001$ найти приближенный корень уравнения $f(x)=0$.

1. $x^3+13x-3=0.$

2. $2x^3+7x-6=0.$

3. $2x^3+11x-6=0.$

4. $5x^3+19x-6=0.$

5. $2x^3+7x-11=0.$

6. $3x^3+11x-4=0.$

7. $5x^3+21x-17=0.$

8. $4x^3+13x-5=0.$

9. $x^3+9x-6=0.$

10. $7x^3+29x-8=0.$

11. $4x^3+17x-8=0.$

12. $11x^3+34x-12=0.$

13. $7x^3+24x-5=0.$

14. $4x^3+13x-5=0.$

15. $3x^3+11x-4=0.$

16. $4x^3+15x-7=0.$

17. $2x^3+7x-5=0.$

18. $5x^3+16x-7=0.$

19. $3x^3+14x-9=0.$

20. $3x^3+11x-4=0.$

21. $6x^3+23x-5=0.$

22. $5x^3+17x-3=0.$

23. $3x^3+11x-2=0.$

24. $5x^3+19x-7=0.$

25. $4x^3+15x-6=0.$

26. $3x^3+10x-8=0.$

27. $2x^3+8x-3=0.$

28. $2x^3+13x-3=0.$

29. $2x^3+9x-13=0.$

30. $x^3+7x-4=0.$

Задание 15. Составить интерполяционную формулу Лагранжа.

1.

x	–3	–2	–1	0
y	29	25	15	5

Вычислить $y(-2,5)$ и $y(-0,5)$.

2.

x	–3	–2	–1	0
y	–5	30	43	40

Вычислить $y(-2,6)$ и $y(-0,8)$.

3.

x	–2	–1	0	1
y	–10	1	10	29

Вычислить $y(2,4)$ и $y(0,5)$.

4.

x	–1	0	1	2
y	–15	–4	5	24

Вычислить $y(-0,6)$ и $y(1,8)$.

5.

x	–2	–1	0	1
y	25	15	5	1

Вычислить $y(-1,5)$ и $y(0,5)$.

6.

x	–3	–1	1	3
y	–35	1	29	70

Вычислить $y(-1,5)$ и $y(2,5)$.

7.

x	–3	–2	–1	0
y	–35	–10	1	10

Вычислить $y(2,5)$ и $y(-0,5)$.

8.

x	-2	-1	0	1
y	30	43	40	27

Вычислить $y(-1,5)$ и $y(0,6)$.

9.

x	-1	0	1	2
y	4	12	18	18

Вычислить $y(-0,5)$ и $y(1,5)$.

10.

x	-3	-1	1	3
y	18	4	18	-4

Вычислить $y(-1,5)$ и $y(2,5)$.

11.

x	-1	0	1	2
y	43	40	27	10

Вычислить $y(-0,4)$ и $y(1,6)$.

12.

x	-3	-2	-1	0
y	16	4	2	10

Вычислить $y(-2,5)$ и $y(-0,4)$.

13.

x	0	1	2	3
y	12	18	18	-4

Вычислить $y(0,6)$ и $y(2,4)$.

14.

x	0	1	2	3
y	5	1	9	35

Вычислить $y(0,5)$ и $y(2,5)$.

15.

x	-2	-1	0	1
y	2	4	12	18

Вычислить $y(-1,5)$ и $y(0,6)$.

16.

x	-3	-1	1	3
y	16	2	16	0

Вычислить $y(-2)$ и $y(1,5)$.

17.

x	-1	0	1	2
y	15	5	1	9

Вычислить $y(-0,5)$ и $y(1,5)$.

18.

x	0	1	2	3
y	40	27	10	-5

Вычислить $y(0,8)$ и $y(2,4)$.

19.

x	-2	-1	0	2
y	6	2	-2	14

Вычислить $y(-1,4)$ и $y(1,5)$.

20.

x	-3	-1	0	2
y	4	2	-2	14

Вычислить $y(-2,5)$ и $y(1,5)$.

21.

x	-2	-1	0	3
y	7	5	1	40

Вычислить $y(-1,5)$ и $y(2,3)$.

22.

x	-1	0	1	2
y	9	5	5	15

Вычислить $y(-0,6)$ и $y(1,8)$.

23.

x	-3	-1	1	2
y	2	6	2	14

Вычислить $y(-1,5)$ и $y(1,8)$.

24.

x	-3	-1	0	2
y	1	5	1	13

Вычислить $y(-2,5)$ и $y(1,6)$.

25.

x	0	1	2	3
y	5	5	15	41

Вычислить $y(0,4)$ и $y(2,5)$.

26.

x	-2	-1	1	2
y	13	9	7	21

Вычислить $y(-1,5)$ и $y(1,7)$.

27.

x	-3	-1	0	2
y	11	9	5	21

Вычислить $y(-2,5)$ и $y(1,6)$.

28.

x	-1	0	1	2
y	5	2	6	20

Вычислить $y(-0,4)$ и $y(1,5)$.

29.

x	-1	0	1	2
y	7	4	8	22

Вычислить $y(-0,5)$ и $y(1,4)$.

30.

x	-2	-1	0	1
y	5	4	5	8

Вычислить $y(-1,5)$ и $y(0,5)$.

Задание 16. Составить интерполяционные формулы Ньютона и вычислить указанные значения.

1.

x	–3	–1	1	3	5
y	16	4	0	4	16

Вычислить $y(-2,5)$ и $y(4)$.

2.

x	–6	–3	0	3	6
y	–64	56	50	80	308

Вычислить $y(-5,5)$ и $y(5)$.

3.

x	–6	–3	0	3	6
y	–179	16	31	28	169

Вычислить $y(-5,5)$ и $y(5)$.

4.

x	–7	–4	–1	2	5
y	–404	–65	40	73	196

Вычислить $y(6)$ и $y(4,5)$.

5.

x	–2	0	2	4	6
y	50	80	102	212	506

Вычислить $y(-1,5)$ и $y(5)$.

6.

x	–6	–3	0	3	6
y	–351	–12	21	72	465

Вычислить $y(\quad)$ и $y(\quad)$.

7.

x	–5	–3	–1	1	3
y	0	56	56	48	80

Вычислить $y(-4)$ и $y(2,5)$.

8.

x	-6	-4	-2	0	2
y	-351	-75	17	21	33

Вычислить $y(-5,5)$ и $y(1,5)$.

9.

x	-3	-1	1	3	5
y	2	72	86	140	330

Вычислить $y(-2,5)$ и $y(4)$.

10.

x	-5	-3	-1	1	3
y	-84	16	36	24	28

Вычислить $y(-4,5)$ и $y(4)$.

11.

x	-2	0	2	4	6
y	17	21	33	149	465

Вычислить $y(-1,5)$ и $y(5)$.

12.

x	-3	-1	1	3	5
y	56	56	48	80	200

Вычислить $y(-2,5)$ и $y(4)$.

13.

x	-2	0	2	4	6
y	17	21	33	149	465

Вычислить $y(-1)$ и $y(4,5)$.

14.

x	-5	-3	-1	1	3
y	-220	2	72	86	140

Вычислить $y(-4,5)$ и $y(2,5)$.

15.

x	-4	-2	0	2	4
y	-75	17	21	33	149

Вычислить $y(-3,5)$ и $y(3)$.

16.

x	–3	–1	1	3	5
y	31	31	23	55	175

Вычислить $y(-2,5)$ и $y(4)$.

17.

x	–6	–4	–2	0	2
y	–64	38	60	50	56

Вычислить $y(-5)$ и $y(1,5)$.

18.

x	–5	–2	1	4	7
y	–184	17	20	149	728

Вычислить $y(-3,5)$ и $y(6)$.

19.

x	–6	–3	0	3	6
y	–418	2	80	140	506

Вычислить $y(4,5)$ и $y(5)$.

20.

x	–5	–3	–1	1	3
y	–25	31	31	23	55

Вычислить $y(-4,5)$ и $y(2)$.

21.

x	–4	–2	0	2	4
y	13	35	25	31	101

Вычислить $y(-3,5)$ и $y(3)$.

22.

x	–2	0	2	4	6
y	60	50	56	126	308

Вычислить $y(-1,5)$ и $y(5)$.

23.

x	–6	–3	0	3	6
y	–89	31	25	55	283

Вычислить $y(-4,5)$ и $y(5)$.

24.

x	-6	-4	-2	0	2
y	-89	13	35	25	31

Вычислить $y(-5)$ и $y(1,5)$.

25.

x	-4	-2	0	2	4
y	-84	50	80	102	212

Вычислить $y(-3,5)$ и $y(3)$.

26.

x	-5	-2	1	4	7
y	-144	21	60	135	408

Вычислить $y(-4)$ и $y(6,5)$.

27.

x	-2	0	2	4	6
y	60	50	56	126	308

Вычислить $y(-1,5)$ и $y(5)$.

28.

x	-6	-4	-2	0	2
y	-418	-84	50	80	102

Вычислить $y(-5,5)$ и $y(1)$.

29.

x	-2	0	2	4	6
y	60	50	56	126	308

Вычислить $y(-1)$ и $y(5,5)$.

30.

x	-6	-3	0	3	6
y	-255	-12	51	96	285

Вычислить $y(-5)$ и $y(5,5)$.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. Лекции по математическому анализу, М., Высшая школа, 1999.

2. С.М. Никольский, Курс математического анализа. М., Наука , т. 1, 1990, т.2, 1991.

3. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа. М., Высшая школа, т.1, 2, 1981.

4. Я.С. Бугров, С.М. Никольский, Дифференциальное и интегральное исчисление. М., Наука, 1980.

5. Е.В. Майков, Математический анализ. М., МГУ, Введение, 1998; Предел числовой последовательности, 1999; Числовые ряды, 1999.

6. Б.П. Демидович, И.А. Марон. Основы вычислительной математики. М., Наука, 1970.

7. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов, под ред. Б.П. Демидовича, М., ГИФМЛ, 1961, 2000.

8. К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. Сборник задач по высшей математике. 1 курс, Москва, Айрис пресс, 2008.

9. К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. Сборник задач по высшей математике. 2 курс, Москва, Айрис пресс, 2008.

Дополнительная

1. Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление, т. 1, М., Наука, 1985.

2. Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление, т. 2, М., Наука, 1985.

3. В.С. Шипачев. Основы высшей математики. Москва. Высшая школа, 1986

3. Дмитрий Письменный. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. Москва, Айрис пресс, 2007.

4. Берман Г.Н. Сборник задач по математическому анализу. М., Наука, 1985.

5. И.А. Каплан, В.И. Пустынников. Практикум по высшей математике в двух томах. Том 1. Москва, ЭКСМО, 2008.

6. И.А. Каплан, В.И. Пустынников. Практикум по высшей математике в двух томах. Том 2. Москва, ЭКСМО, 2008.

7. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть I. Москва. Высшая школа, 1986.

8. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть II. Москва. Высшая школа, 1986.

Приложение 1

ПРОГРАММА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Нижняя и верхняя интегральные суммы. Определенный интеграл. Основные свойства определенного интеграла.

2. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Методы вычисления определенного интеграла: интегрирование заменой переменной и интегрирование по частям.

3. Геометрические и физические приложения определенного интеграла (площади в прямоугольных и полярных координатах, длина дуги кривой, объема тела по площадям параллельных сечений).

4. Несобственные интегралы: интегралы с бесконечными пределами и интеграл от разрывной функции. Свойства несобственных интегралов.Приближенное вычисление определенных интегралов: формула прямоугольников, формула трапеций, формула парабол (Симпсона). Формула Чебышева.

5. Определение функции нескольких переменных. Геометрическое изображение функции двух переменных. Линии и поверхности уровня. Частное и полное приращение функции. Предел функции нескольких переменных. Локальные и глобальные свойства непрерывных функций нескольких переменных.

6. Частные производные функции нескольких переменных. Геометрическая интерпретация частных производных функции двух переменных. Частные дифференциалы. Полное приращение и полный дифференциал. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях. Приложение дифференциала к оценке погрешности при вычислениях.

7. Производная сложной функции. Полная производная. Производная от функции, заданной неявно.

8. Частные производные различных порядков. Поверхности уровня. Дифференциалы различных порядков. Формула Тейлора для функции двух переменных.

9. Максимум и минимум функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия экстремумов функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных. Условный экстремум. Необходимое условие. Достаточное условие. Функция Лагранжа.

10. Производная по направлению и градиент функции нескольких переменных. Теорема о конечном приращении. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

11. Понятие числового ряда. Сходимость числового ряда. Действия над сходящимися рядами. Необходимый признак сходимости ряда. Расходимость гармонического ряда.

12. Достаточные условия сходимости рядов с положительными членами. Признаки сравнения, Даламбера, Коши (радикальный и интегральный) сходимости числовых рядов.

13. Знакопеременные ряды. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница о сходимости знакочередующихся рядов. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов. Действия над абсолютно сходящимися рядами.

14. Функциональные ряды. Мажорируемые ряды. Непрерывность суммы ряда. Интегрирование и дифференцирование рядов. Степенные ряды. Интервал сходимости. Теоремы Абеля. Действия над степенными рядами (умножение на число, сложение и вычитание, умножение рядов, дифференцирование и интегрирование).

15. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение некоторых функций в ряд Тейлора (Маклорена). Биномиальный ряд. Вычисление логарифмов, арктангенса, арксинуса с помощью степенных рядов. Приложения степенных рядов для вычисления интегралов и пределов.

16. Приближенные числа. Виды погрешностей. Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений. Интерполирование. Интерполяционная формула Лагранжа. Конечные разности. Виды таблиц конечных разностей. Интерполяционные формулы Ньютона.

Приложение 2

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ВТОРОГО СЕМЕСТРА

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
2. Определенный интеграл и некоторые основные свойства.
3. Определенный интеграл как функция верхнего предела. Теорема о среднем. Формула Ньютона-Лейбница.
4. Интегрирование заменой переменной.
5. Интегрирование по частям. Формулы Валлиса.
6. Несобственные интегралы первого рода и их сходимость.
7. Несобственные интегралы второго рода и их сходимость.
8. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых и полярных систем координатах.
9. Вычисление длины дуги кривой в декартовых и полярных систем координатах.
10. Вычисление объемов тел по площадям поперечных сечений; вычисление объемов тел вращения. Вычисление площади поверхности вращения.
11. Механические (физические) приложения определенного интеграла.
12. Приближенные вычисления определенных интегралов. Вывод формул методов прямоугольников, трапеций и парабол.
13. Функции нескольких переменных. Способы задания функций нескольких переменных. Понятие области определения.
14. Предел и непрерывность функции двух переменных.
15. Понятие приращения функции. Частные производные и частные дифференциалы.
16. Полный дифференциал функции нескольких переменных. Приложение полного дифференциала к приближенным вычислениям.
17. Неявные функции. Частные производные функций, заданных в неявной форме.
18. Производные высших порядков функций нескольких переменных.
19. Дифференциалы высших порядков от функций нескольких переменных. Символическая формула вычисления дифференциала высшего порядка.
20. Локальные экстремумы функций двух независимых переменных. Необходимые и достаточные условия локальных экстремумов.
21. Глобальные экстремумы (наибольшее и наименьшее значения) функции двух независимых переменных.
22. Метод наименьших квадратов. Линейная и квадратичная аппроксимации.
23. Понятие числового ряда и его сходимости.

24. Действия над числовыми рядами. Необходимый признак сходимости числового ряда.

25. Гармонический ряд и доказательства его расходимости. Достаточный признак расходимости рядов.

26. Достаточные признаки рядов с положительными членами (признаки сравнения; предельный признак).

27. Достаточные признаки рядов с положительными членами (признаки Даламбера; радикальный и интегральный признаки Коши).

28. Ряды с произвольными членами. Абсолютная и условная сходимость. Действия над абсолютно сходящимися рядами.

29. Функциональные ряды и их области сходимости. Правильно сходящиеся ряды и действия над ними.

30. Степенные ряды. Теоремы Абеля. Интервал и радиус сходимости.

31. Действия над степенными рядами.

32. Ряды Тейлора и Маклорена.

33. Разложение функций e^x, $\sin x$, $\cos x$ в ряд Маклорена.

34. Гиперболические функции и их разложения в степенной ряд.

35. Биномиальный ряд и его сходимость.

36. Разложение функций $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$ в степенной ряд (биномиальный ряд).

37. Некоторые применения степенных рядов: приближенные вычисления значений функций, определенных интегралов; нахождение пределов и неопределенных интегралов и т.п.

38. Приближенные числа. Виды погрешностей. Методы округления приближенных чисел.

39. Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений методом половинного деления.

40. Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений методом хорд (пропорциональных делений).

41. Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений методом касательных (Ньютона).

42. Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений комбинированным методом.

43. Интерполирование. Интерполяционная формула Лагранжа.

44. Конечные разности. Виды таблиц конечных разностей.

45. Интерполирование. Первая интерполяционная формула Ньютона.

46. Интерполирование. Вторая интерполяционная формула Ньютона.

47. Методы решения уравнений. Метод итераций.

КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК

I. ОПРЕДЕЛЕНЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Определение и свойства

Определение:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i = \int_a^b f\left(x\right)\,dx,\ \lambda = \max_{1\le i\le n}\left\{\Delta x_i\right\}.$$

Свойства:

1. Определенный интеграл от единицы равен длине интервала интегрирования:

$$\int_a^b 1\cdot dx = b - a.$$

2. Если верхний предел равен нижнему, то определенный интеграл равен нулю:

$$\int_a^a f\left(x\right)\,dx = 0.$$

3. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл изменяет знак на противоположный:

$$\int_a^b f\left(x\right)\,dx = -\int_b^a f\left(x\right)\,dx.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b k\,f\left(x\right)\,dx = k\int_a^b f\left(x\right)\,dx.$$

5. Определенный интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций:

$$\int_a^b\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]dx = \int_a^b f\left(x\right)dx + \int_a^b g\left(x\right)dx.$$

6. Определенный интеграл от разности функций равен разности интегралов от этих функций:

$$\int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$$

7. Для произвольных трех чисел $a,\ b$ и c имеет место равенство:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

8. Определенный интеграл от неотрицательной функции всегда больше или равен нулю:

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0, \text{ если } f(x) \ge 0 \text{ на } [a;\,b].$$

9. Определенный интеграл от неположительной функции всегда меньше или равен нулю:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le 0, \text{ если } f(x) \le 0 \text{ на } [a;\,b].$$

10. Если на отрезке $[a;\,b]$ $(a < b)$ имеет место неравенство $f(x) \le g(x),$ то

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

11. Имеет месторавенство: $\left(\int_a^x f(t)\,dt \right)' = f(x).$

12. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;\,b]$ и $a \le b,$ то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

13. Теорема о среднем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi), \text{ где } \xi \in [a;\,b].$$

14. Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ если } F'(x) = f(x).$$

15. Метод подстановки для определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

где $\alpha = \varphi^{-1}(a)$, $\beta = \varphi^{-1}(b)$.

16. Интегрирование по частям:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

2. Несобственные интегралы

1. Интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx, \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

называются интегралами *с бесконечными пределами* или *несобственными интегралами первого рода*. Их представим в виде

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{a} f(x)\,dx,$$

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_{a}^{\beta} f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\beta\to+\infty}\int_{c}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Если предел в правой части равенства конечное число, то соответствующий интеграл, стоящий в левой части, сходится, в остальных случаях – расходится.

2. Интегралы вида

$$\int\limits_{c}^{b} f\left(x\right) dx, \quad \int\limits_{a}^{c} f\left(x\right) dx, \quad \int\limits_{c}^{d} f\left(x\right) dx,$$

где c и d – точки разрыва первого рода для функции $f\left(x\right)$, называются интегралами *от разрывной функции* или *несобственными интегралами второго рода*.

Интегралы представим в виде

$$\int\limits_{c}^{b} f\left(x\right) dx = \lim_{\xi\to c+0}\int\limits_{\xi}^{b} f\left(x\right),$$

$$\int\limits_{a}^{c} f\left(x\right) dx = \lim_{\xi\to c-0}\int\limits_{a}^{\xi} f\left(x\right) dx,$$

$$\int\limits_{c}^{d} f\left(x\right) dx = \int\limits_{c}^{e} f\left(x\right) dx + \int\limits_{e}^{d} f\left(x\right) dx =$$

$$= \lim_{\xi\to c+0}\int\limits_{\xi}^{e} f\left(x\right) dx + \lim_{\xi\to c-0}\int\limits_{e}^{\xi} f\left(x\right) dx.$$

Если предел в правой части равенства конечное число, то соответствующий интеграл, стоящий в левой части, сходится, в остальных случаях – расходится.

Если $c_i \in \left[a; b\right]$, где $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_k$ – точки разрыва первого рода для функции $f\left(x\right)$, то интеграл вида

$$\int\limits_{a}^{b} f\left(x\right) dx$$

также называется *несобственным интегралом второго рода.* Этот интеграл можно представить в виде суммы уже известных несобственных интегралов второго рода:

$$\int\limits_{a}^{b} f\left(x\right) dx = \int\limits_{a}^{c_1} f\left(x\right) dx + \int\limits_{c_1}^{c_2} f\left(x\right) dx + \ldots + \int\limits_{c_k}^{b} f\left(x\right) dx.$$

Если все интегралы, стоящие в правой части равенства сходятся, то данный интеграл сходится; если же хотя бы один из них расходится, то данный интеграл расходится.

3. Приближенное вычисление определенных интегралов

Для приближенного вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ отрезок интегрирования $[a;\, b]$ делим на n равных частей точками $x_0 = a,$ $x_1 = x_0 + \Delta x,$ $x_2 = x_1 + \Delta x,$ ... , $x_{n-1} = x_{n-2} + \Delta x,$ $x_n = b,$ где $\Delta x = \frac{b-a}{n}.$ Значения функции $y = f(x)$ в точках разбиения x_i обозначим $y_i.$

Тогда:

1. Формулы прямоугольников:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \begin{cases} \Delta x\left(y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right), \\ \Delta x\left(y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_n\right). \end{cases}$$

Одна из них выражает приближенное значение интеграла с недостатком, а другая – с избытком. Поэтому на прак-тике в качестве приближенного значения определенного интеграла берем их среднее арифметическое значение.

Погрешность формул прямоугольников для среднего арифметического знгачений с недостатком и с избытком:

$$\varepsilon(\Delta x) \le \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot |y''|_{\max}.$$

2. Формула трапеций:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \Delta x\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + \left(y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right)\right].$$

Погрешность формулы трапеций:

$$\varepsilon(\Delta x) \le \frac{(b-a)(\Delta x)^2}{12} \cdot |y''|_{\max}.$$

3. Отрезок интегрирования $[a;\, b]$ делим на $n = 2m$ равных частей точками $x_0 = a,$ $x_1 = x_0 + \Delta x,$ $x_2 = x_1 + \Delta x,$ ... , $x_{2n} = b,$ где $\Delta x = \frac{b-a}{2m}.$ Значения функции $y = f(x)$ в точках разбиения x_i обозначим $y_i.$

Тогда формула Симпсона (парабол):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6m}\Big[\big(y_0 + y_{2m}\big) + 4\big(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}\big) +$$
$$+2\big(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}\big)\Big].$$

Погрешность формулы Симпсона (парабол):

$$\varepsilon(\Delta x) \le \frac{(b-a)(\Delta x)^4}{180}\cdot\left|y^{(4)}\right|_{\max}.$$

4.Некоторые геометрические приложения определенного интеграла

1. Площадь фигуры, ограниченной графиком кривой $y = f(x)$, где $f(x) \ge 0$, осью Ox, прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ выражается формулой:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Площадь фигуры, ограниченной графиками кривых $y = f(x)$ и $y = g(x)$, где $0 \le g(x) \le f(x)$, осью Ox, прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ выражается формулой:

$$S = \int_a^b \big[f(x) - g(x)\big]\,dx.$$

3. Если уравнение кривой задано в параметрической форме $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $t \in [\alpha; \beta]$, то площадь выражается формулой:

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt.$$

4. Пусть в полярных координатах r, φ задана кривая $r = f(\varphi)$, где $\varphi \in [\alpha; \beta]$. Тогда площадь криволинейного сектора $\{\alpha \le \varphi \le \beta;\ 0 \le r \le f(\varphi)\}$ вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[f(\varphi)\right]^2 d\varphi.$$

5. Длина дуги кривой $y=f(x),\quad x\in[a;b]$ вычисляется по формуле

$$s=\int_{a}^{b}\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx.$$

6. Если кривая задана в параметрической форме $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),$ где $t\in[\alpha;\beta],$ то дуги кривой вычисляется по формуле:

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2}\,dt.$$

7. Если кривая задана в полярных координатах $r,\ \varphi$ уравнением $r=r(\varphi),$ где $\varphi\in[\alpha;\beta],$ то длина дуги кривой вычисляется по формуле:

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left[r(\varphi)\right]^2+\left[r'(\varphi)\right]^2}\,d\varphi.$$

8. Объем тела вращения, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x),$ осью Ox и прямыми $x=a,\ x=b$ вычисляется по формуле:

$$V_x=\pi\int_{a}^{b}\left[f(x)\right]^2 dx.$$

Объем тела вращения, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x=g(y),$ осью Oy и прямыми $y=c,\ y=d$ вычисляется по формуле:

$$V_y=\pi\int_{c}^{d}\left[g(y)\right]^2 dy.$$

II. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

1.Определение функций нескольких переменных

Если при изменении изменение переменных x и y приводит к изменению переменной z, эта зависимость можно представить в виде $z = f(x, y)$. Это пример функции двух переменных. Вообще, если изменение n переменных x, y, z, ... , t приводит к изменению переменной u, то это может быть представлено выражением $u = f(x, y, ..., t)$. Это пример функции n переменных.

Переменная z называется функцией двух переменных x и y, если:

1) задано множество D пар численных значений x и y;

2) задан закон, по которому каждой паре чисел $(x; y)$ из этого множества соответствует единственное численное значение z.

При этом переменные x и y называются *аргументами* или *независимыми переменными*. Обозначения функций двух переменных аналогичны обозначениям функций одной переменной:

133

$$z = f(x, y),\ z = \varphi(x, y),\ z = z(x, y) \text{ и т.д.}$$

При нахождении частного значения z функции $z = f(x, y)$, которое она принимает при заданных численных значениях аргументов $x = x_0$, $y = y_0$, пишут $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Множество D всех пар значений аргументов данной функции двух переменных называется областью определения (или областью задания) этой функции. Области определения функции двух переменных D в плоскости Oxy соответствует некоторое множество точек.

Функция двух переменных может быть задана таблично, графически и аналитически. Аналитический способ – это универсальный способ задания функций. Область определения функции двух переменных – плоскость или ее часть. Геометрический смысл – функции двух переменных – некоторая поверхность в трехмерном пространстве.

2. Предел и непрерывность функций нескольких переменных

Пусть на плоскости даны две точки $M\left(x;y\right)$ и $M_0\left(x_0;y_0\right)$. δ-окрестностью точки $M_0\left(x_0;y_0\right)$ называется множество всех точек $M\left(x;y\right)$ плоскости, расстояние от которых до точки M_0 меньше δ, т.е. $\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}<\delta.$

Число A называется пределом функции $z=f\left(x,y\right)$ при $x\to x_0$ и $y\to y_0$ (или, что тоже самое, при $M\left(x,y\right)\to M_0\left(x_0,y_0\right)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0,$ что для всех $\left(x;y\right)$ из δ-окрестности точки $\left(x_0;y_0\right)$, причем $\left(x\neq x_0,\ y\neq y_0\right)$, выполняется неравенство $\left|f\left(x,y\right)-A\right|<\varepsilon.$

Предел функции обозначается: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f\left(x,y\right)=A.$

Предел функции двух переменных обладает свойствами, аналогичными свойствам предела функции одной переменной. Н например, если

$$\lim_{M\to M_0} f\left(M\right)=A,\quad \lim_{M\to M_0} g\left(M\right)=B,$$

где $M\to M_0\Leftrightarrow x\to x_0$ и $y\to y_0$.

Тогда имеют место:

1) $\lim\limits_{M\to M_0}\left(f\left(M\right)\pm g\left(M\right)\right)=\lim\limits_{M\to M_0} f\left(M\right)\pm\lim\limits_{M\to M_0} g\left(M\right);$

2) $\lim\limits_{M\to M_0}\left(f\left(M\right)\cdot g\left(M\right)\right)=\lim\limits_{M\to M_0} f\left(M\right)\cdot\lim\limits_{M\to M_0} g\left(M\right);$

3) $\lim\limits_{M\to M_0}\left(c\cdot f\left(M\right)\right)=c\lim\limits_{M\to M_0} f\left(M\right),\quad c=\text{const};$

4) $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{f\left(M\right)}{g\left(M\right)}=\dfrac{\lim\limits_{M\to M_0} f\left(M\right)}{\lim\limits_{M\to M_0} g\left(M\right)}\quad\left(\lim\limits_{M\to M_0} g\left(M\right)\neq 0\right).$

Функция $z=f\left(x,y\right)$ называется непрерывной в точке $M_0\left(x_0;y_0\right)$, если предел функции в этой точке существует и равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

Иначе говоря, функция $z=f(x,y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0;y_0)$, если она: 1) определена в этой точке и некоторой ее окрестности; 2) существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$; 3) выполнено равенство $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

Можно дать другое, равносильное приведенному выше, определение непрерывности функции $z=f(x,y)$ в точке. Обозначим $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$, $\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)$. Величины Δx и Δy называются приращениями аргументов x и y, а $\Delta z-$ полным приращением функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$.

Функция $z=f(x,y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0;y_0)\in D$, если выполняется равенство $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$, т.е. полное приращение функции в этой точке стремится к нулю, когда приращения ее аргументов x и y стремятся к нулю.

Функция $z=f(x,y)$ непрерывна в области, если она непрерывна во всех точках этой области. Точки, в которых непрерывность нарушается (не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке, а именно в этой точке либо функция не определена, либо не существует предела, либо значение функции не равно значению предела) называются **точками разрыва** этой функции.

3. Частные производные функций нескольких переменных

Частные приращения функции $z=f(x,y)$ по x и y соответственно обозначаются:

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y),$$

$$\Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y).$$

Отношения частных приращений на Δx Δy соответственно, обозначаются

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Эти отношения выражают средние скорости изменения функции $z = f\left(x, y\right)$ по направлениям осей Ox и Oy.

Частной производной по x от функции $z = f\left(x, y\right)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ по x к приращению Δx при стремлении Δx к нулю.

Частная производная по x от функции $z = f\left(x, y\right)$ обозначается одним из символов

$$z_x', \ f_x'\left(x, y\right), \ \frac{\partial z}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Таким образом, по определению,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x+\Delta x, y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta x}.$$

Аналогично частная производная по y от функции $z = f\left(x, y\right)$ определяется как предел отношения частного приращения функции $\Delta_y z$ по y к приращению Δy при стремлении Δy к нулю. Частная производная по y обозначается одним из символов

$$z_y', \ f_y'\left(x, y\right), \ \frac{\partial z}{\partial y}, \ \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\left(x, y+\Delta y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta y}.$$

Заметив, что $\Delta_x z$ вычисляется при неизменном y, а $\Delta_y z$ при неизменном x, мы можем определения частных производных сформулировать так:

1) *частной производной* по x от функции $z = f(x, y)$ называется производная по x, вычисленная в предположении, что $y -$ постоянная;

2) *частной производной* по y от функции $z = f(x, y)$ называется производная по y, вычисленная в предположении, что $x -$ постоянная.

Из этого определения ясно, что правила вычисления частных производных совпадают с правилами, указанными для функций одной переменной, и только требуется каждый раз помнить, по какой переменной ищется производная.

Значения частных производных функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0; y_0)$ обозначаются символами:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0, \ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}, \ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \ \ f_x'(x_0, y_0).$$

Аналогично, значения частных производных функции $z = f(x, y)$ по переменной y в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0, \ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}, \ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \ \ f_y'(x_0, y_0).$$

Частные производные функции любого числа переменных определяются аналогично. Так, если имеем функцию u четырех переменных $x, \ y, \ z, \ t$:

$$u = f(x, y, z, t),$$

то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x, y, z, t + \Delta t) - f(x, y, z, t)}{\Delta t}.$$

4. Частные дифференциалы и полный дифференциал функции. Приложения полного дифференциала

Из определения частных производных следует, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial f}{\partial x},\qquad \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\frac{\partial f}{\partial y}.$$

По свойству бесконечно малых величин находим, что

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\alpha\left(\Delta x\right),\qquad \frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\beta\left(\Delta y\right),$$

где $\alpha\left(\Delta x\right)-$ бесконечно малая величина при $\Delta x\to 0$ и $\beta\left(\Delta y\right)-$ бесконечно малая величина при $\Delta y\to 0.$ Из этих выражений получим:

$$\Delta_x z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\alpha\left(\Delta x\right)\Delta x,\qquad \Delta_y z=\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\beta\left(\Delta y\right)\Delta y.$$

Частным дифференциалом называется главная часть приращения функции и обозначается соответственно:

$$d_x z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x,\qquad d_y z=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y.$$

Так как приращение и дифференциал независимой переменной равны между собой, т.е. $\Delta x=dx,\ \Delta y=dy$, то

$$d_x z=\frac{\partial z}{\partial x}dx,\qquad d_y z=\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Сумма частных дифференциалов называется полным дифференциалом и обозначается символом

$$dz=d_x z+d_y z$$

или

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Аналогично определяются полные дифференциалы функций трех, четырех и т.д. переменных. Так, полный дифференциал функции четырех переменных $u=f\left(x,y,z,t\right)$ имеет вид

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz+\frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

Полный дифференциал является главной частью полного приращения функции. Поэтому

$$\Delta z \approx dz.$$

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ полное приращение имеет вид

$$\Delta z = f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x, y\right), \text{откуда}$$

$$f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) = f\left(x, y\right) + \Delta z,$$

$$f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) \approx f\left(x, y\right) + dz,$$

$$f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) \approx f\left(x, y\right) + \frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial y}\Delta y.$$

Эта формула применяется при приближенных вычислениях значений выражений и величина погрешночти не превышает $\sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2}$.

6. Дифференцирование неявных функций

Функция z называется неявной функцией от x и y, если она задается уравнением

$$F(x, y, z) = 0,$$

неразрешенным относительно z.

Частные производные этой функции находятся по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)}.$$

7. Производные и дифференциалы высших порядков

Частными производными второго порядка функции $z = f\left(x, y\right)$ называются частные производные от ее первых производных $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, т.е.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Частные производные второго порядка обозначаются также символами

$$f''_{xx}(x, y),\ f''_{xy}(x, y),\ f''_{yx}(x, y),\ f''_{yy}(x, y).$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные более высоких порядков. Смешанные производные, отличающиеся только порядком дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)$.

Дифференциал второго порядка определяется по формуле

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Дифференциал третьего порядка определяется по формуле

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3.$$

Дифференциал n -го порядка символически можно выразить в виде

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y^3} dy\right)^{(n)} z.$$

6. Экстремумы функции двух переменных

Функсия $z = f(x, y)$ имеет *максимум* (*минимум*) в точке $M_0(x_0; y_0)$, если значение функции в этой точке больше (меньше), чем ее значение в любой другой точке $M(x, y)$ некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, т.е. $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ (соответственно $f(x_0, y_0) > f(x, y)$) для всех точек $M(x; y)$, удовлетворяющих условию $|M_0 M| < \delta$, где $\delta -$ достаточно малое положительное число.

Точки максимума и минимума часто называют общим термином – точки экстремума.

Максимум и минимум имеют локальный характер.

Всякая дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ *может достигать экстремума только в тех точках, в которых ее частные производные первого порядка обращаются в нуль*. Такие точки называются *стационарными*. Для функции $z = f(x, y)$ стационарные точки $M_0(x_0; y_0)$ находятся путем решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Это необходимое условие экстремума. Однако не все стационарные точки являются точками экстремума. Каждая из этих точек должна быть проверена на экстремум с помощью *достаточных* условий экстремума.

Пусть $M_0(x_0; y_0) -$ стационарная точка функции $z = f(x, y)$.
Обозначим

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \; C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

и составляется дискриминант $\Delta = AC - B^2$. Тогда:

1) если $\Delta > 0,$ то функция имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремум, а именно максимум при $A < 0 \;\; (C < 0)$ и минимум при $A > 0 \;\; (C > 0)$;

2) если $\Delta > 0,$ то в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремума нет;

3) если $\Delta = 0,$ требуется дальнейшее исследование.

7. Условный кстремум функции двух переменных

Пусть требуется исследовать на экстремум функцию двух переменных $z = f(x, y)$ при условии, что ее аргументы связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0.$

Вводится функция Лагранжа:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y).$$

Далее образ действий аналогичен случаю достаточного признака существования экстремума функции двух переменных.

1) Находится стационарная точки из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0. \end{cases}$$

Пусть $M_0\left(x_0; y_0; \lambda_0\right)$ – решение этой системы.

Определяются

$$A = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{M_0}, \; B = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_{M_0}, C = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{M_0}, \; \Delta = AC - B^2.$$

Тогда, если:

1) $\Delta > 0,\quad A < 0\ \left(C < 0\right),$ то в точке $M_0\left(x_0; y_0\right)$ функция $F\left(x, y, \lambda\right)$ имеет максимум, а функция $z = f\left(x, y\right)$ имеет условный максимум;

2) $\Delta > 0,\quad A > 0\ \left(C > 0\right),$ то в точке $M_0\left(x_0; y_0\right)$ функция $F\left(x, y, \lambda\right)$ имеет минимум, а функция $z = f\left(x, y\right)$ имеет условный минимум;

3) $\Delta < 0,$ то в точке $M_0\left(x_0; y_0\right)$ функция $F\left(x, y, \lambda\right)$ не имеет экстремума, условных экстремумов нет;

4) $\Delta = 0,$ то экстремум может быть а может и не быть, для решения вопроса о существовании экстремума в точке $M_0\left(x_0; y_0\right)$ требуется применить дополнительные исследования.

8. Наибольшее и наименьшее значения функции

Пусть в замкнутой области D задана функция $z = f\left(x, y\right)$, имеющая непрерывные частные производные первого порядка. Тогда в области D функция $z = f\left(x, y\right)$ достигает своего наибольшего M и наименьшего m значений.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, нужно:

1) найти критические точки, принадлежащие этой области, и вычислить в них значения функции;

2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области;

3) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

9. Геометрические приложения функций двух переменных

Если $z = f(x, y) -$ уравнение поверхности, то уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0; y_0; z_0)$:

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_0}(x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0}(y - y_0),$$

а уравнения нормали в этой точке:

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0}} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Если $F(x, y, z) -$ уравнение поверхности, то уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0; y_0; z_0)$:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}(x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}(y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}(z - z_0) = 0,$$

а уравнения нормали в этой точке:

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}}.$$

10. Производная по направлению функции и градиент скалярного поля

Пусть задана дифференцируемая функция скалярного поля $u = F(x,\ y,\ z)$, $P(x;\ y;\ z) -$ точка этого поля и луч $\overline{s} -$ луч, выходящий из точки $P(x;\ y;\ z)$ в направлении единичного вектора

$$\overline{e}=\cos\alpha\cdot\overline{i}+\cos\beta\cdot\overline{j}+\cos\gamma\cdot\overline{k},$$

где $\alpha,\ \beta$ и γ $-$ углы вектора $\overline{e}$ с осями координат.

Пусть $P_1(x+\Delta x;\ y+\Delta y;\ z+\Delta z)$ $-$ какая-нибудь другая точка этого луча. Разность значений функции и скалярного поля в точках P и P_1 называется приращением этой функции в направлении $\overline{s}$ и обозначается через Δs. Тогда

$$\Delta_s u=F(x+\Delta x;\ y+\Delta y;\ z+\Delta z)-F(x;\ y;\ z).$$

Производной функции $u=F(x,\ y,\ z)$ по направлению $\overline{s}$ называется предел $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta_s u}{\Delta s}=\dfrac{\partial u}{\partial s}.$

Если производная функции u в точке $P(x;\ y;\ z)$ по данному направлению $\overline{s}$ положительна, $\dfrac{\partial u}{\partial s}>0,$ то функция u в этом направлении возрастает, если же $\dfrac{\partial u}{\partial s}<0,$ то функция u в направлении $\vec{s}$ убывает. Производная по направлению дает *скорость изменения функции* u в этом направлении.

Производная по направлению вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\cos\gamma.$$

Для нахождения производной от функции $u=u(x,y,z)$ в заданной точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ по направлению вектора $\overline{s}(s_x;\ s_y;\ s_z)$ используют формулу:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{M_0}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0}\cdot\cos\alpha+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0}\cdot\cos\beta+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0}\cdot\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\bar{s}\left(s_x;\, s_y;\, s_z\right)$, которые вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha=\frac{s_x}{\left|\bar{s}\right|},\ \cos\beta=\frac{s_y}{\left|\bar{s}\right|},\ \cos\gamma=\frac{s_z}{\left|\bar{s}\right|}.$$

Из формулы следует, что если вектор $\bar{e}$ совпадает с одним из ортов $\bar{i},\ \bar{j}$ или $\bar{k},$ то производная и по направлению $\bar{s}$ совпадает с соответствующей частной производной этой функции. Так, например, если $\bar{e}=\bar{i},$ то $\cos\alpha=1,\ \cos\beta=0,\ \cos\gamma=0$ и, следовательно, $\dfrac{\partial u}{\partial s}=\dfrac{\partial F}{\partial x}.$

Вектор, проекциями которого на оси координат являются значения частных производных этой функции в соответствующей точке, называется *градиентом функции* $u=u\left(x,y,z\right)$ и обозначается $\operatorname{grad} u$ или ∇u (читается «набла u»):

$$\operatorname{grad} u=\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\bar{k}.$$

При этом говорят, что в области D определено векторное поле градиентов.

Для нахождения градиента функции $u=u\left(x,y,z\right)$ в заданной точке $M_0\left(x_0;\ y_0;\ z_0\right)$ используют формулу:

$$\left(\operatorname{grad} u\right)_{M_0}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0}\cdot\bar{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0}\cdot\bar{j}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0}\cdot\bar{k}.$$

Производная в данной точке по направлению вектора $\bar{s}$ имеет наибольшее значение, если направление вектора $\bar{s}$ совпадает с направлением градиента. Это наибольшее значение производной равно $\left|\operatorname{grad} u\right|$.

Производная по направлению вектора, перпендикулярного к вектору $\operatorname{grad} u$, равна нулю.

11. Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов относится к методам приближенного восстановления функции по значениям в ряде точек. На практике часто возникает задача о наилучшем подборе эмпирических формул, позволяющих представить в аналитической форме данных статистических наблюдений, измерений и т.д.

Пусть на основании эксперимента требуется установить функциональную зависимость величины y от величины x:

$$y = f(x). \qquad (1)$$

Пусть в результате эксперимента (наблюдения) получено n значений функции y при соответствующих значениях аргумента:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Вид функции зависит из теоретических соображений, или по характеру расположения экспериментальных точек на плоскости. Так, например, если точки расположены так, что они близки к некоторой прямой линии, то искомую функцию ищем в виде $y = ax + b,$ если же эти точки расположены так, что близки к некоторой параболе, то искомую функцию ищут в виде $y = ax^2 + bx + c$ и т.д.

Отсюда следует, что искомая функция зависит от ряда параметров $a,\ b,\ c,\ \ldots$, т.е. имеет форму $y = f(a,\ b,\ c,\ \ldots).$ Требуется определить значения этих параметров так, чтобы эта функция наилучшим образом описывала рассматриваемый процесс.

Для решения этой задачи существует ряд методов. Один из методов – это метод наименьших квадратов.

Составляется разность

$$\Phi(a,\ b,\ c,\ \ldots) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f(x_i,\ a,\ b,\ c,\ \ldots) \right]^2. \qquad (2)$$

Требуется подобрать значения $a,\ b,\ \ldots$ так, чтобы эта сумма имела наименьшее значение:

$$\Phi(a,\ b,\ c,\ \ldots) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f(x_i,\ a,\ b,\ c,\ \ldots) \right]^2 = \min. \quad (3)$$

Таким образом, задача свелась к нахождению значений параметров $a,\ b,\ \ldots$ так, чтобы функция $\Phi\left(a,\ b,\ c,\ \ldots\right)$ имела минимум.

В соответствии с теорией нахождения стационарных точек, значения $a,\ b,\ c,\ \ldots$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial b} = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial c} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

или в развернутом виде

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \left[y_i - f\left(x_i,\ a,\ b,\ c,\ \ldots\right) \right] \dfrac{\partial f\left(x_i,\ a,\ b,\ c,\ \ldots\right)}{\partial a} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left[y_i - f\left(x_i,\ a,\ b,\ c,\ \ldots\right) \right] \dfrac{\partial f\left(x_i,\ a,\ b,\ c,\ \ldots\right)}{\partial b} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Здесь имеется столько уравнений, сколько и неизвестных. Из данной системы определяются $a,\ b,\ c,\ \ldots$.

I. Пусть $y = ax + b.$ В этом случае выражение (2) имеет вид

$$\Phi\left(a,\ b\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(a x_i + b\right) \right]^2. \qquad (4)$$

Это функция с двумя переменными a и b (x_i и y_i – заданные числа). Находится частные производные по a и по b:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(a x_i + b\right) \right] x_i = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(a x_i + b\right) \right] = 0.$$

Стационарные точки находим из системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}\left[y_i - \left(ax_i + b\right)\right]x_i = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial b} = -2\sum\limits_{i=1}^{n}\left[y_i - \left(ax_i + b\right)\right] = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}\left[y_i - \left(ax_i + b\right)\right]x_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left[y_i - \left(ax_i + b\right)\right] = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)a - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)b = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)a - nb = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)b = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)a + nb = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Решения этой системы:

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \cdot n - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot n - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \quad b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot n - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

III. ЧИСЛОВЫЕ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

1. Числовые ряды

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n -$ числовой ряд, $S_n -$ сумма n первых членов. Тогда если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S = \text{const},$ то ряд сходится; если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд расходится.

Необходимое условие сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Достаточный признак расходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0.$$

Признаки сходимости рядов:

1) первый признак сравнения:

для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ имеет место неравенства $u_n \leq v_n$; тогда

а) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

2) второй признак сравнения:

если для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ имеет место: $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} \neq 0$, то

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ одновременно сходятся или расходятся.

3) признак Даламбера:

для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$: $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \rho < 1, & \text{ряд сходится,} \\ \rho > 1, & \text{ряд расходится,} \\ \rho = 1, & \text{вопрос открытый.} \end{cases}$

4) радикальный признак Коши:

для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \rho < 1, & \text{ряд сходится,} \\ \rho > 1, & \text{ряд расходится,} \\ \rho = 1, & \text{вопрос открытый.} \end{cases}$

5) интегральный признак Коши:

Пусть функция $f(x)$ непрерывная неотрицательная невозрастающая функция на промежутке $[1;+\infty)$. Тогда ряд

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

и интеграл $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

2. Знакопеременные ряды

1. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots, \text{ где } u_n > 0$$

называется *знакочередующимся.* Сходимость – расходимость знакочередующихся рядов устанавливается по *признаку Лейбница*. Он формулируется следующим образом.

Если члены знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ монотонно убывают по абсолютной величине, стремясь при этом к нулю, то есть если

$$u_1 > u_2 > u_3 > \dots \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} = u_n = 0,$$

то этот ряд сходится, причем его сумма S заключена в интервале $0 < S < u_1$, то есть не превосходит первого члена ряда.

2. Пусть в ряде

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

числа $u_1,\ u_2,\ u_3,\ \dots u_n,\ \dots$ могут быть *как положительными*, так и *отрицательными*. Этот ряд называется *знакопеременным.*

Из абсолютных величин знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ составляется ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$.

Для знакопеременных рядов существует следующий *достаточный признак сходимости*: если для знакопеременного ряда сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, то данный знакопеременный ряд также сходится.

Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов. На основании достаточного признака сходимости знакопеременного ряда всякий абсолютно сходящийся ряд будет сходящимся.

Знакопеременный ряд называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов расходится.

Среди знакопеременных рядов абсолютно сходящиеся ряды занимают особое место. Это объясняется тем, что на такие ряды переносятся основные свойства конечных сумм. Особое значение имеет свойство переместительности, которым обладают только абсолютно сходящиеся ряды. Сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется от любой перестановки его членов.

В заключении следует отметить, что:

1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ сходится, то автоматически сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, причем сходимость последнего называется *абсолютной*;

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ может сходиться несмотря на то, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ расходится. Тогда сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется *условной*.

3. Функциональные ряды

Пусть дана функциональная последовательность

$$u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),\ \dots,\ u_n(x),\ \dots$$

Складывая члены этой последовательности, получим

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\dots+u_n(x)+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

Выражение (1) называется *функциональным рядом*, $u_n(x)$ называется общим членом ряда (1) и она определена на некотором множестве E.

Если для некоторого $x_0 \in E$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ сходится, то говорят, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится в точке x_0 и x_0 называется *точкой сходимости* функционального ряда.

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, сходящийся в каждой точке $x \in E$, называют сходящимся на множестве E.

Сумма $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$ первых членов ряда называется его *частичной суммой*.

Если $\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)=\text{const},$ то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется *сходящимся*. S называется суммой ряда.

Если же $\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\infty$ или $\lim_{n\to\infty}S_n(x)$ не существует, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется *расходящимся*.

В области сходимости сумму ряда можно представить в виде

$$S(x)=S_n(x)+r_n(x),$$

где

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x),$$

$$r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots+u_{n+k}(x)+\ldots$$

Ряд $u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots+u_{n+k}(x)+\ldots$ называется n-м остатком ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

Для любого x из области сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ $\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$ и $\lim_{n\to\infty}S_n(x)$ существует.

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется мажорируемым в некоторой области D, если существует сходящийся числовой ряд с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots,$$

такой, что для всех $x\in D$ справедливы неравенства $u_k(x)\le a_k\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *мажорантным* (*мажорирующим*) *рядом*.

Мажорируемый ряд является рядом равномерно сходящимся.

Равномерно сходящиеся ряды обладают некоторыми общими свойствами.

1.Если члены равномерно сходящегося ряда непрерывны на некотором отрезке, то его сумма также непрерывна на этом отрезке.

2. Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ непрерывны на отрезке $[a;\ b]$ и ряд равномерно сходится на этом отрезке, то в этом случае, когда $[\alpha;\ \beta] \subset [a;\ b]$

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} u_1(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} u_2(x)\,dx + \ldots + \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x)\,dx + \ldots,$$

где $S(x)$ − сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, составленный из функций, имеющих непрерывные производные на отрезке $[a;\ b]$ сходится на этом отрезке к сумме $S(x)$ и ряд

$$u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots$$

равномерно сходится на этом отрезке, то

$$S'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots.$$

Последние два свойства определяют условия, при которых функциональные ряды можно почленно интегрировать и дифференцировать.

Областью сходимости функционального ряда называется множество значений x, при которых ряд сходится.

Для нахождения область сходимости можно пользоваться признаками Даламбера или Коши (радикального).

1.Находится $\rho(x)$ по одной из формул (если предел существует)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \rho(x)$$

или

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \rho(x).$$

где $u_n(x)-$ общий член ряда.

2. Так как по признакам Даламбера или Коши ряд сходится при $\rho < 1$ и расходится при $\rho > 1,$ находится интервал сходимости, решая неравенство $\rho(x) < 1.$

3. Исследуется поведение ряда в граничных точках интервала сходимости.

4. Степенные ряды

Функциональный ряд вида

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

называется *степенным рядом* с центром в точке x_0. При этом действительные числа $c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots$ называются коэффициентами степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$

Рассмотрим частичные суммы ряда

$$S_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n,$$

которые являются функциями переменной x.

При каждом фиксированном x ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ является числовым, для которого определено понятие сумма ряда.

Степенной ряд *сходится* в точке x, если существует в точке x конечный предел частичных сумм

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x).$$

Множество X всех точек $x,$ в которых степенной ряд сходится, называется *областью сходимости* степенного ряда.

Область сходимости ряда является областью определения функции $S(x)$.

Всякий степенной ряд сходится при $x = x_0$.

Рассмотрим ряд с центром $x_0 = 0$.

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ сводится к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ с помощью замены $\tilde{x} = x - x_0$.

1) Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится при некотором $x = x_1 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всяком x, для которого $|x| < |x_1|$.

2) Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ расходится при некотором $x = x_2$, то он расходится при всяком x, для которого $|x| > |x_2|$.

Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ возможны только три случая:

1) ряд сходится в единственной точке $x = 0$;
2) ряд сходится при всех значениях x;
3) существует такое $R > 0,$ что ряд сходится при всех значениях $x,$ для которых $|x| < R,$ и расходится при всех $x,$ для которых $|x| > R.$

Интервал $(-R; R)$ называется *интервалом сходимости* ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$ а число $R -$ *радиусом сходимости* этого ряда.

На практике радиус сходимости степенного ряда чаще всего определяют с помощью признака сходимости Даламбера или Коши:

1) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, если применяется признак Даламбер;

2) $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$, если применяется признак Коши.

Сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ на концах интервала $(-R;R)$ исследуется дополнительно.

В пределах интервала сходимости степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ можно дифференцировать и интегрировать почленно.

Интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\left(x-x_0\right)^n$ имеет вид $\left(x_0-R;\,x_0+R\right)$.

5. Ряды Тейлора и Маклорена

Представление функции $f(x)$ в виде ряда

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

или, короче

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется разложением этой функции в ряд Тейлора.

Разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора при $x_0=0$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

называется разложением этой функции в ряд Маклорена.

Если функция $f(x)$ определена и имеет производные сколь угодно высоких порядков и существует постоянная, такая, что при любых x и n удовлетворяет неравенству $\left|f^{(n)}(x)\right| < C,$ то функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора при любом x_0.

Разложение некоторых функций в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in R;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad x \in R;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in R;$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots$$

это имеет место при любом натуральном значении α и любом значении $x,$ если число α не является натуральным, то данное равенство справедливо лишь при $-1 < x < 1;$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots, \quad x \in (-1;\, 1);$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \quad x \in (-1;\, 1);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \ldots, \quad x \in (-1;\, 1];$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots, \quad x \in (-1;\, 1).$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad x \in R;$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in R.$$

6. Приложения степенных рядов к вычислению интегралов и значений функций

При помощи степенных рядов можно вычислять значения функций, определенные интегралы.

Если требуется вычисление значения функции $f(x)$ при $x = x_0$ с точностью до $\varepsilon,$ то эту функцию следует разложить в степенной ряд, подставить значение x_0 и ограничиться суммой членов, которые больше $\varepsilon,$ т.е. отбросить члены начиная с которой выполняется условие $|u_n| < \varepsilon.$

Для вычисления определенного интеграла могут быть использованы разложения подынтегральных функций в степенные ряды, которые сходятся очень быстро.

7. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов

Метод нахождения приближенного решения дифференциального уравнения с помощью рядов пригоден для приближенного решения уравнений любого порядка.

Решение дифференциального уравнения может во многих случаях быть представлено в виде степенного ряда, сходящегося в определенном интервале.

Коэффициенты этого ряда можно найти методом, основанным на применении ряда Тейлора.

Пусть требуется найти частное решение дифференциаль-ного уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad (1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'.$$

Допустим, что решение (1) данного уравнения можно представить в виде степенного ряда:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \qquad (2)$$

Для определения коэффициентов ряда поступим следующим образом. Значения $y(x_0)=y_0$ и $y'(x_0)=y_0'$ известны из начальных условий. Для нахождения $y''(x_0)$ подставим в правую часть уравнения (1) вместо y и y' значения при $x=x_0$:

$$y''(x_0)=y_0''=f(x_0,y_0,y_0'). \qquad (3)$$

Для определения $y'''(x_0)$ дифференцируем обе части равенства (1) по x и подставляем значения $y,$ y' и y'' при $x=x_0$. Последовательно получаем

$$y'''(x)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot y'+\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot y''=\Phi(x,y,y',y''),$$

$$y'''(x)=\Phi(x,y,y',y''). \qquad (4)$$

Дифференцируя равенство (4) еще раз и подставляя значения $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, $y'''(x_0)$, $y^{(4)}(x_0)$, найдем значение $y^{(4)}(x_0)$ и т. д.

163

Найденные значения производных подставляем в ряд Тейлора, который дает решение уравнения (1).

Способ неопределенных коэффициентов особенно удобен в применении к линейным уравнениям, т. е. уравнениям вида

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_n(x)y=f(x),$$

и состоит в следующем. Если все коэффициенты $p_k(x)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ этого уравнения и свободный член $f(x)$ разлагаются в ряды по степеням $(x-x_0)$, сходящиеся в интервале $(x_0-h,\ x_0-h)$, то искомое решение $y=f(x)$ также представляется степенным рядом

$$y(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots+c_n(x-x_0)^n+\ldots,$$

сходящимся в этом же интервале. Подставляя в уравнение функцию

$y(x)$ и ее производные, приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях $(x-x_0)$. Из полученных при этом уравнений и заданных начальных условий находят коэффициенты $c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots$

8. Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений

Процесс приближенного решения алгебраического или трансцендентного уравнения состоит из двух этапов:

1)отделение корней; 2) уточнение корня до заданной точности.

Для отделения корней применяется графический или аналитический метод. При графическом методе уравнение $f(x)=0$ представляется в виде $\varphi(x)=\psi(x)$, и приближенное значение корня определяется как точка пересечения графиков функций, расположенных в левой и правой частях. При аналитическом методе отделения корней применяется известное утверждение: если функция $f(x)$, определяющая уравнение $f(x)=0$, на концах отрезка $[a;\ b]$ принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)f(b)<0$, то на этом отрезке содержится, по крайней мере, один корень уравнения. При этом имеется в виду, что если

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

то при четном значении n уравнение имеет четное число действительных корней или не имеет ни одного действительного корня, а при нечетном значении n нечетное число действительных корней.

1. **Метод хорд (пропорциональных делений).** Если известно, что корень уравнения

$$f(x)=0 \tag{1}$$

$\xi\in[a;b]$, а функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и имеет производные $f'(x)$ и $f''(x)$, которые сохраняют знак на $[a;b]$, то для уточнения ξ можно использовать метод хорд в приведенной ниже редакции.

В качестве x_0 берут тот конец отрезка $[a;b]$, где $f(x)$ и $f''(x)$ имеют противоположные знаки. Итерационный процесс построения последовательности $\{x_k\}$, сходящейся к ξ описывается формулами:

$$x_0 = a; \;\; x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(b - x_k)}{f(b) - f(x_k)},$$

если $f(a)\,f''(a) < 0.$

$$x_0 = b; \;\; x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - a)}{f(x_k) - f(a)}, \qquad (*)$$

если $f(b)\,f''(b) < 0,$ где $k = 0, 1, 2, \ldots$

В первом случае на каждом шаге находят точку пересечения x_{k+1} хорды графика $y = f(x)$, проходящей через точки $B(b; f(b))$ и $A_k(x_k; f(x_k))$ с осью Ox. На следующем шаге строят хорду, проходящую через точки $B(b; f(b))$ и $A_{k+1}(x_{k+1}; f(x_{k+1}))$ и т.д. Все значения x_k дают приближение корня ξ с недостатком. Во втором случае неподвижной точкой является $A(a; f(a))$, и значения x_k дают приближение корня ξ с избытком.

В знаменателях вышеприведенных формул стоит разность значений функции, которая вблизи корня становится малой, что ведет к потере значащих цифр. Это ограничивает точность расчетов, особенно для случая кратного корня ξ. Поэтому метод хорд используют до тех пор, пока $|x_k - x_{k-1}|$ убывает. Далее для уточнения корня можно использовать другой способ, например, метод деления отрезка пополам.

Критерий остановки расчетов: $|f(x_k)| \le \varepsilon.$ Приближенным значением корня функции $f(x)$ считают последнее вычисленное значение: $\xi \approx x_{k+1}.$

В общем случае метод хорд можно записать с помощью следующего соотношения:

$$c_k = a_k - \frac{f(a_k)(b_k - a)}{f(b_k) - f(a_k)},\ k = 0, 1,\ 2,\ \ldots$$

За начальный промежуток $[a_0; b_0]$ принимают $[a; b]$. После вычисления по формуле $(*)$ новый промежуток $[a_{k+1}; b_{k+1}]$ формируется на основании сравнения знака функции в точке c_k и в точках $a_k,\ b_k$.

2. **Метод Ньютона (касательных).** Геометрически метод Ньютона эквивалентен замене дуги кривой $y = f(x)$ касательной, проведенной в некоторой точке кривой. Выбирается тот конец, в котором $f \ \cdot f'' > 0$. Пусть это правый конец. Тогда в качестве начального приближения принимается $x_0 = b$ и в этой точке проводится касательная, уравнение которой

$$y - f(b) = f'(b)(x - b).$$

В точке пересечения касательной с осью абсцисс $y = 0,\ \ x = x_1$. Тогда из уравнения касательной:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Далее находится $f(x_1)$ и проводится касательная в точке $(x_1; f(x_1))$. Уравнение касательной имеет вид

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

В точке пересечения этой касательной с осью абсцисс $y = 0,\ \ x = x_2$. Тогда из уравнения касательной:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Продолжая аналогичные действия можно найти общую формулу метода Ньютона (касательных):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ \ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Критерий завершения итерационного процесса имеет вид

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| < \varepsilon.$$

До применения метода Ньютона, необходимо убедится, что метод Ньютона оказывается сходящимся. Достаточные условия сходимости метода Ньютона определяются следующим условием $f\left(x_0\right) f''\left(x_0\right) > 0$ и только тогда можно вычислить методом Ньютона единственный корень ξ уравнения $f\left(x\right) = 0$ с любой степенью точности.

Комбинированный метод. Методы хорд и касательных дают приближения корня с разных сторон. Поэтому их часто применяют в сочетании друг с другом, тогда уточнение корня происходит быстрее.

Пусть дано уравнение $f\left(x\right) = 0,$ корень отделен на отрезке $\left[a; b\right]$.

Пусть имеет место случай, когда $f'\left(x\right) f''\left(x\right) > 0$ (рис.1).

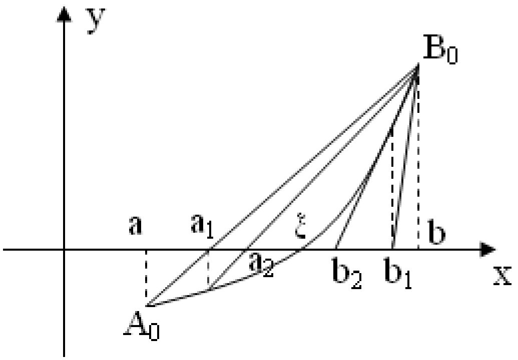

Рис. 1

В этом случае метод хорд дает приближенное значение корня с недостатком (конец b неподвижен), а метод касательных – с избытком (за начальное приближение берется точка b).

Тогда вычисления следует проводить по формулам:

$$a_1 = a - \frac{f\left(a\right)\left(b-a\right)}{f\left(b\right) - f\left(a\right)}, \quad b_1 = b - \frac{f\left(b\right)}{f'\left(b\right)}.$$

Теперь корень ξ заключен в интервале $\left[a_1; b_1\right]$. Применяя к этому отрезку комбинированный метод, получим:

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)(b_1 - a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}, \qquad b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)}.$$

и т.д.

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}, \qquad b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)}.$$

Если же $f'(x)f''(x) < 0$ (рис. 2), то, рассуждая аналогично, получим следующие формулы для уточнения корня уравнения:

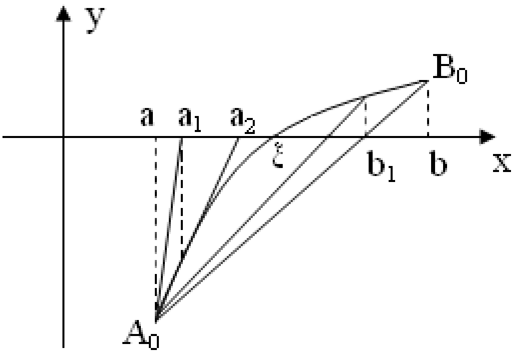

Рис. 2

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}, \quad b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}.$$

Вычислительный процесс прекращается, как только выполнится условие:

$$|b_{n+1} - a_{n+1}| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon -$ заданная точность.

9. Метод простой итерации

Одним из важнейших способов численного решения уравнений является *метод итерации*. Сущность этого метода заключается в следующем.

Пусть дано уравнение

$$f(x)=0, \qquad (1)$$

где $f(x)-$ непрерывная функция. Заменим уравнение (1) эквивалентным уравнением

$$x=\varphi(x). \qquad (2)$$

Выберем каким-либо способом грубое начальное приближение к корню и подставим его в правую часть уравнения (2). Тогда получим некоторое значение

$$x_1=\varphi(x_0). \qquad (3)$$

На следующем шаге подставим в правую часть уравнения (3) вместо x_0 полученное в предыдущем шаге значение x_1. Получим новое приближение $x_2=\varphi(x_1)$.

Повторяя итерационный процесс, получаем последовательность приближений $\{x_n\}$, где

$$x_n=\varphi(x_{n-1}),\ n=1,2,... \qquad (4)$$

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, т.е. существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi,$ то можно перейти к пределу в (4). Предполагая, что функция $\varphi(x)$ непрерывна, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\varphi\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1}\right)$ или $\xi=\varphi(\xi)$. Тогда $\xi=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ является корнем (2) и может быть вычислен с любой степенью точности.

Для практического применения метода простой итерации (4) нужно определить *достаточные условия сходимости* итерационного процесса. Процесс сходится, если на отрезке $[a;\ b]$ имеет место неравенство $|\varphi'(x)|\le q\le 1$.

10. Интерполяционная формула Лагранжа

Пусть функция $y = f(x)$ определена табл. 1.

Табл. 1

x	x_0	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n

Значения аргументов x_i, где $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ будем называть *узлами интерполяции*.

Задачей интерполяции является построение многочлена $L(x)$, значения которого в узлах интерполяции x_i равны соответствующим значениям заданной функции, т. е.

$$L(x_i) = y_i, \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Интерполяционной формулой Лагранжа называется формула, представляющая многочлен $L(x)$ в виде

$$L(x) = \frac{(x-x_1)\ (x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\ (x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} y_0 +$$

$$+\frac{(x-x_0)\ (x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)\ (x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} y_1 +$$

$$+\frac{(x-x_0)\ (x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ (x_i-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)} y_i +$$

$$+\ldots+\frac{(x-x_0)\ (x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\ (x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})} y_n.$$

При $n = 1$ получается формула линейной интерполяции:

$$L(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1.$$

При $n = 2$ получается формула квадратичной интерполяции:

$$L(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2.$$

11. Интерполяционные формулы Ньютона

Пусть значениям $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответствуют значения некоторой функции $y = f(x)$: $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$, причем $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ равноотстоят друг от друга, т.е. образуют арифметическую прогрессию:

$$x_0,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,\ \ldots,\ x_n = x_0 + nh.$$

Составим таблицу соответствия значений x_i и y_i (табл. 1):

Табл. 1

x	x_0	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_0	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Из данных точек можно составить две таблицы – горизонтальная и диагональная, которые называются таблицами конечных разностей. Диагональная таблица конечных разностей имеет форму табл. 2.

По этой таблице находятся две приближенные формулы.

Первая интерполяционная формула Ньютона:

$$f(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}).$$

Пологая $\dfrac{x-x_0}{h}=t$ первую интерполяционную формулу можно представить в виде

$$f\left(x\right)\approx y_0+\frac{t}{1!}\Delta y_0+\frac{t\left(t-1\right)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{t\left(t-1\right)\left(t-t\right)}{3!}\Delta^3 y_0+\ldots+$$

$$+\frac{t\left(t-1\right)\left(t-2\right)\left(t-3\right)\cdot\ldots\cdot\left[t-\left(n-1\right)\right]}{n!}\Delta^n y_0.$$

Табл.2

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$	…
x_0	y_0							
		Δy_0						
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$					
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$				
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$			
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$		
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$		$\Delta^6 y_0$	
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		$\Delta^5 y_1$		…
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$		$\Delta^4 y_2$		$\Delta^6 y_1$	
		Δy_4		$\Delta^3 y_3$		$\Delta^5 y_2$		…
x_5	y_5		$\Delta^2 y_4$		$\Delta^4 y_3$		$\Delta^6 y_2$	
		Δy_5		$\Delta^3 y_4$		$\Delta^5 y_3$		
x_6	y_6		$\Delta^2 y_5$		$\Delta^4 y_4$			
		Δy_6		$\Delta^3 y_5$				
x_7	y_7		$\Delta^2 y_6$					
		Δy_7						
x_8	y_8							
…	…	…	…	…	…	…	…	…

Первая интерполяционная формула Ньютона иногда называется *интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования вперед* и применяется для нахождения значения функции, которые расположены в начале таблицы.

Вторая интерполяционная формула Ньютона:

$$f\left(x\right)=y_n+\frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}\left(x-x_n\right)+\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}\left(x-x_n\right)\left(x-x_{n-1}\right)+$$

$$+\frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3}\left(x-x_n\right)\left(x-x_{n-1}\right)\left(x-x_{n-2}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{\Delta^3 y_0}{n!h^n}\left(x-x_n\right)\left(x-x_{n-1}\right)\left(x-x_{n-2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(x-x_1\right).$$

Пологая $\frac{x-x_n}{h}=t$ первую интерполяционную формулу можно представить в виде

$$f\left(x\right)\approx y_n+\frac{t}{1!}\Delta y_{n-1}+\frac{t\left(t+1\right)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+$$

$$+\frac{t\left(t+1\right)\left(t+2\right)}{3!}\Delta^3 y_{n-3}+\ldots+$$

$$+\frac{t\left(t+1\right)\left(t+2\right)\left(t+3\right)\cdot\ldots\cdot\left[t-\left(n-1\right)\right]}{n!}\Delta^n y_0.$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона иногда называется *интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования назад* и применяется для нахождения значения функции, которые расположены в конце таблицы.

Подписано в печать 20.09.2016г.
Заказ 60. Тираж 100 экз.
Отпечатано в издательско-типографическом секторе Филиала МГУ
имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе
г. Душанбе, ул. Бохтар, 35/1