ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В ГОРОДЕ ДУШАНБЕ

===

СБОРНИК

ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

ПО

МАТЕМАТИЧЕСКОМУ

АНАЛИЗУ

ЧАСТЬ I

Душанбе - 2016

УДК – 51/517
ББК 22/22.161

Ш. Нуриддинов. Сборник индивидуальных заданий по курсу «Математический анализ». Часть I. Душанбе - 2016.

Приведены варианты индивидуальных заданий по курсу «Математический анализ», а также программа соответствующей части курса, примерные вопросы к экзамену и краткий справочник.

Целью создания пособия является совершенствование самостоятельной работы студентов. Пособие предназначено для работы со студентами физико-математических, а также инженерных направлений с углубленным изучением курса математического анализа.

Задания студентам выдаются в начале семестра, студенты их выполняют по разделам и представляют преподавателю, ведущему практические занятия.

Автор заранее приносит искренюю благодарность всем тем уважаемым читателям, которые выскажут свои соображения, способствующие совершенствованию содержания данного сборника, а следовательно повышению качества подготовки специалистов.

Рецензенты: Мустафокулов Р.М., д.ф.-м.н., профессор Таджикского национального университета;
Абдукаримов М. Ф., к.ф.-м.н.

Рекомендовано к изданию Научно-методическим Советом Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе (протокол № 7 от 8 июля 2016 г.).

РАЗДЕЛ I.
ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Задание 1. Составить список элементов множеств, заданных посредством характеристического признака:

1. $X=\left\{x \mid x\in R,\ \ x^3-6x^2+11x-6=0.\right\}$

2. $X=\left\{x \mid x\in R,\ \ x^3-7x-6=0.\right\}$

3. $X=\left\{x \mid x\in R,\ \ x^3-3x^2-x+3=0.\right\}$

4. $X=\left\{x \mid x\in R,\ \ x^3+5x^2-4=0.\right\}$

5. $X=\left\{x \mid x\in R,\ \ x^3+6x^2+11x+6=0.\right\}$

6. $X=\left\{x \mid x\in R,\ \ x^3-3x^2+2=0\right\}.$

7. $X=\left\{x \mid x\in R,\ \ x^3-x^2-9x-8=0\right\}.$

8. $X=\left\{x \mid x\in R,\ \ x^4-3x^2+2=0\right\}.$

9. $X=\left\{x \mid x\in R,\ \ x^3-4x^2-x+4=0\right\}.$

10. $X=\left\{x \mid x\in R,\ \ x^3+9x+10=0\right\}.$

11. $X=\left\{x \mid x\in R,\ \ x^3+7x^2+14x+8=0\right\}.$

12. $X=\left\{x \mid x\in R,\ \ 2x^3+3x^2+1=0\right\}.$

13. $X=\left\{x \mid x\in R,\ \ x^3+x^2+2x+2=0\right\}.$

14. $X=\left\{x \mid x\in R,\ \ 3x^3+5x+8=0\right\}.$

15. $X=\left\{x \mid x\in R,\ \ x^4-5x^2+4=0\right\}.$

16. $X=\left\{x \mid x\in R,\ \ x^3+5x-6=0\right\}.$

17. $X=\left\{x \mid x\in R,\ \ x^3+3x^2-2=0\right\}.$

18. $X=\left\{x \mid x\in R,\ \ 2x^3+5x^2-3=0\right\}.$

19. $X=\{x\mid x\in Z,\quad -4{,}5<x\le 5\}$.

20. $X=\{x\mid x\in Z,\quad -1{,}5\le x<4\}$.

21. $X=\{x\mid x\in Z,\quad -3<x<7\}$.

22. $X=\{x\mid x\in N,\quad 0{,}5\le x<7\}$.

23. $X=\{x\mid x\in Z,\quad -5\le x\le 3\}$.

24. $X=\{x\mid x\in N,\quad 0<x\le 7{,}5\}$.

25. $X=\{x\mid x\in Z,\quad -1{,}5\le x\le 6\}$.

26. $X=\{x\mid x\in Z,\quad -2{,}5\le x\le 4{,}5\}$.

27. $X=\{x\mid x\in N,\quad 1{,}5<x<8\}$.

28. $X=\{x\mid x\in Z,\quad -2<x<6{,}5\}$.

29. $X=\{x\mid x\in Z,\quad -3{,}5<x\le 9\}$.

30. $X=\{x\mid x\in N,\quad 1{,}5<x<11\}$.

Задание 2. Даны множества A, B и C. Требуется найти:

1) $A\cup B\cup C$; 2) $A\cap B\cap C$; 3) $A\cup(B\cap C)$;

4) $A\cap(B\cup C)$; 5) $(A\cup B)\setminus C$; 6) $(A\cap B)\setminus C$;

7) $A\Delta B$; 8) $A\Delta C$; 9) $B\Delta C$.

1. $A=\{-3,2,5,9,12\}$, $B=\{1,5,6,7,8,9\}$, $C=\{2,3,6,8,9,11\}$.

2. $A=\{1,3,4,6,7,9\}$, $B=\{2,4,6,8,9,10\}$, $C=\{1,4,5,7,9,11\}$.

3. $A=\{2,5,6,8,10,13\}$, $B=\{1,4,5,7,8,12\}$, $C=\{3,4,6,7,9,11\}$.

4. $A=\{2,3,5,7,9,10\}$, $B=\{1,4,5,7,8,11\}$, $C=\{3,4,6,7,8,10\}$.

5. $A=\{1,3,4,7,8,10\}$, $B=\{2,4,7,9,10,11\}$, $C=\{3,5,6,8,9,11\}$.

6. $A=\{2,3,4,6,9,12\}$, $B=\{1,3,5,7,9,10\}$, $C=\{2,4,7,8,9,12\}$.

7. $A=\{3,4,6,8,10,12\}$, $B=\{1,3,5,7,8,11\}$, $C=\{2,5,6,8,9,12\}$.

8. $A=\{-2,2,3,5,8,9\}$, $B=\{2,4,5,7,8,10\}$, $C=\{3,4,6,8,10,11\}$.

9. $A=\{3,4,5,7,9,11\}$, $B=\{2,3,5,6,9,12\}$, $C=\{3,6,7,8,10,13\}$.

10. $A=\{1,4,6,7,10,11\}$, $B=\{2,4,6,8,9,12\}$, $C=\{3,4,6,8,9,11\}$.

11. $A=\{1,3,5,7,9,11\}$, $B=\{2,5,6,11,12,14\}$, $C=\{1,2,3,5,6,12\}$.

12. $A=\{2,4,6,8,9,11\}$, $B=\{1,3,4,7,8,10\}$, $C=\{3,5,7,9,10,12\}$.

13. $A=\{2,4,7,8,9,11\}$, $B=\{1,3,4,8,9,12\}$, $C=\{2,3,5,9,10,11\}$.

14. $A=\{1,3,4,6,7,10\}$, $B=\{2,3,5,7,8,10\}$, $C=\{-1,2,4,6,8,9\}$.

15. $A=\{1,2,4,6,8,11\}$, $B=\{-2,3,4,5,7,8\}$, $C=\{2,3,5,7,9,11\}$.

16. $A=\{-1,2,4,6,8,11\}$, $B=\{2,3,5,8,9\}$, $C=\{3,4,6,8,10,12\}$.

17. $A=\{1,4,5,6,7,10\}$, $B=\{2,3,6,8,10,11\}$, $C=\{1,3,5,6,9,10\}$.

18. $A=\{2,4,6,7,9,11\}$, $B=\{1,3,5,7,8,10\}$, $C=\{3,5,6,8,9,12\}$.

19. $A=\{-2,3,4,7,8,11\}$, $B=\{1,4,5,6,9,10\}$, $C=\{2,4,6,7,9,12\}$.

20. $A=\{2,4,5,7,9,11\}$, $B=\{1,4,6,8,10,11\}$, $C=\{1,3,5,6,8,10\}$.

21. $A=\{1,3,5,6,8,11\}$, $B=\{2,4,6,7,9,10\}$, $C=\{2,3,6,8,9,12\}$.

22. $A=\{3,5,7,9,10,12\}$, $B=\{1,2,5,6,8,11\}$, $C=\{2,4,6,8,9,10\}$.

23. $A=\{1,3,5,7,10,12\}$, $B=\{2,3,5,8,9,10\}$, $C=\{3,5,8,9,11,13\}$.

24. $A=\{-2,1,3,6,8,10\}$, $B=\{2,3,5,7,9,11\}$, $C=\{1,3,4,6,8,12\}$.

25. $A=\{3,4,5,7,8,11\}$, $B=\{2,4,6,8,9,13\}$, $C=\{1,2,4,5,8,10\}$.

26. $A=\{3,4,7,8,9,12\}$, $B=\{2,3,5,6,8,11\}$, $C=\{3,4,6,7,11,12\}$.

27. $A=\{1,4,5,7,9,10\}$, $B=\{2,4,6,8,9,11\}$, $C=\{2,3,5,7,8,10\}$.

28. $A=\{3,5,7,9,11,12\}$, $B=\{1,3,5,6,8,9\}$, $C=\{2,4,5,6,8,10\}$.

29. $A=\{2,3,4,6,8,9\}$, $B=\{1,2,5,6,8,11\}$, $C=\{3,4,6,7,9,10\}$.

30. $A=\{1,3,4,6,7,10\}$, $B=\{2,3,5,8,9,11\}$, $C=\{1,4,5,6,8,9\}$.

Задание 3. Найти объединение, пересечение, разность и симметрическую разность множеств A и B, и перечислите элементы множеств, если:

1. $A=\{a \mid a\in Z,\ \ a\in(-7;\ 1]\}$, $B=\{b \mid b\in Z,\ \ b\in[-4;\ 5]\}$.

2. $A=\{a \mid a\in Z,\ \ a\in[-6;\ 2)\}$, $B=\{b \mid b\in Z,\ \ b\in(-4;\ 7]\}$.

3. $A=\{a \mid a\in Z,\ \ a\in(-5;\ 8)\}$, $B=\{b \mid b\in Z,\ \ b\in(-3;\ 5]\}$.

4. $A=\{a\,|\,a\in Z,\ \ a\in(-8;\ 2]\},\ \ B=\{b\,|\,b\in Z,\ \ b\in(-1;\ 6)\}.$

5. $A=\{a\,|\,a\in Z,\ \ a\in[-7;\ 1)\},\ \ B=\{b\,|\,b\in Z,\ \ b\in[-3;\ 4]\}.$

6. $A=\{a\,|\,a\in Z,\ \ a\in(-7;\ 1]\},\ \ B=\{b\,|\,b\in Z,\ \ b\in(-3;\ 4)\}.$

7. $A=\{a\,|\,a\in Z,\ \ a\in(-3;\ 7{,}5)\}\,B=\{b\,|\,b\in Z,\ \ b\in(-2{,}5;\ 8]\}.$

8. $A=\{a\,|\,a\in Z,\ \ a\in(-4;\ 7{,}5]\}\,B=\{b\,|\,b\in Z,\ \ b\in[-3{,}5;\ 9)\}.$

9. $A=\{a\,|\,a\in Z,\ \ a\in[-1{,}5;\ 8]\},\ \ B=\{b\,|\,b\in Z,\ \ b\in(-3;\ 6{,}5]\}.$

10. $A=\{a\,|\,a\in Z,\ \ a\in(-2{,}5;\ 7{,}5)\},\ B=\{b\,|\,b\in Z,\ \ b\in[-4;\ 5)\}.$

11. $A=\{a\,|\,a\in Z,\ a\in[-1{,}5;\ 8{,}5]\},\ B=\{b\,|\,b\in Z,\ b\in[-3;\ 4{,}5]\}.$

12. $A=\{a\,|\,a\in Z,\ a\in(-2{,}5;\ 6{,}5)\},\ B=\{b\,|\,b\in Z,\ b\in[-1;\ 8{,}5]\}.$

13. $A=\{a\,|\,a\in Z,\ \ a\in(-1;\ 9)\},\ \ B=\{b\,|\,b\in Z,\ b\in(-3;\ 6)\}.$

14. $A=\{a\,|\,a\in Z,\ a\in(-1{,}5;\ 8]\},\ \ B=\{b\,|\,b\in Z,\ b\in[-2;\ 7{,}5)\}.$

15. $A=\{a\,|\,a\in Z,\ \ a\in[-3;\ 7{,}5]\},\ B=\{b\,|\,b\in Z,\ b\in(-2;\ 10]\}.$

16. $A=\{a\,|\,a\in Z,\ a\in(-1{,}5;\ 8{,}5)\},\ B=\{b\,|\,b\in Z,\ b\in[-3;\ 5{,}5)\}.$

17. $A=\{a\,|\,a\in Z,\ \ a\in[-2{,}5;\ 8]\},\ \ B=\{b\,|\,b\in Z,\ \ b\in[-5;\ 7{,}5]\}.$

18. $A=\{a\,|\,a\in Z,\ \ a\in(-2{,}5;\ 8)\},\ \ B=\{b\,|\,b\in Z,\ \ b\in[-3;\ 5]\}.$

19. $A=\{a\,|\,a\in Z,\ \ a\in(-1;\ 8)\},\ \ B=\{b\,|\,b\in Z,\ \ b\in(-2{,}5;\ 6)\}.$

20. $A=\{a\,|\,a\in Z,\ \ a\in(-4;\ 6]\},\ \ B=\{b\,|\,b\in Z,\ \ b\in[-2;\ 8{,}5)\}.$

21. $A=\{a\,|\,a\in Z,\ \ a\in(-4{,}5;\ 7]\},\ \ B=\{b\,|\,b\in Z,\ \ b\in[-2;\ 8{,}5]\}.$

22. $A=\{a\,|\,a\in Z,\ \ a\in(-3{,}5;\ 5)\},\ \ B=\{b\,|\,b\in Z,\ \ b\in[-2;\ 8)\}.$

25. $A=\{a\,|\,a\in Z,\ \ a\in[-3{,}5;\ 6]\},\ \ B=\{b\,|\,b\in Z,\ \ b\in[-1;\ 9{,}5]\}.$

25. $A=\{a\,|\,a\in Z,\ \ a\in(-2;\ 8{,}5)\},\ \ B=\{b\,|\,b\in Z,\ b\in[-2{,}5;\ 7]\}.$

25. $A=\{a \mid a\in Z,\ \ a\in(-5;\ 4{,}5)\},\ \ B=\{b \mid b\in Z,\ \ b\in(-2;\ 8)\}.$

26. $A=\{a \mid a\in Z,\ \ a\in(-3{,}5;\ 6{,}5]\},\ \ B=\{b \mid b\in Z,\ \ b\in[-4;\ 5)\}.$

27. $A=\{a \mid a\in Z,\ \ a\in(-2;\ 5{,}5]\},\ \ B=\{b \mid b\in Z,\ \ b\in[-4;\ 5]\}.$

28. $A=\{a \mid a\in Z,\ \ a\in(-3;\ 7)\},\ \ B=\{b \mid b\in Z,\ \ b\in[-4{,}5;\ 10)\}.$

29. $A=\{a \mid a\in Z,\ \ a\in[-2{,}5;\ 9]\},\ \ B=\{b \mid b\in Z,\ \ b\in[-3;\ 11]\}.$

30. $A=\{a \mid a\in Z,\ \ a\in(-4{,}5;\ 6)\},\ \ B=\{b \mid b\in Z,\ \ b\in[-1;\ 8]\}.$

Задание 4. Найти: $z_1+z_2,\ z_1-z_2,\ z_1\cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ z_1\cdot\overline{z}_1-z_2\cdot\overline{z}_2$.

1. $z_1=-5+8i,\ \ z_2=0{,}5+3i.$

2. $z_1=6+\dfrac{1}{2}i,\ \ z_2=2+\dfrac{3}{10}i.$

3. $z_1=-3-5i,\ \ z_2=3+2i.$

4. $z_1=-7+3i,\ \ z_2=5+2i.$

5. $z_1=-15+2i,\ \ z_2=4{,}1+2i.$

6. $z_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i,\ \ z_2=-3-4i.$

7. $z_1=5-4i,\ \ z_2=-3+2i.$

8. $z_1=1+4i,\ \ z_2=1-5i.$

9. $z_1=-4+8i,\ \ z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}i.$

10. $z_1=\dfrac{1}{2}+3i,\ z_2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}i.$

11. $z_1=3-4i,\ \ z_2=-4+5i.$

12. $z_1=\dfrac{1}{3}+3{,}4i,\ \ z_2=5-3i.$

13. $z_1=2+5i,\ \ z_2=3-8i.$

14. $z_1=4-5i,\ \ z_2=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i.$

15. $z_1=4-3i,\ \ z_2=2+3i.$

16. $z_1=3-4i,\ \ z_2=2+i.$

17. $z_1=\dfrac{1}{2}+i,\ \ z_2=\dfrac{1}{4}-i.$

18. $z_1=-7+2i,\ \ z_2=5-4i.$

19. $z_1=5-2i,\ \ z_2=3-i.$

20. $z_1=3+5i,\ \ z_2=2+3i.$

21. $z_1=1+i\sqrt{3},\ z_2=1-i\sqrt{3}.$

22. $z_1=1+i\sqrt{3},\ \ z_2=1+i.$

23. $z_1=4-i\sqrt{2},\ \ z_2=1+i\sqrt{2}.$

24. $z_1=4-3i,\ \ z_2=1+3i.$

25. $z_1 = \sqrt{5} - i, \;\; z_2 = \sqrt{5} - 2i.$

26. $z_1 = 3 + 2i, \;\; z_2 = 2 + 3i.$

27. $z_1 = -3\sqrt{2} + i, \;\; z_2 = 1 + 3\sqrt{2}\, i.$

28. $z_1 = 5 - 12i, \; z_2 = -3 + 4i.$

29. $z_1 = 14 - 3i, \;\; z_2 = 1 + 4i.$

30. $z_1 = -3 + 2i, \;\; z_2 = 4 - i.$

Задание 5. Найти: $z_1 \cdot z_2, \; z_1 : z_2$.

1. $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right), \;\; z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$

2. $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \;\; z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$

3. $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \;\; z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$

4. $z_1 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right), \;\; z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$

5. $z_1 = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \;\; z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$

6. $z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right), \;\; z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$

7. $z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right), \;\; z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right).$

8. $z_1 = 3\left(\cos\frac{7\pi}{18} + i\sin\frac{7\pi}{18}\right), \;\; z_2 = 2\left(\cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9}\right).$

9. $z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \;\; z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$

10. $z_1 = 6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \;\; z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$

11. $z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right), \;\; z_2 = 0{,}8\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$

12. $z_1 = \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), \quad z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$

13. $z_1 = 0,6\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right), \quad z_2 = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$

14. $z_1 = 4,2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right), \quad z_2 = 7\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$

15. $z_1 = 0,18\left(\cos\pi + i\sin\pi\right), \quad z_2 = 0,6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$

16. $z_1 = 0,8\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right), \quad z_2 = 4\left(\cos\pi + i\sin\pi\right).$

17. $z_1 = \frac{2}{7}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right), \quad z_2 = \frac{6}{7}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$

18. $z_1 = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right), \quad z_2 = 0,3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$

19. $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \quad z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$

20. $z_1 = 6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$

21. $z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right), \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$

22. $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$

23. $z_1 = 6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right), \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$

24. $z_1 = 6\left(\cos\pi + i\sin\pi\right), \quad z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$

25. $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$

26. $z_1=10\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right),\ \ z_2=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$

27. $z_1=\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right),\ \ z_2=\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$

28. $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right),\ \ z_2=3\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$

29. $z_1=3\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right),\ \ z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$

30. $z_1=6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),\ \ z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).$

Задание 6. Найти z^k.

1. $z=1+i,\ \ k=26.$

2. $z=1-i,\ \ k=15.$

3. $z=1+i\sqrt{3},\ \ k=12.$

4. $z=-1+i\sqrt{3},\ \ k=18.$

5. $z=\sqrt{3}+i,\ \ k=9.$

6. $z=\sqrt{3}-i,\ \ k=12.$

7. $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ \ k=5.$

8. $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ \ k=10.$

9. $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ k=8.$

10. $z=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i,\ \ k=12.$

11. $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ k=9.$

12. $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ k=12.$

13. $z=1-i,\ \ k=10.$

14. $z=3+i\sqrt{3},\ \ k=5.$

15. $z=1+i,\ \ k=10.$

16. $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\ \ k=6.$

17. $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \ k=10.$

18. $z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ k=12.$

19. $z=2+2\sqrt{3},\ \ k=8.$

20. $z=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i,\ \ k=10.$

21. $z=-\frac{5\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}i,\quad k=11.$ **22.** $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\quad k=11.$

23. $z=-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i,\quad k=14.$ **24.** $z=-3+3\sqrt{3}\,i,\quad k=8.$

23. $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad k=12.$ **24.** $z=-\frac{5}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}i,\quad k=9.$

25. $z=2\sqrt{3}+2i,\quad k=9.$ **26.** $z=-3\sqrt{3}+3i,\quad k=6.$

29. $z=2-2\sqrt{3}\,i,\quad k=6.$ **30.** $z=3\sqrt{3}-3\,i,\quad k=10.$

Задание 7. Найти все значения $\sqrt[k]{z}$ и построить точки, соответствующие найденным значениям корня.

1. $\sqrt[3]{1}.$ **2.** $\sqrt[3]{-1}.$ **3.** $\sqrt[3]{8}.$

4. $\sqrt[5]{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}.$ **5.** $\sqrt[4]{1}.$ **6.** $\sqrt[4]{-1}.$

7. $\sqrt[4]{-625}.$ **8.** $\sqrt[4]{i}.$ **9.** $\sqrt[6]{-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}.$

10. $\sqrt[6]{-1}.$ **11.** $\sqrt[3]{2-2i}.$ **12.** $\sqrt{-9i}.$

13. $\sqrt[6]{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$ **14.** $\sqrt[4]{1-\sqrt{3}i}.$ **15.** $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$

16. $\sqrt[4]{\sqrt{3}-i}$ **17.** $\sqrt[4]{2+2i}.$ **18.** $\sqrt[5]{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}.$

19. $\sqrt[6]{1-i\sqrt{3}}.$ **20.** $\sqrt[6]{3-3i}.$ **21.** $\sqrt[6]{1-\sqrt{3}i}.$

22. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$ **23.** $\sqrt[3]{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$ **24.** $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}.$

25. $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}.$ **26.** $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}.$ **27** $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}.$

28. $\sqrt[4]{-16}$. **29.** $\sqrt[4]{-8-\sqrt{2}\,i}$. **30.** $\sqrt[5]{32i}$.

Задание 8. Найти область определения функции $y = f(x)$:

1. 1) $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{4+x}$; 2) $y=\lg\left(\lg\left(x+1\right)\right)$;

3) $y=\lg\left(6x^2+5x-4\right)$; 4) $y=\arccos\left(\lg x\right)$.

2. 1) $y=x\sqrt{16-x^2}\left(2+x^2\right)$; 2) $y=\lg\left(x^2-9\right)+\sqrt[3]{-x+1}$;

3) $y=\ln\left(x+3\right)+\dfrac{1}{x+2}$; 4) $y=\arccos\left(2+x\right)$.

3. 1) $y=\dfrac{\left(x-5\right)\sqrt{x^2-9}}{3+x^4}$; 2) $y=\lg\left(x^2-4x+3\right)$;

3) $y=\lg\left(-x\right)+\dfrac{1}{x+5}$; 4) $y=\arccos\dfrac{x^2+1}{2}$.

4. 1) $y=\dfrac{4}{1+\sqrt{x^2-4}}$; 2) $y=\lg\dfrac{x-3}{5-x}$;

3) $y=\sqrt{9-x^2}+\lg\dfrac{x+1}{x-2}$; 4) $y=\arccos\dfrac{5x-8}{x+1}$.

5. 1) $y=\dfrac{x+1}{5+\sqrt{x^2-3x-4}}$; 2) $y=\log_{0,5}\left(x^2+6x-7\right)$;

3) $y=\lg\dfrac{x+6}{x^2-4x+3}$; 4) $y=\sqrt{3-x}+\arccos\dfrac{x-2}{3}$.

6. 1) $y=\sqrt[4]{x^2-2x-8}$; 2) $y=\sqrt{\lg\left(x+5\right)}$;

3) $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\dfrac{x-3}{x+2}$; 4) $y=\arccos\dfrac{3x+2}{5}$.

7. 1) $y=\sqrt{-x}+\sqrt{x+7}$; 2) $y=\lg\dfrac{x+6}{x-2}+\sqrt[3]{x+5}$;

3) $y=\log_4\dfrac{2x-3}{x}$; 4) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$.

8. 1) $y=\sqrt[4]{2+x-x^2}$; 2) $y=\lg\left(x^2-2x-3\right)$;

3) $y=\lg\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$; 4) $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

9. 1) $y=\sqrt{x^2+2x-3}$; 2) $y=\log_3\left(x^2-2x-8\right)$;

3) $y=\lg\dfrac{2+x}{2-x}$; 4) $y=\arccos\dfrac{3x-1}{x}$.

10. 1) $y=\sqrt{2x^2-5x-3}$; 2) $y=\log_5\left(x^2-3x-10\right)$;

3) $y=\lg\left(\lg\dfrac{10}{x^2-5x+16}\right)$; 4) $y=\arcsin\dfrac{2x+5}{x-1}$.

11. 1) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$; 2) $y=\lg\left(12-x-x^2\right)$;

3) $y=\lg\dfrac{x+6}{x^2-4x+3}$; 4) $y=\sqrt[5]{x^2}+\arcsin\dfrac{x-5}{x}$.

12. 1) $y=\sqrt{3+2x-x^2}$; 2) $y=\log_4\left(x^2+4x-5\right)$;

3) $y=\lg\dfrac{x-5}{x^2-10x+24}$; 4) $y=\arcsin\dfrac{3x+1}{x-2}$.

13. 1) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$; 2) $y=\log_2\left(x^3-6x^2+5x\right)$;

3) $y=\lg\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}\right)$; 4) $y=2\arcsin\dfrac{x-1}{x+2}$.

14. 1) $y=\sqrt{2x^2-9x+4}$; 2) $y=\lg\left(2x^2+3x-5\right)$;

3) $y=\log_{0,5}\left(\log_3 x\right)$; 4) $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x+1}{9}\right)$.

15. 1) $y=\sqrt{-x}+\sqrt{4+x}$; 2) $y=\lg\left(2-x-x^2\right)$;

3) $y=\dfrac{\log_2 x}{\sqrt[3]{x-3}}$; 4) $y=\arcsin\dfrac{x}{6}+\arcsin\dfrac{6}{x}$.

16. 1) $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}$; 2) $y=\ln\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}\right)$;

3) $y=\log_3\left(2-x-x^2\right)$; 4) $y=\arcsin\left(2+3^x\right)$.

17. 1) $y=\sqrt{4-x^2}+\sqrt[5]{x^3-8}$; 2) $y=\log_3\left(\sqrt{x}+\sqrt{8-x}\right)$;

3) $y=\log_5\dfrac{x+1}{x-4}$; 4) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$.

18. 1) $y=\sqrt{4x-x^2}$; 2) $y=\lg\left(6x^2+5x-4\right)$;

3) $y=\log_5\dfrac{x+1}{x-6}$; 4) $y=\arcsin\left(x-4\right)$.

19. 1) $y=\sqrt{2+x-x^2}$; 2) $y=\log_5\left(\log_3\dfrac{3}{x^2-5x}\right)$;

3) $y=\lg\dfrac{x}{x+4}$; 4) $y=\arcsin\sqrt{2x}$.

20. 1) $y=\sqrt{16-x^2}$; 2) $y=\lg\left(-3x^2+5x-2\right)$;

3) $y=\dfrac{x}{\lg\left(1-x\right)}$; 4) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$.

21. 1) $y=\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}$; 2) $y=\ln\left(x+3\right)+\dfrac{1}{x+2}$;

3) $y=\ln\dfrac{x^2+2x}{15}$; 4) $y=5\arccos\dfrac{2x-5}{2}$.

22. 1) $y=\sqrt[3]{x+5}-\sqrt[4]{x^2-4}$; 2) $y=\ln\left(-x\right)+\dfrac{1}{x+5}$;

3) $y=\ln\dfrac{x^2+2x}{15}$; 4) $y=\arccos\dfrac{2x-5}{2}$.

23. 1) $y=\sqrt{x^2+2x-8}+\sqrt[3]{7-x}$; 2) $y=\ln\left(2x^2+3x-5\right)$;

3) $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}\cdot\lg\left(4-x\right)$; 4) $y=\log_3\left(2-x-x^2\right)$.

24. 1) $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{10-3x}$; 2) $y=\lg\left(2-x-x^2\right)$;

3) $y=\lg\left(x^2-4x+2\right)$;

4) $y=\arcsin\dfrac{x+2}{x-1}+\sqrt[3]{x+3}$.

25. 1) $y=\sqrt{x-7}+\sqrt[4]{10-x}$;

2) $y=\log_2\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}$;

3) $y=\log_6\dfrac{x+1}{x-2}$;

4) $y=2\arcsin\dfrac{3-x}{x+5}+\sqrt[3]{x+1}$.

26. 1) $y=\sqrt[4]{x^2-7x+10}$;

2) $y=\log_3\dfrac{2x+1}{x}$;

3) $y=\log_3\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}\right)$;

4) $y=2+\arccos\dfrac{x+5}{x}$.

27. 1) $y=\sqrt[4]{x+2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$;

2) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$;

3) $y=\log_{(x-8)}(x-1)$;

4) $y=\arcsin\dfrac{x}{x+5}+\sqrt{x^4+4}$.

28. 1) $y=\sqrt{x+5}-\sqrt{-8-x}$;

2) $y=\lg\dfrac{x}{x+4}$;

3) $y=\log_2(4-x)+2\log_x 6$;

4) $y=\sqrt[5]{x^3}+\arccos\dfrac{2x-1}{x}$.

29. 1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x}}$;

2) $y=\log_3\left(\sqrt{x}+\sqrt{8-x}\right)$;

3) $y=\sqrt{(13-x)\log_{15}(7x-6)}$;

4) $y=\log_2\left(\arccos(x-1)\right)$.

30. 1) $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$;

2) $y=\log_5\dfrac{5}{x^2-5x}$;

3) $y=\sqrt[4]{\log_{0,5}x}$;

4) $y=\log_2(\arcsin x)$.

Задание 9. Найти функцию, обратную $y=f(x)$:

1. 1) $y=\arcsin\left(x^2+1\right)$;

2) $y=\sqrt[3]{x^2+1}$.

2. 1) $y=\log_3\left(x^3+1\right)$;

2) $y=\arcsin(\sin x)$.

3. 1) $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; 2) $y=\dfrac{1+x}{1-x}$.

4. 1) $y=\dfrac{1-x}{2+x}$; 2) $y=\dfrac{8+x^3}{8-x^3}$.

5. 1) $y=\lg(3x-4)$; 2) $y=\sqrt{x-2}$.

6. 1) $y=\cos\left(x^3+3\right)$; 2) $y=\sqrt[3]{x^5-27}$.

7. 1) $y=\operatorname{tg}\left(x^3-1\right)$; 2) $y=\log_2(3x+1)$.

8. 1) $y=\sin(2x-3)$; 2) $y=2^{\frac{x}{2}}+1$.

9. 1) $y=\cos(3x-2)$; 2) $y=x^2+4$.

10. 1) $y=2\arcsin\left(x^5+1\right)$; 2) $y=\operatorname{tg}(4x-7)$.

11. 1) $y=e^{x^3}+2$; 2) $y=\arccos(2x-1)$.

12. 1) $y=\dfrac{e^x+1}{e^x}$; 2) $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}+1$.

13. 1) $y=\arccos(3x-5)$; 2) $y=\cos(1-2x)$.

14. 1) $y=\dfrac{2^x-4}{2^x}$; 2) $y=\dfrac{10}{1-x}$.

15. 1) $y=\arccos\left(x^3+3\right)$. 2) $y=x^2-2x$.

16. 1) $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$. 2) $y=\lg\dfrac{x+2}{x-1}$.

17. 1) $y=\sqrt[5]{x^3+1}$. 2) $y=10^{x+1}$.

18. 1) $y=\arcsin(2x-7)$. 2) $y=\lg\dfrac{10}{x+2}$.

19. 1) $y=5^x-3$; 2) $y=\log_x 5$.

20. 1) $y=\cos(2x-7)$; 2) $y=2\sin 3x$.

21. 1) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{3}$; 2) $y = \dfrac{2^x}{1+2^x}$.

22. $y = \lg(x^3 - 4)$. 2) $y = \sqrt[3]{x^3 - 27}$.

23. 1) $y = \lg\left(2x+1\right)$; 2) $y = 4\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

24. 1) $y = \dfrac{4-x}{4+x}$; 2) $y = 2\arcsin\dfrac{x}{2}$.

25. 1) $y = 1 + \arcsin 2x$; 2) $y = 3 - \log_2\left(x+1\right)$.

26. 1) $y = \lg\dfrac{x}{x+1}$; 2) $y = 1 + 2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$.

27. 1) $y = \sqrt[5]{2x-3}$; 2) $y = \arcsin\dfrac{1-x}{4}$.

28. 1) $y = \lg\dfrac{x+1}{x}$; 2) $y = \dfrac{1}{2}\log_2\left(x+1\right)$.

29. 1) $y = 2\sin\left(2x+5\right)$; 2) $y = \log_2\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

30. 1) $y = \dfrac{x^2+3x}{x^2-5x}$; 2) $y = 1 + \dfrac{1}{x}$.

Задание 10. Исследовать функцию $y = f\left(x\right)$ на четность, нечетность, ни четность и ни нечетность:

1. 1) $y = x^4 - 2x^2 + 11$; 2) $y = \dfrac{x}{a^x - 1}$.

2. 1) $y = x - x^2$; 2) $y = \sin x - \cos x$.

3. 1) $y = 3^x + 1$; 2) $y = x^4 \sin 7x$.

4. 1) $y = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$; 2) $y = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$.

5. 1) $y = \dfrac{5^x + 5^{-x}}{2}$; 2) $y = \dfrac{16^x - 1}{4^x}$.

6. 1) $y = 2^{x-x^4}$; 2) $y = \left|x\right| + 2$.

7. 1) $y=\lg(\cos x)$; 2) $y=|x+2|$.

9. 1) $y=3|x|-3\sqrt[3]{x^2}$; 2) $y=x^4-3x^2+x$.

8. 1) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^3-5}$; 2) $y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$, $(a>0)$.

9. 1) $y=2^{x-1}+3$; 2) $y=\lg\dfrac{3-x}{3+x}$.

11. 1) $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$; 2) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

12. 1) $y=x^4+2$; 2) $y=\sqrt{x^2+5}$.

13. 1) $y=\sin^2 x-\cos^2 x$. 2) $y=2^{-x^2}$.

14. 1) $y=\cos x+\sin^4 x$; 2) $y=2^{2n-1}-3$.

15. 1) $y=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; 2) $y=\lg\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)$.

16. 1) $y=x^4\sqrt[3]{x}+2\sin x$; 2) $y=x^{-6}+x^{-4}+5$.

17. 1) $y=\lg\dfrac{x+2}{x-2}$; 2) $y=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{1+x^2}$.

18. 1) $y=5e^{x^2}-|x|$; 2) $y=4^x-3^{-x}$.

19. 1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; 2) $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

20. 1) $y=5x^3+x^5$; 2) $y=\sqrt[3]{x}+x$.

21. 1) $y=x^2+3x-1$; 2) $y=\left(x^2+x\right)^2$.

22. 1) $y=\sqrt{x^2-5}$; 2) $y=x^4+\sqrt{x^4+3}$.

23. 1) $y=\dfrac{3^x-3^{-x}}{2}$; 2) $y=\dfrac{4x}{x^2+4}$.

24. 1) $y=2x^2-3x$; 2) $y=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x}$.

25. 1) $y=\sin^2 x+\cos^5 x;$ 2) $y=3x+2\sin^3 x.$

26. 1) $y=\dfrac{x+1}{x^2-3};$ 2) $y=\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{x^3+x}}.$

27. 1) $y=\dfrac{x^5}{x^2-4};$ 2) $y=\dfrac{x^3}{x^2+12}.$

28. 1) $y=3\sqrt[3]{x}+x;$ 2) $y=x-\sin x.$

29. 1) $y=2x-\dfrac{\cos x}{x};$ 2) $y=\dfrac{4x}{x^2+4}.$

30. 1) $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3};$ 2) $y=\dfrac{e^{-x^2}}{x}.$

Задание 11. Построить график функции $y=f\left(x\right)$.

1. 1) $y=\sqrt{x+2};$ 2) $y=\left|\left|x-2\right|-3\right|.$

2. 1) $y=\sqrt{9-x^2}+3;$ 2) $y=x^3-3x^2+3x-1.$

3. 1) $y=\ y=\sqrt{5x-x^2};$ 2) $y=\ y=2^{x-1}.$

4. 1) $y=\ y=2+(x-1)^2;$ 2) $y=\ y=x^2-2^x.$

5. 1) $y=\ y=2x^2-x^4;$ 2) $y=\ y=x^2+2^x.$

6. 1) $y=\ y=x^2-3x+2;$ 2) $y=\ y=1-\sqrt{|\,x\,|}.$

7. 1) $y=\ y=\dfrac{1}{x-1};$ 2) $y=\ y=2x^{\frac{3}{2}}.$

8. 1) $y=\dfrac{x-2}{x+2};$ 2) $y=2^{-x^2}+4.$

9. 1) $y=\dfrac{2x-3}{2x+2};$ 2) $y=\left(0,5\right)^{|x|}+1.$

10. 1) $y=x+x^{-1};$ 2) $y=\ y=1-3^{x-3}.$

11. 1) $y=x^2\left(x+1\right)^{-1};$ 2) $y=-2^x+3.$

12. 1) $y = 5x^{-2} + 1$; 2) $y =$ $y = 2^{-x^2}$.

13. 1) $y = 5x^{-5}$; 2) $y =$ $y = 2^{x+3}$.

14. 1) $y = 10 : \left(1 + x^2\right)$; 2) $y = 3^{x-1} + 4$.

15. 1) $y = 2x : \left(x^2 + 1\right)$; 2) $y =$ $y = \pm x\sqrt{x}$.

16. 1) $y = x + x^{-2}$; 2) $y =$ $y = \sqrt[3]{x^2}$.

17. 1) $y = x^2 + x^{-1}$; 2) $y =$ $y = \sqrt[3]{x}$.

18. 1) $y = 2x^{-1} + 3$; 2) $y =$ $y = \left|x^2 + 2x - 1\right|$.

19. 1) $y = \sqrt{x-3} + 4$; 2) $y =$ $y = \left|x^2 - 4x + 6\right|$.

20. 1) $y = 2^{\frac{x}{2}} + 3$; 2) $y = \sqrt{x-2} + 1$.

21. 1) $y = \sqrt{9 - x^2}$; 2) $y = 2\left|x+1\right| + \left|x-2\right|$.

22. 1) $y = \sqrt{4 - x^2}$; 2) $y = \left(4x+5\right) : \left(2x-1\right)$.

23. 1) $y = x^3 - 2$; 2) $y = \left|2x^2 - 3x + 1\right|^{-1}$.

24. 1) $y = \left(1 + x^2\right)^{-1}$; 2) $y = \left|x^2 + 4x - 5\right|$.

24. 1) $y = \dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$; 2) $y = 4 - x^3$;

26. 1) $y = \left(2x-1\right) : \left(1-x\right)$; 2) $y = \left|x^2 - 4x + 3\right|$.

27. 1) $y = 2x : \left(1-x\right)$; 2) $y = \left|x-1\right| - 2\left|x+1\right| + 3\left|x+2\right|$.

28. 1) $y =$ $y = 2x^2 - 8x + 3$; 2) $y = \left|x-2\right| + \left|x+3\right|, \quad x \in \left[-5;\ 5\right]$.

29. 1) $y = \left(2x-1\right) : \left(1-x\right)$; 2) $y = \left|x-1\right| + \left|x+1\right|$.

30. 1) $y =$ $y = 2^{x+1} + 1$; 2) $y =$ $y = \left(x-1\right)^3 + 7$.

Задание 12. Дана последовательность $\{x_n\}$; 1) найти 2-й, 100-й, $(n+1)$-й члены последовательности; 2) проверить, является ли последовательность монотонной; 3) пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, определив для $\varepsilon > 0$ натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для любого натурального $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

1. $x_n = \dfrac{2n^2+1}{3n^2-1}, \quad a = \dfrac{2}{3}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

2. $x_n = \dfrac{n^2}{2n^2+3}, \quad a = \dfrac{1}{2}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

3. $x_n = 1 + (0{,}1)^n, \quad a = 1, \quad \varepsilon = 10^{-4}.$

4. $x_n = \dfrac{3n-1}{5n+1}, \quad a = \dfrac{3}{5}, \quad \varepsilon = 0{,}4.$

5. $x_n = \dfrac{2n+3}{3n}, \quad a = \dfrac{2}{3}, \quad \varepsilon = 0{,}005.$

6. $x_n = \dfrac{3n^2-1}{4n^2+1}, \quad a = \dfrac{3}{4}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

7. $x_n = 1 + (0{,}2)^n, \quad a = 1, \quad \varepsilon = 10^{-5}.$

8. $x_n = \dfrac{2\cdot 10^n - 1}{10^n}, \quad a = 2, \quad \varepsilon = 10^{-4}.$

9. $x_n = 1 + (0{,}3)^n, \quad a = 1, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

10. $x_n = \dfrac{2n^2-5}{n^2+7}, \quad a = 2, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

11. $x_n = \dfrac{n^2+2}{3n^2-1}, \quad a = \dfrac{1}{3}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

12. $x_n = \dfrac{2n^2-7}{3n^2-1}, \quad a = \dfrac{2}{3}, \quad \varepsilon = 0{,}005.$

13. $x_n = \dfrac{3n^2 - 1}{4n^2 + 1}, \quad a = \dfrac{3}{4}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

14. $x_n = \dfrac{3n^2 - 1}{4n^2 + 1}, \quad a = \dfrac{3}{4}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

15. $x_n = \dfrac{3n^2 - 1}{4n^2 + 1}, \quad a = \dfrac{3}{4}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

16. $x_n = \dfrac{3n^2 - 1}{4n^2 + 1}, \quad a = \dfrac{3}{4}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

17. $x_n = \dfrac{3n^2 - 1}{4n^2 + 1}, \quad a = \dfrac{3}{4}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

18. $x_n = \dfrac{3n^2 - 1}{4n^2 + 1}, \quad a = \dfrac{3}{4}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

19. $x_n = \dfrac{3n^2 - 1}{4n^2 + 1}, \quad a = \dfrac{3}{4}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

20. $x_n = \dfrac{3n^2 - 1}{4n^2 + 1}, \quad a = \dfrac{3}{4}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

21. $x_n = \dfrac{3n^2 - 1}{4n^2 + 1}, \quad a = \dfrac{3}{4}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

22. $x_n = \dfrac{3n^2 - 1}{4n^2 + 1}, \quad a = \dfrac{3}{4}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

23. $x_n = \dfrac{3n^2 - 1}{4n^2 + 1}, \quad a = \dfrac{3}{4}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

24. $x_n = \dfrac{3n^2 - 1}{4n^2 + 1}, \quad a = \dfrac{3}{4}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

25. $x_n = \dfrac{3n^2 - 1}{4n^2 + 1}, \quad a = \dfrac{3}{4}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

26. $x_n = \dfrac{3n^2 - 1}{4n^2 + 1}, \quad a = \dfrac{3}{4}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

27. $x_n = \dfrac{3n^2-1}{4n^2+1}, \quad a = \dfrac{3}{4}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

28. $x_n = \dfrac{3n^2-1}{4n^2+1}, \quad a = \dfrac{3}{4}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

29. $x_n = \dfrac{3n^2-1}{4n^2+1}, \quad a = \dfrac{3}{4}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

30. $x_n = \dfrac{3n^2-1}{4n^2+1}, \quad a = \dfrac{3}{4}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

Задание 13. Используя определение предела, доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a .

1. $x_n = \dfrac{3n+2}{n+1}; \quad a = 3.$

2. $x_n = \dfrac{4n-1}{5n+2}; \quad a = \dfrac{4}{5}.$

3. $x_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2}; \quad a = 2.$

4. $x_n = \dfrac{3n+1}{2n-1}; \quad a = \dfrac{3}{2}.$

5. $x_n = \dfrac{2n-1}{2-3n}; \quad a = -\dfrac{2}{3}.$

6. $x_n = \dfrac{3n-1}{5n+1}; \quad a = \dfrac{3}{5}.$

7. $x_n = \dfrac{n+3}{2n+1}; \quad a = \dfrac{1}{2}.$

8. $x_n = \dfrac{2n}{n+1}; \quad a = 2.$

9. $x_n = \dfrac{2n}{2n-1}; \quad a = 1.$

10. $x_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2+3}; \quad a = \dfrac{1}{2}.$

11. $x_n = \dfrac{4n-3}{2n+1}; \quad a = 2.$

12. $x_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}; \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

13. $x_n = \dfrac{16n-1}{8n+5}; \quad a = 2.$

14. $x_n = \dfrac{3n+5}{n-11}; \quad a = 3.$

15. $x_n = \dfrac{7n+8}{4n+5}; \quad a = \dfrac{7}{4}.$

16. $x_n = \dfrac{2n^2+5}{n^2-3}; \quad a = 2.$

17. $x_n = \dfrac{5n+1}{3n-7}; \quad a = \dfrac{5}{3}.$

18. $x_n = \dfrac{3n^2+2}{n^2-5}; \quad a = 3.$

19. $x_n = \dfrac{n}{2n+1};\quad a = \dfrac{1}{2}.$

20. $x_n = \dfrac{n^2-1}{3n^2+2};\quad a = \dfrac{1}{3}.$

21. $x_n = \dfrac{2n-1}{4n+3};\quad a = \dfrac{1}{2}.$

22. $x_n = \dfrac{3n+2}{6n-3};\quad a = \dfrac{1}{2}.$

23. $x_n = \dfrac{4n+3}{2n-1};\quad a = 2.$

24. $x_n = \dfrac{4n^2+7}{2n^2-1};\quad a = 2.$

25. $x_n = \dfrac{2n^2+3}{3n^2+1};\quad a = \dfrac{2}{3}.$

26. $x_n = \dfrac{3n^2+5}{n^2+4};\quad a = 3.$

27. $x_n = \dfrac{5n-3}{3n+4};\quad a = \dfrac{5}{3}.$

28. $x_n = \dfrac{5n+2}{2};\quad a = 2,5.$

29. $x_n = -\dfrac{3n+1}{2n+5};\quad a = -\dfrac{3}{2}.$

30. $x_n = \dfrac{2n^2+5}{4n^2+1};\quad a = \dfrac{1}{2}.$

Задание 14. С помощью $\varepsilon - \delta$ - рассуждений доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right) = A$. Заполнить следующую таблицу:

ε	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
δ				

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-8x+6}{x-3} = 4.$

2. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{6x^2-5x+1}{x-\frac{1}{3}} = -1.$

3. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+3x-2}{x-\frac{1}{2}} = 5.$

4. $\lim\limits_{x\to -\frac{7}{5}}\dfrac{10x^2+9x-7}{x+\frac{7}{5}} = -19.$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x-2} = 7.$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-14x+6}{x-3} = 10.$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x^2-9x+3}{x-1} = 3.$

8. $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{2x^2-21x-11}{x-11} = 23.$

9. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{6x^2-75x-39}{2x+1}=-\dfrac{81}{2}.$

10. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{5}} \dfrac{15x^2-2x-1}{5x+1}=-8.$

11. $\lim\limits_{x\to -7} \dfrac{2x^2+15x+7}{x+7}=-13.$

12. $\lim\limits_{x\to 0,5} \dfrac{6x^2-x-1}{x-0,5}=5.$

13. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x^2+5x-2}{x+2}=-7.$

14. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{6x^2-5x+1}{x-1}=8.$

15. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \dfrac{3x^2-2x-1}{3x+1}=-4.$

16. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{6x^2+x-1}{3x-1}=5.$

17. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+5x+4}{x+1}=3.$

18. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-5x+4}{x-1}=-3.$

19. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x^2-18x+7}{x-7}=6.$

20. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x^2-8x-9}{x-9}=3.$

21. $\lim\limits_{x\to 1/3} \dfrac{3x^2+17x-6}{3x-1}=19.$

22. $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{2x^2+3x-2}{2x-1}=5.$

23. $\lim\limits_{x\to -10} \dfrac{x^2+11x+10}{x+10}=-9.$

24. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-x-3}{x+1}=1.$

25. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+6}{x}=4.$

26. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}=2.$

27. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3}=2.$

28. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-3x-2}{x-2}=5.$

29. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2+3x-5}{x-1}=7.$

30. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+2x-1}{x+1}=-4.$

Задание 15. Используя определение предела функции, доказать, что равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=A$.

1. $\lim\limits_{x\to -1}\left(4x+3\right)=-1.$

2. $\lim\limits_{x\to -1}\left(2x+7\right)=5.$

3. $\lim\limits_{x\to 3}(4x-3)=9.$

4. $\lim\limits_{x\to 2}(4x-5)=3.$

5. $\lim\limits_{x\to 4}(4x-13)=3.$

6. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-5)=4.$

7. $\lim\limits_{x\to -2}(3x+8)=2.$

8. $\lim\limits_{x\to 1}(9x-4)=5.$

9. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-4x+8\right)=4.$

10. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)=1.$

11. $\lim\limits_{x\to 1}(7x-5)=2.$

12. $\lim\limits_{x\to -2}(2x+9)=5.$

13. $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)=7.$

14. $\lim\limits_{x\to 1}(5x-3)=2.$

15. $\lim\limits_{x\to 3}(5x-3)=12.$

16. $\lim\limits_{x\to 2}(7x-5)=9.$

17. $\lim\limits_{x\to 4}(2x-3)=5.$

18. $\lim\limits_{x\to 2}(3x+5)=11.$

19. $\lim\limits_{x\to -2}(7x+11)=4.$

20. $\lim\limits_{x\to -3}(2x+9)=3.$

21. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-1)=5.$

22. $\lim\limits_{x\to 3}(6x-13)=5.$

23. $\lim\limits_{x\to 4}(3x-4)=8.$

24. $\lim\limits_{x\to 3}(2x+1)=7.$

25. $\lim\limits_{x\to -2}(2x+5)=1.$

26. $\lim\limits_{x\to -4}(-2x+9)=1.$

27. $\lim\limits_{x\to -1}(3x+1)=-2.$

28. $\lim\limits_{x\to -3}(2x+13)=7.$

29. $\lim\limits_{x\to 3}(-2x+11)=5.$

30. $\lim\limits_{x\to -5}(2x+13)=3.$

Задание 16. Использую свойства пределов найти пределы.

1. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!\,+3n!}{(n-1)(n-1)!\,-(n-2)!};$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\left(n^2+1\right)\left(n^2-4\right)}-\sqrt{n^4-9}\right).$

2. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt[3]{2n^2+1}}{n+2\sin n};$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3}\right).$

3. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{3^{n-1}}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+2}-\sqrt{n^2+2n-3}\right)$.

4. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2}{n^3}-\frac{n}{3}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+3}-\sqrt{3n^2+4n+1}\right)$.

5. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+3n+1}-\sqrt{2n^2+n+1}\right)$.

6. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}{5n^2}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+5}-\sqrt{n^2-3n+11}\right)$.

7. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{4^n}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n+3}\right)$.

8. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{125}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{5^n}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2}\right)$.

9. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2+5n+9}\right)$.

10. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+4+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n-3}\left(\sqrt{n^3-2n+3}-\sqrt{n^3+2}\right)$.

11. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right)$.

12. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{4^n}}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}n\cdot\left(\sqrt{n^4+3n^2-5}-\sqrt{n^4+n^2+2}\right)$.

13. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n^3+n-1}-\sqrt{n^3+3}\right)$.

14. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{1+2+3+4+\ldots+n}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3n^3+17n+10}-\sqrt{3n^2-22n-16}\right)$.

15. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8n^3-2}+5n^2}{\sqrt{4n^4+5}-\sqrt{n^2+2^n}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3}-\sqrt{n^3+3n^2+2n}\right).$

16. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}+n};$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3n^3+x^2+1}-\sqrt{3n^4-n-1}\right).$

17. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n^2+1)^2-(n^2-1)^2};$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4}\right)\sqrt{n+2}.$

18. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+...-2n}{\sqrt{n^2+1}};$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^2-12n}-\sqrt{3n^2+6n}\right).$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2n^3+n^2+1};$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3}\left(\sqrt{n^3-3}-\sqrt{n^3-2}\right).$

20. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3};$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n}-\sqrt{n^2+7n}\right).$

21. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!};$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+2}-\sqrt{n^2+3}\right).$

22. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+...+a^n}{1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+...+\dfrac{1}{4^n}};$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2+6n}\right)$.

23. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3-3}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n^3+n+1}-\sqrt{n^3-1}\right)$.

24. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!+3n!}{(n-1)(n-1)!-(n-2)!}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt{n^4+7}-\sqrt{n^4-2}\right)$.

25. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{3n^2+n-2}\right)$.

26. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+4+\ldots+n}{n^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-5}\right)$.

27. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+2}-\sqrt{n^2+4n+3}\right)$.

28. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+3n^2+3}-\sqrt{n^4-3n^2+2}\right)$.

29. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+2n+4}\right).$

30. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{2n^2-1}\cdot\cos\dfrac{n+1}{2n-1}\right);$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x\left(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2+27}\right).$

Задание 17. Вычислить предел (без правила Лопиталя):

1. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-2}{6x^2+x-5};$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x^2+8}{1-2x-x^5};$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20};$

4) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x^2+9}{x^2-9}-\dfrac{x}{x+3}\right);$

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-4x-5};$

6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+10}-3}{\sqrt{2+x}-1};$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{2x^2};$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\ln(1-4x)}.$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg} x\right)^{\frac{1}{\sin x}};$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x+4}.$

2. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x^4-2}{2x^2-5x^4+1};$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7};$

3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-5x+10}{x^2-25};$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{6x}{x^2-4}-\dfrac{3}{x-2}\right);$

5) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x^2+x-56};$

6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{6-x}-2};$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{2x^2};$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\ln(1-4x)}.$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}};$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x+4}.$

3. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^5-4x^2-12}{x^4+x^5-3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x^3-2}{x^2-x^5+4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6x}{x^2-9}-\dfrac{3}{x-3}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2+3x-10}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{x^2-x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{3x^2}$;

9) $\lim\limits_{x\to}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x}\right)^{3x+2}$.

4. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-2}{4x^2+x-5}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{6x}{x^2-16}-\dfrac{3}{x-4}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-4x-5}$; 6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+10}-3}{\sqrt{2+x}-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos^3 4x}{3x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(1+2x)}{\sin 6x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$.

5. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+5x-8}{3x^2-5x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x}{3x^3-5x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^3-x^2+x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x^2+9}{x^2-9}-\dfrac{x}{x+3}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x^2+x-56}$; 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{6-x}-2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}$;   8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\cdot\operatorname{arctg} 2x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$;   10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{3-2x}$.

6. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x^4-2}{x^3-5x^2+1}$;   2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+5x-8}{3x^2-5x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+5x-24}{9-x^2}$;   4) $\lim\limits_{x\to\frac{2}{5}}\dfrac{(2-5x)-(6-15x)}{10x^2-9x+2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;   6) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{3x^2}$;   8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 3x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} 3x}\right)$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{2x}-1}{3x}$;   10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$.

7. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x-2}{9x^2+x-2}$;   2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-4x^3+3}{2x^2+x-7}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{1-\sqrt{x}}$;   4) $\lim\limits_{x\to -2}\left[\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\dfrac{2x}{x+2}\right]$;

5) $\lim\limits_{x® 5}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}$;   6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} 2x}\right)$;   8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-1}{x\cdot\sin 5x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$;   10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$.

8. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x^4-2}{2x^2-5x^3+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-4x^2-1}{3x^4+x^2-3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-4}$; 4) $\lim\limits_{x\to -3}\left[\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\dfrac{3x}{x+3}\right]$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\operatorname{arctg} 6x}{\cos 2x-1}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+2}{4x-1}\right)^{2x+4}$.

9. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x^4-2}{2x^2-5x^4+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}$.

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$; 4) $\lim\limits_{x\to -2}\left[\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\dfrac{2x}{2+x}\right]$;

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\arcsin x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{\log_2(1-6x)}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x+2}$.

10. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-4x^2-2}{9x^2+x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$.

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+2x-24}{6-2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}\right)\cdot\dfrac{2}{x-2}\right]$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$; 6) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin x+\sin 7x}$;   8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\ln(1-x)}{1-\cos 2x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$;   10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5+2x}{2x-4}\right)^{x+4}$.

11. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x-2}{9x^2+x-2}$;   2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^5-4x^2-12}{x^4+x^5-3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x-14}{4-x^2}$;   4) $\lim\limits_{x\to 3}\left[\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}\right)\cdot\dfrac{2}{x-3}\right]$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;   6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x+\cos x}{2x}$;   8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{\sin 6x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$;   10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{x-1}$.

12. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-5x-11}{3x^3-5x+1}$;   2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+3x+5}{4x^3-2x^2+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2+x-42}{x^2-36}$;   4) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{x}{2}\right)\cdot\dfrac{x}{2-x}\right]$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}}{x^2+4x-5}$;   6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x^2-x}$;   8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\arcsin x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$;   10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-4}\right)^{x+1}$.

13. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^5-4x^2-12}{x^4+x^5-3x}$;   2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+5x+4}$; 4) $\lim\limits_{x\to 4}\left[\left(\dfrac{4}{x}-\dfrac{x}{4}\right)\cdot\dfrac{x}{4-x}\right]$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{x^2-x-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{2x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 6x}{\ln(1+2x)}$;

9) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\log_7 x-1}{x-7}$; 10) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3-6x}{5-6x}\right)^{2x+1}$.

14. 1) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-4x-2}{x+7x^2-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-5x^4-2}{2x^2-5x^4+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+7x-30}{9-x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}-\dfrac{x}{x+2}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2+7x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{2x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-6x)}{\sin 7x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^x-3}{x-1}$; 10) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{8+5x}{5x-4}\right)^{2x+1}$.

15. 1) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-3x^2-4x-12}{x^4+x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^4-4x^2-1}{x^4+2x^2-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-x-20}{25-x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+6x-7}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}}{x^2+4x-12}$; 6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

7) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(x+1)}{1-x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\cdot\operatorname{arctg} 5x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\log_2 x-2}{x-2}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+1}\right)^{6x-3}$.

16. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-5x-11}{3x^3-5x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-2}{6x^2+x-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-5x+4}$; 4) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x^2+4x-5}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}}{x^2+4x-12}$; 6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}2x}-\dfrac{1}{\sin 2x}\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_3(1-2x)}{\operatorname{arctg}8x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5^x-5}{2(x-1)}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-1}{7x+3}\right)^{4x-8}$.

17. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x-1}{3x^3-5x^2+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-4x^2-1}{3x^4+x^2-3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-5x-24}{64-x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^2+x-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos^3 3x}{4x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}12x}{\log_3(1-12x)}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{5x}}{2x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5+2x}{2x-4}\right)^{x+4}$.

18. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x-8}{3x^4-5x^2+7}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2-x-1}{1+x+x^2-2x^3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$;

5) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{6-x}}{x^2+2x-8}$; 6) $\lim\limits_{x\to81}\frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x-\sin x}{\arcsin 2x}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{x\cdot\sin x}$;

9) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\log_4 x-1}{x-4}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{x-1}$;

19. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-2}{6x^2+x-5}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^3-6x^2+12}{x^3+4x}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2+6x-1}{3-x^2+2}$;

5) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+4x-5}$; 6) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 5x-\cos x}{4x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot\arcsin x}{1-\cos 4x}$;

9) $\lim\limits_{x\to1}\frac{5^x-5}{x-1}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2x+1}$;

20. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^5-4x^2-12}{x^4+x^5-3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{5-6x^2-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2-4x-5}$;

5) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2+x-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 5x}{\sin^2 5x}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\lg(1+6x)}{\arcsin 12x}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x+8}{7x-3}\right)^{5x+2}$.

21. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-4x^2-1}{3x^4+x^2-3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-x-x^2}{4+3x^2-x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x^2-9}$; 4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-6x-45}{2x^2-3x-35}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}}{x^2+x-6}$; 6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}2x}-\dfrac{1}{\sin 2x}\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\ln(1-6x)}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{7x}}{4x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x-2}$.

22. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x^3-2}{x^2-5x^5+9}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-5x^2+3x^5}{x^5+6x+8}$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{2}{5}}\dfrac{5x^2-12x+4}{6-15x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2+x-12}$; 6) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin 2x}{2x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\ln(1-2x)}{1-\cos 3x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7^x-7}{x-1}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x+2}$.

23. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x^4-2}{2x^2-5x^3+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x^2+4}{2x^4+3x^2+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$; 4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+7x+10}{4-x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+x-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x-\sin 3x}{2x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin x+\sin 2x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+mx)}{nx}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+3}{7x-2}\right)^{4x-1}$.

24. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-4x^2-1}{x^4+2x^2-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-4x+2}{4x^3+2x-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+3x-4}{x^3+64}$; 4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{5x^2-4x-5}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2+x-12}$; 6) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(x+a)-\ln x\right]$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$.

25. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x^3-2}{x^2-x^5+4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$; 4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+x-20}{x^2-16}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}}{x^2+x-6}$; 6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{2x^2}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x-5}$.

26. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x}{3x^3-5x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^5+4x^4+2}{6x^5+12x^4-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{1-x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x^2-x-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{2-\sqrt[4]{x}}{4-\sqrt{x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin x-\sin 3x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{-5x+1}$.

27. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x-1}{3x^3-5x^2+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{16x^3+7x^2+5x}{12x^3+4x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; 4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-12}{x^2-16}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$.

28. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x\ \ -2}{x+7x^2-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x-x^3+x^2+1}{6x-3x^2+7x^3}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{2x^2-2x-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-3x-18}{x^2-9}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2-7x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x-\sin 2x}{x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 10x}{2x^2-2x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+kx)}{x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{x-3}$.

29. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+5x-8}{3x^2-5x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x\ \ -2}{x+7x^2-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4}$;

5) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x}$; 6) $\lim\limits_{x\to81}\dfrac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{x\sin x}$; 8) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{1-x^2}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+1}\right)^{x+2}$.

30. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x-2}{9x^2+x-2}$; 2) 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+5x-8}{3x^2-5x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$;

5) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+25}-5}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2}{\cos 2x-\cos 4x}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^x-1}{\sin 6x}$. 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+1}{7x-8}\right)^{5x+1}$.

Задание 18. Сравнить бесконечно малую величину $\alpha=\alpha(x)$ с бесконечно малой величиной $\beta=\beta(x)$ при $x\to x_0$, т.е. найти $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, и сделать соответствующее заключение.

1. 1) $\alpha(x)=3^x-1,\quad \beta(x)=2x,\quad x\to0;$

2) $\alpha(x)=\sin 5x,\quad \beta(x)=x+x^2,\quad x\to0.$

2. 1) $\alpha(x) = 2\sin x, \quad \beta(x) = x, \quad x \to 0;$

2) $\alpha(x) = \sqrt{2x}, \quad \beta(x) = \operatorname{tg}\sqrt{x}, \quad x \to 0_+.$

3. 1) $\alpha(x) = 3x^2, \quad \beta(x) = 1 - \cos x, \quad x \to 0;$

2) $\alpha(x) = \arcsin 3x, \quad \beta(x) = \operatorname{arctg} 6x, \quad x \to 0.$

4. 1) $\alpha(x) = 1 - \cos 2x, \quad \beta(x) = x, \quad x \to 0;$

2) $\alpha(x) = \sin^2(x-1), \quad \beta(x) = x^2 - 1, \quad x \to 1.$

5. 1) $\alpha(x) = \lg(1+x), \quad \beta(x) = 3x, \quad x \to 0;$

2) $\alpha(x) = \sin x, \quad \beta(x) = \pi - x, \quad x \to \pi.$

6. 1) $\alpha(x) = \arcsin 7x, \quad \beta(x) = 3x, \quad x \to 0;$

2) $\alpha(x) = \sqrt{6x+1} - 1, \quad \beta(x) = 4x, \quad x \to 0.$

7. 1) $\alpha(x) = \sqrt{2x+1} - 1, \quad \beta(x) = x, \quad x \to 0;$

2) $\alpha(x) = \sin x + \operatorname{tg} x, \quad \beta(x) = 3x, \quad x \to 0.$

8. 1) $\alpha(x) = \operatorname{tg} 6x, \quad \beta(x) = \sin 4x, \quad x \to 0;$

2) $\alpha(x) = \sqrt[3]{x+8} - 2, \quad \beta(x) = \dfrac{x}{12}, \quad x \to 0.$

9. 1) $\alpha(x) = x + \sin x, \quad \beta(x) = 3x, \quad x \to 0;$

2) $\alpha(x) = 1 - \cos\dfrac{x}{m}, \quad \beta(x) = \dfrac{x^2}{2m^2}, \quad x \to 0.$

10. 1) $\alpha(x) = x^2 + \operatorname{tg} x, \quad \beta(x) = 4x, \quad x \to 0;$

2) $\alpha(x) = \sin 4x, \quad \beta(x) = \sin 3x, \quad x \to 0.$

11. 1) $\alpha(x) = 4(x-1)^2, \quad \beta(x) = x - 1, \quad x \to 1;$

2) $\alpha(x) = \operatorname{tg}^2 2x, \quad \beta(x) = \sin^2\dfrac{x}{3}, \quad x \to 0.$

12. 1) $\alpha(x) = x^3 - 1, \quad \beta(x) = 2(x-1), \quad x \to 1;$

2) $\alpha(x) = x\sin 2x, \quad \beta(x) = (\operatorname{arctg} 5x)^2, \quad x \to 0.$

13. 1) $\alpha(x)=x^3+1,\quad \beta(x)=x+1,\quad x\to -1;$

2) $\alpha(x)=\sin 5x,\quad \beta(x)=4x,\quad x\to 0.$

14. 1) $\alpha(x)=\sqrt[3]{x+1},\quad \beta(x)=2(x+1),\quad x\to -1;$

2) $\alpha(x)=\operatorname{tg}\dfrac{2x}{3},\quad \beta(x)=4x^2,\quad x\to 0.$

15. 1) $\alpha(x)=\sqrt{1+x}-1,\quad \beta(x)=5x,\quad x\to 0;$

2) $\alpha(x)=\sqrt{1+x}-1,\quad \beta(x)=4x,\quad x\to 0.$

16. 1) $\alpha(x)=xe^x,\quad \beta(x)=5x,\quad x\to 0;$

2) $\alpha(x)=\ln(1+x),\quad \beta(x)=3x,\quad x\to 0.$

17. 1) $\alpha(x)=x^2\sin^2 x,\quad \beta(x)=x\operatorname{tg}x,\quad x\to 0;$

2) $\alpha(x)=\sqrt{3x},\quad \beta(x)=4x^2-x,\quad x\to 0.$

18. 1) $\alpha(x)=a^x-1,\quad \beta(x)=x\ln a,\quad x\to 0;$

2) $\alpha(x)=\ln(1+4x),\quad \beta(x)=\sin 3x,\quad x\to 0.$

19. 1) $\alpha(x)=x\sin^2 x,\quad \beta(x)=2x\sin x,\quad x\to 0;$

2) $\alpha(x)=\sqrt[3]{1+x},\quad \beta(x)=1+\dfrac{x}{3},\quad x\to 0.$

20. 1) $\alpha(x)=\dfrac{x}{1-x},\quad \beta(x)=\dfrac{x}{1+x^2},\quad x\to 0;$

2) $\alpha(x)=\sqrt{1+2x+3x^2}-1,\quad \beta(x)=4x,\quad x\to 0.$

21. 1) $\alpha(x)=1-x,\quad \beta(x)=1-\sqrt[3]{x},\quad x\to 1;$

2) $\alpha(x)=1+\cos x,\quad \beta(x)=(x-\pi)^2,\quad x\to \pi.$

22. 1) $\alpha(x)=\sin^2 x,\quad \beta(x)=x\operatorname{arctg}x,\quad x\to 0;$

2) $\alpha(x)=\log_2 x-1,\quad \beta(x)=x-2,\quad x\to 2.$

23. 1) $\alpha(x)=x-\sin x,\quad \beta(x)=3x,\quad x\to 0;$

2) $\alpha(x)=\sin(x-1),\quad \beta(x)=x^4-1,\quad x\to 1.$

24. 1) $\alpha(x) = 2x, \quad \beta(x) = \dfrac{3\sqrt{x^3}}{1-x}, \quad x \to 0;$

2) $\alpha(x) = \arcsin(x-1), \quad \beta(x) = x^2 - 5x + 4, \quad x \to 1.$

25. 1) $\alpha(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}, \quad \beta(x) = 3x, \quad x \to 0;$

2) $\alpha(x) = 1 - \cos x, \quad \beta(x) = \sin 4x, \quad x \to 0.$

26. 1) $\alpha(x) = 3\sin^3 x - x^4, \quad \beta(x) = 2x, \quad x \to 0;$

2) $\alpha(x) = \sin^2 x, \quad \beta(x) = 1 - \cos x, \quad x \to 0.$

27. 1) $\alpha(x) = x \operatorname{tg} x + \sin x, \quad \beta(x) = x, \quad x \to 0;$

2) $\alpha(x) = x^2 + 1, \quad \beta(x) = 3x^2 + 5x, \quad x \to \infty.$

28. 1) $\alpha(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} 3x, \quad \beta(x) = 4x, \quad x \to 0;$

2) $\alpha(x) = \sin x - \operatorname{tg} x, \quad \beta(x) = 3x, \quad x \to 0.$

29. 1) $\alpha(x) = \dfrac{1}{x^2 + 7x + 2}, \quad \beta(x) = \dfrac{1}{3x^2 - x + 10}, \quad x \to \infty.$

2) $\alpha(x) = 5^x, \quad \beta(x) = x^3, \quad x \to \infty.$

30. 1) $\alpha(x) = \sin^2 x, \quad \beta(x) = \sin 2x, \quad x \to 0.$

2) $\alpha(x) = x^3 - 8, \quad \beta(x) = x - 2, \quad x \to 2.$

Задание 19. Функция задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной. Найти точки разрыва функции, если они существуют, и определить соответствующий скачок. Сделать схематический чертеж.

1. 1) $y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 1, \\ x - 1, & x > 1. \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} x - 1, & x \le 0; \\ x^2 - 1, & 0 < x \le 1; \\ 4x - 2, & x > 1. \end{cases}$

2. 1) $y=\begin{cases}1-2x, & x\le 0,\\ x^3-1, & x>0.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}x^2, & x\le -1;\\ 2x+1, & -1<x<0;\\ -x^2+2, & x\ge 0.\end{cases}$

3. 1) $y=\begin{cases}1-x, & x\le -1,\\ x^3, & x>-1.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}3x+1, & x\le 0;\\ x^2+1, & 0<x\le 1;\\ 4-x, & x>1.\end{cases}$

4. 1) $y=\begin{cases}1+x, & x\le 1,\\ -x^2, & x>1.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}-2x, & x\le 0;\\ \sqrt{x}, & 0<x<4;\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$

5. 1) $y=\begin{cases}x^2, & x\le 1,\\ x^3-1, & x>1.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}-x, & x\le 0;\\ x^2, & 0<x\le 2;\\ x+1, & x>2.\end{cases}$

6. 1) $y=\begin{cases}x^2, & x\le 1,\\ 4-x, & x>1.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}-2x, & x\le 0;\\ x^2+1, & 0<x\le 1;\\ 2, & x>1.\end{cases}$

7. 1) $y=\begin{cases}2x+3, & x<-2,\\ x^3-1, & x\ge 1.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}\cos x, & x\le 0;\\ x^2+1, & 0<x<1;\\ x, & x\ge 1.\end{cases}$

8. 1) $y=\begin{cases}x, & |x|<1,\\ 3, & |x|\ge 1.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}-x^2, & x\le 0;\\ \operatorname{tg} x, & 0<x\le \pi/4;\\ 2, & x>\pi/4.\end{cases}$

9. 1) $y=\begin{cases}2x, & x\le 1,\\ 2-x, & x>1.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}-x, & x\le 0;\\ -(x-1)^2, & 0<x<2;\\ x-3, & x\ge 2.\end{cases}$

10. 1) $y=\begin{cases}x^2+4, & x<1,\\ \log_2 x, & x\ge 1.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}-(x+1), & x\le -1;\\ (x+1)^2, & -1<x\le 1;\\ x, & x>1.\end{cases}$

11. 1) $y=\begin{cases}1-x^2, & x<0,\\ x, & x\ge 0.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}x+2, & x\le -1;\\ x^2+1, & -1<x\le 1;\\ -x+3, & x>1.\end{cases}$

12. 1) $y=\begin{cases}\operatorname{arctg} x, & x\le 1,\\ x+1, & x>1.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}-x, & x\le 0;\\ \sin x, & 0<x\le \pi;\\ x-2, & x>\pi.\end{cases}$

13. 1) $y=\begin{cases}4-x, & x\le 1,\\ x-2, & x>1.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}x+4, & x<-1;\\ x^2+2, & -1\le x<1;\\ 2x, & x\ge 1.\end{cases}$

14. 1) $y=\begin{cases}x, & x\le 2,\\ 6-x, & x>2.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}3, & x\le -1;\\ x^2+1, & -1<x\le 0;\\ x+1, & x>0.\end{cases}$

15. 1) $y=\begin{cases}e^{2x}, & x\le 0,\\ 3-x, & x>0.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}x+1, & x\le 0;\\ 2x^2+1, & 0<x\le 1;\\ 4, & x>1.\end{cases}$

16. 1) $y=\begin{cases}2-x, & x\le 0,\\ e^{-x}, & x>0.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}x^2+1, & x\le -1;\\ 2, & -1<x\le 1;\\ 3x+1, & x>1.\end{cases}$

17. 1) $y=\begin{cases}\dfrac{2}{x}, & x<-1,\\ 2x+1, & x\ge -1.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}-x-1, & x\le -1;\\ x^2+1, & -1<x<1;\\ 2x, & x\ge 1.\end{cases}$

18. 1) $y=\begin{cases}x^3, & x\le -1,\\ 3x^2, & x>-1.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}x-3, & x\le 2;\\ -1, & 2<x<3;\\ x^2-5, & x\ge 3.\end{cases}$

19. 1) $y=\begin{cases}x^3, & x<-1,\\ x+4, & x\ge -1.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}3x-2, & x\le 0;\\ 4, & 0<x<2;\\ 2x, & x\ge 2.\end{cases}$

20. 1) $y=\begin{cases}x^2, & x\le 2,\\ \dfrac{4}{x}, & x>2.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}4, & x\le -2;\\ x^2, & -2<x<2;\\ x-2, & x\ge 2.\end{cases}$

21. 1) $y=\begin{cases}x+2, & x<1,\\ \ln x, & x\ge 1.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}4x-3, & x<1,\\ x^2, & 1\le x<2,\\ 5, & x\ge 2.\end{cases}$

22. 1) $y=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x, & x<0,\\ 2x^2, & x\ge 0.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x^2, & 0\le x\le 1,\\ 2, & x>1.\end{cases}$

23. 1) $y=\begin{cases}3x^2, & x\le 1,\\ 2x+3, & x>1.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}\cos x, & x\le 0,\\ x^2+1, & 0<x<1,\\ 2-x, & x>1.\end{cases}$

24. 1) $y=\begin{cases}5-x^2, & x<2,\\ x^3-1, & x\ge 2.\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}1-x^2, & x\le 0,\\ \cos x, & 0<x<\pi/2,\\ 2, & x\ge \pi/2.\end{cases}$

25. $y=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \cos x, & x\geq 0.\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}x-3, & x<0,\\ x+1, & 0\leq x<4,\\ 3+\sqrt{x}, & x\geq 4.\end{cases}$

26. 1) $y=\begin{cases}3-x, & x\leq 3,\\ x^2-6, & x>3.\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}\cos x, & x\leq 0,\\ 1-x, & 0<x\leq 2,\\ x^2, & x>2.\end{cases}$

27. 1) $y=\begin{cases}1+2x, & x\leq 1,\\ 3-x^2, & x>1.\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}x, & x\leq 0,\\ \operatorname{tg} x, & 0<x<\pi/2,\\ 2, & x\geq \pi/2.\end{cases}$

28. 1) $y=\begin{cases}2-x, & x\leq -2,\\ x^2-3, & x>-2.\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}-x^2, & x<0,\\ \operatorname{tg} x, & 0\leq x\leq \pi/4,\\ 2, & x>\pi/4.\end{cases}$

29. 1) $y=\begin{cases}2^x, & x<-1,\\ 4x^2, & x\geq -1.\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}2, & x\leq 0,\\ x^2+2, & 0<x\leq 1,\\ 3-x, & x>1.\end{cases}$

30. 1) $y=\begin{cases}4-x, & x<4,\\ \log_2 x, & x\geq 4.\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}\sin x, & x\leq 0,\\ x^3, & 0<x\leq 1,\\ 2x+1, & x>1.\end{cases}$

РАЗДЕЛ II.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Задание 1. Найти производную функции ($a, b, c, \ldots$ и $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ – постоянные величины):

1. 1) $y = x\sin x - x^2\cos x$;

2) $y = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x}}$;

3) $y = x^3\ln x - \dfrac{x^2}{3}$;

4) $y = \dfrac{\cos x}{e^x}$;

5) $y = x^2\sqrt[3]{6x-1}$;

6) $y = \left(x + 2\sqrt{x^2+4x}\right)$;

7) $y = \sqrt{1+2x}\cdot\sqrt[3]{1+3x}$;

8) $y = \cos^3 4x$;

9) $y = \ln^4(\sin x)$;

10) $y = 2^{3^x}$;

11) $y = \sin^2(\cos 2x)$;

12) $y = \arccos\left(x^2-1\right)$;

13) $y = \lg(\sin x)$;

14) $y = \ln^2 x - \ln(\ln x)$;

15) $y = \left(e^{\sin x}+3\right)^2$;

16) $y = \dfrac{1}{\mathrm{tg}^2 2x}$;

17) $y = \left(3^{\cos 2x} + \cos^2 x\right)^4$;

18) $y = \ln\left(\cos\left(e^{-4x}\right)\right)$;

19) $y = \left(1+\sqrt{x}\right)^{\sqrt[3]{x}}$;

20) $y = x^{\mathrm{arcctg}x}$;

21) 1) $y - x - \mathrm{arctg}y = 0$;

22) $2^x + 2^y - 2^{x+y} = 0$.

2. 1) $y = e^x\sin x - \ln x\cdot\cos x$;

2) $y = \dfrac{2-3\sqrt[3]{x}}{2+3\sqrt[3]{x}}$;

3) $y = \dfrac{1}{\arccos x}$;

4) $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$;

5) $y=3^x e^{-x}$; 6) $y=\sqrt{1+5x^2}$;

7) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+16}}{x}$; 8) $y=\dfrac{1}{1+\cos 4x}$;

9) $y=3^{\sin x}$; 10) $y=\ln\left(2x^2+3x+2\right)$;

11) $y=\sin\left(x^2+2x+4\right)$; 12) $y=\operatorname{tg}\left(x^2+x+1\right)$;

13) $y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{a+x}{1-ax}\right)$; 14) $y=\left(\dfrac{ax+b}{c}\right)^3$;

15) $y=\ln\left(\sin(2x+5)\right)$; 16) $y=\arcsin\sqrt{1-3x}$;

17) $y=e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^4-1}}$; 18) $y=\ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{2x}}\right)$;

19) $y=\dfrac{1}{x^3}$; 20) $y=\left(1+x^2\right)^{\cos 2x}$;

21) $y\sin x-\cos(x-y)$; 22) $y^3-2xy+x^2=0$.

3. 1) $y=3a^x-\sin x$; 2) $y=\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt[5]{\dfrac{1}{x}}}{\sqrt{5}-\sqrt[4]{x}}$;

3) $y=e^x\cos x$; 4) $y=2^x\ln x$;

5) $y=x^2\sqrt{7-x^2}$; 6) $y=\left(x-1\right)\sqrt[3]{x+1}$;

7) $y=\sin\sqrt{1+x^2}$; 8) $y=\left(1+\sin^2 x\right)^4$;

9) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln\left(\cos x\right)$; 10) $y=a^{\sin^2 x}$;

11) $y=\dfrac{x}{\sin^2 x}+\operatorname{ctg} x$; 12) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

13) $y=\arcsin\sqrt{x}$; 14) $y=x\cos\left(2^x\right)$;

15) $y = x^2\sqrt{1-x^2}$;

17) $y = \ln\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)$;

17) $y = e^{\mathrm{arctg}^3\sqrt{x^2-1}}$;

18) $y = \left(2^{\arcsin x} - \sqrt{1-x^2}\right)^5$;

19) $y = \left(\sqrt[3]{x}\right)^{x^2}$;

20) $y = (1+x)^{\sin^3 x}$.

21) $2y\ln y - x = 0$;

22) $e^y + xy^2 - c = 0$.

4. 1) $y = 2e^x + \ln x$;

2) $y = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} - \dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$;

3) $y = \dfrac{1}{x} + 2\ln x - \dfrac{\ln x}{x}$;

4) $y = \dfrac{\ln x}{x}$;

5) $y = \cos^2 x^3$;

6) $y = x\sin\left(x^2+1\right)$;

7) $y = x\arccos 2x$;

8) $y = (\arcsin x)^2$;

9) $y = \sqrt{1-x^2}\cdot\arccos x$;

10) $y = \left(1+x^2\right)e^x$;

11) $y = x^2\cdot 10^{2x}$;

12) $y = \arccos 2x$;

13) $y = \dfrac{4\ln x}{1-\ln x}$;

14) $y = \left(3^{\cos 3x} + \sin^2 3x\right)^3$;

15) $y = (\sin x)^{\mathrm{ctg}x}$;

16) $y = \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

17) $y = x^{\cos^3 x}$;

18) $y = (1+\cos x)^x$.

19) $x + \sqrt{xy} + y - a = 0$;

20) $x^4 + y^4 - 4axy = 0$;

21) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\ln\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$;

22) $y = \log_{16}\left(\log_5\left(\mathrm{tg}\sqrt{x}\right)\right)$;

5. 1) $y = x^2 + 2^x$;

2) $y = \dfrac{e^x + \sin x}{xe^x}$;

3) $y = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$;

4) $y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$;

5) $y=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^4$; 6) $y=\ln\dfrac{x\left(1+x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}$;

7) $y=x\sqrt[3]{2-x}$; 8) $y=\sqrt[3]{3x^2-10}$;

9) $y=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 10) $y=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$;

11) $y=\ln\left(\operatorname{ctg} x\right)$; 12) $y=\sqrt{1+\arcsin x}$;

13) $y=a\arcsin(x^2)$; 14) $y=\left(3-2\sin x\right)^5$;

15) $y=\left(3^{\sin 2x}-\cos^2 2x\right)^3$; 16) $y=\ln\left(\operatorname{tg} x^3\right)$;

17) $y=x^{\operatorname{arctg} x}$; 18) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

19) $y=\left(1+\operatorname{tg} x\right)^{x^2}$; 20) $y=\left(1+x^3\right)^{\ln x}$;

21) $\sqrt{3x}-\sqrt[3]{y}-1=0$; 22) $x^2+3xy+y^2+1=0$;

6. 1) $y=e^x\left(\sin x+\cos x\right)$; 2) $y=\dfrac{2x^2+x+1}{2x^2-x+1}$;

3) $y=\sin\left(x^2+2^x\right)$; 4) $y=\cos^2 x+\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;

5) $y=x^4\left(8\ln 2x-4\ln x+1\right)$; 6) $y=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$;

7) $y=\dfrac{5+2x}{x}$; 8) $y=\dfrac{1+\sin^2 x}{\cos x^2}$;

9) $y=x^3\ln\dfrac{1}{x}$; 10) $y=e^{2x}\log_2\left(3x^2+1\right)$;

11) $y=e^{\arccos x}$; 12) $y=e^{\cos x}\sin x^2$;

13) $y=\arccos e^x$; 14) $y=\cos\left(\alpha x+\beta\right)$;

15) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{2-x^2}{x^3-6x}}$. 16) $y=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^3-6x-9}}$;

17) $y=\left(\cos x\right)^{x^2}$; 18) $y=\left(\ln x\right)^{x}$;

19) $y=\left(1+\cos 2x\right)^{x^3}$; 20) $y=\left(1+x^3\right)^{\operatorname{cosec} x}$;

21) $y=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$; 22) $y=\sqrt{\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}$.

7. 1) $y=e^x\cos x$; 2) $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$;

3) $y=2^x\ln x$; 4) $y=x\operatorname{tg} x$;

5) $y=3x\ln\left(1-x^2\right)$; 6) $y=\sqrt[4]{1+e^{4x}}+\sqrt{5}$;

7) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$; 8) $y=\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$;

9) $y=\operatorname{th} x-x$; 10) $y=x^2\operatorname{cth} x$;

11) $y=e^{\sin x}\cos x^2$; 12) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

13) $y=\left(2a+3bx\right)^{10}$; 14) $y=\sqrt{1+\arcsin x}$;

15) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{3-x^2}{x^3-5x+2}}$; 16) $y=\dfrac{3x-4}{\sqrt{x^3+3x-2}}$;

17) $y=x^{\frac{2}{x}}$; 18) $y=\left(\cos x\right)^{\cos x}$;

19) $y=x^{\arcsin x}$; 20) $y=x^{e^x}$;

21) $x^2y+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=0$; 22) $e^{xy}-x-3y=0$.

8. 1) $y=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x$; 2) $y=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$;

3) $y=e^x\ln\sin x$; 4) $y=\sqrt[3]{x}\left(e^{3x}-5\right)$;

5) $y=\ln\sqrt[3]{\left(\dfrac{1-3x}{1+3x}\right)^3}$; 6) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-e^{4x}}{e^{4x}}}$;

7) $y=\ln\left(x-\cos x\right)^{x-\cos x}$;

8) $y=10^{1-\sin^4 3x}$;

9) $y=\arcsin\dfrac{x^2-1}{x^2}$;

10) $y=\dfrac{3\operatorname{cth} x}{\ln x}$;

11) $y=e^x 2^{-x}$;

12) $y=a^{\sin x}+a^{\cos x}$;

13) $y=e^{\cos x}\sin x$;

14) $y=2^{x\cdot\operatorname{ctg}x}$;

15) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{3x^2+2}{x^3+2x}}$;

16) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^3-5x^2+3}}$;

17) $y=\left(\sin x\right)^{\cos x}$;

18) $y=\left(\sin 3x\right)^{\sqrt{x}}$;

19) $y=\left(\operatorname{arctg}x\right)^{x^2}$;

20) $y=x^{\frac{1}{x^2}}$;

21) $x^3+2xy-3y^2=0$;

22) $y\sin(x+y)+x=0$;

9. 1) $y=5\sin x+3\cos x$;

2) $y=\dfrac{\arccos x}{1-x^2}$;

3) $y=\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$;

4) $y=\dfrac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg}x\right)-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$;

5) $y=\left(x^2-1\right)\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

6) $y=\dfrac{\ln\cos x}{\cos x}$;

7) $y=\dfrac{x}{\sin x^2+\cos x^2}$;

8) $y=\ln\sin x+\dfrac{\cos^2 x}{2}$;

9) $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$;

10) $y=\sqrt{x}\cdot\operatorname{arctg}x$;

11) $y=\left(\arccos\dfrac{x}{2}\right)^2$;

12) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$;

13) $y=\cos^2 x\cdot\ln x$;

14) $y=x^3\cdot\operatorname{arctg}x^3$;

15) $y=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+3}{x^3+9x}}$;

16) $y=\dfrac{3x}{\sqrt{x^3-3x^2+1}}$;

17) $y=x^{-\operatorname{tg}x}$;

18) $y=\left(\operatorname{arctg}2x\right)^{\sin 3x}$;

19) $y = x^{x^3}$;

20) $y = \left(x + x^2\right)^x$;

21) $x^3y^2 + 5xy - 3y^2 = 0$;

22) $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0$.

10. 1) $y = \dfrac{a}{ax^2 + bx + c}$;

2) $y = \operatorname{tg} x + \dfrac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$;

3) $y = \operatorname{arcrg}\left(\operatorname{th} x\right)$;

4) $y = x \cdot \sin x \cdot \operatorname{arctg} x$;

5) $y = \cos\sqrt{x} \cdot \ln\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

6) $y = x^3 \ln\dfrac{1}{x}$;

7) $y = \cos^2\left(\sin 3x\right)$;

8) $y = x \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

9) $y = \ln\sqrt[4]{\dfrac{x^2 + 4}{x^3 + 12x}}$;

10) $y = \dfrac{4x + 1}{\sqrt{x^2 - 16x - 2}}$;

11) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + a^2\right)$;

12) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$;

13) $y = x \operatorname{arctg} x$;

14) $y = e^x \cdot 10^x$;

15) $y = \sqrt{1 - x^2} \arccos x$;

16) $y = x^3 \operatorname{ctg} x$;

17) $y = \left(\cos x\right)^{\sin x}$;

18) $y = \left(1 + x^3\right)^x$;

19) $y = \left(\sin x\right)^{\ln x}$;

20) $y = \left(\operatorname{arctg} x\right)^{\ln x}$;

21) $y^3 - 3y + 4axy = 0$;

22) $x \sin y - y \cos x = 0$.

11. 1) $y = \sec x^2 + \operatorname{cosec} x^2$;

2) $y = \dfrac{x}{\sin x + \cos x}$;

3) $y = \left(\dfrac{2}{\cos^4 x} + \dfrac{3}{\cos^2 x}\right)\sin x$;

4) $y = \log_2 \dfrac{\left(x - 2\right)^5}{\left(x + 3\right)^2}$;

5) $y = x^3 \ln^2 x$;

6) $y = \left(xe^{2x} + 3\right)^5$;

7) $y = \dfrac{2 - 3\sqrt[3]{x}}{2 + 3\sqrt[3]{x}}$;

8) $y = \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$;

9) $y = \ln\left(\operatorname{ch} x\right)$;

10) $y = \left(\operatorname{sh} x\right)^3$;

11) $y=e^{-x^2}\cos\left(e^{-2x}\right)$; 12) $y=\ln^2\left(1+\sin x\right)$;

13) $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$; 14) $y=\dfrac{\sin x^2+\cos x^2}{2}$;

15) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{2x^2-2}{x^3-3x}}$; 16) $y=\dfrac{4x}{\sqrt{x^3+5x^2-2}}$;

17) $y=\left(1+x^2\right)^{\sin x}$; 18) $y=\left(x+\sin x\right)^{x^2}$;

19) $y=\left(x+1\right)^{x^2}$; 20) $y=\left(1+x^2\right)^{\arccos x}$;

21) $x^3-2x^2y^2+5x+y-5=0$; 22) $\operatorname{tg}\left(x+2y\right)-4y+x=0$;

12. 1) $y=x\sec^2 x-\operatorname{tg} x$; 2) $y=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$;

3) $y=x^3\ln x$; 4) $y=\sin x\cdot\arcsin x$;

5) $y=\sqrt{\ln x+1}+\ln\left(\sqrt{x}+1\right)$; 6) $y=5^{x^2}\ln^2 x$;

7) $y=\sin x\cos\left(\sin x\right)$; 8) $y=x^2\sin\left(\sin x\right)$;

9) $y=\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x$; 10) $y=\operatorname{arctg} x^2$;

11) $y=\sin^2\left(x^3\right)$; 12) $y=\cos^2\left(x-1\right)$;

13) $y=\sin^2(x^3)+2\sin(x^3)$; 14) $y=\ln\left(\arcsin 5x\right)$.

15) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{3-x^2}{x^3-9x}}$; 16) $y=\dfrac{4x+1}{\sqrt{x^2-16x-2}}$;

17) $y=\left(\cos x\right)^{x}$; 18) $y=\left(\operatorname{tg} x\right)^{x^3}$;

19) $y=\left(x^3+2\right)^{\sin x}$; 20) $y=\left(2x+3\right)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$;

21) $\ln y-\arcsin\dfrac{x}{y}=0$; 22) $\dfrac{x}{y}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}-c=0$.

13. 1) $y=\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x$; 2) $y=\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{x}{\sin x}$;

3) $y = x^3 \arcsin x$;

4) $y = (x-1)e^x$;

5) $y = \sqrt{1+\cos^2 x}$;

6) $y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^2 x\right)$;

7) $y = \sqrt[3]{x^4 + 5x} + \sqrt[4]{(5x-1)^3}$;

8) $y = \ln(\arcsin x) + 3$;

9) $y = \sqrt{\operatorname{ch} x}$;

10) $y = \arcsin(x-1)$;

11) $y = \sin\left(3x^2 - 1\right)$;

12) $y = e^x \ln x$;

13) $y = \dfrac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}}$;

14) $y = \dfrac{e^{\ln x} + e^{-\ln x}}{2}$;

15) $y = \ln \sqrt[4]{\dfrac{5-x^2}{x^2 - 15x}}$;

16) $y = \dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2 + 4x - 3}}$;

17) $y = x^{\frac{1}{x^3}}$;

18) $y = \left(1 + x^4\right)^{x^3}$;

19) $y = (\operatorname{ctg} x)^{\sin^2 x}$;

20) $y = (\arcsin x)^{2\sqrt{x}}$;

21) $x + y + e^{xy} - 2 = 0$;

22) $\ln\dfrac{x}{y} - x + 3y = 0$.

14. 1) $y = 3\cos^2 x - \sin^3 x$;

2) $y = \dfrac{\cos x}{1 - \cos x}$;

3) $y = \dfrac{4\ln x}{1 + \ln x}$;

4) $y = \dfrac{1 - 5^x}{1 + 5^x}$;

5) $y = \arccos\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$;

6) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}} + \ln\sqrt{x^2 + 3}$;

7) $y = \lg\left(\cos 3^x\right)$;

8) $y = \ln x\left(\ln(3x + 2)\right)$;

9) $y = \dfrac{\operatorname{ch} 2x \cdot \operatorname{sh} 2x}{\sqrt{x}}$;

10) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$;

11) $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x^2}{2} + 3\right)$;

12) $y = \ln\dfrac{e^x}{1 + e^x}$;

13) $y=\arcsin(\ln x)$;

14) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\sqrt{x}$;

15) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{4-3x^2}{x^3-4x}}$;

16) $y=\dfrac{2x^3+5}{\sqrt{x^4+2x}}$;

17) $y=\left(\operatorname{tg}2x\right)^{\operatorname{tg}2x}$;

18) $y=\left(1+\cos x\right)^{x^2}$;

19) $y=\left(\sin 2x\right)^{\operatorname{tg}2x}$;

20) $y=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{x}$;

21) $2x^3+xy-y^3=0$;

22) $e^{x+y}-\cos\dfrac{y}{x}=0.$

15. 1) $y=x\sin x+\cos x$;

2) $y=\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$;

3) $y=\dfrac{\cos x}{e^x}$;

4) $y=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$;

5) $y=\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$;

6) $y=x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{2}{1+x}}$;

7) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$;

8) $y=\sin\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$;

9) $y=\operatorname{th}\left(\ln x\right)$;

10) $y=\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{cth}x\right)$;

11) $y=\dfrac{\ln x}{e^x}$;

12) $y=\ln\left(\left(\sin 2x\right)^{\frac{1}{2}}\right)$;

13) $y=\sin^3 2x+\dfrac{3}{x}$;

14) $y=\dfrac{3x}{\sqrt[3]{2+x}}-6\sqrt[3]{2+x}$;

15) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x^3-3x}}$;

16) $y=\dfrac{3x-8}{\sqrt{x^2+3x-8}}$;

17) $y=\left(\operatorname{ctg}x\right)^{\sec x}$;

18) $y=\left(x+\ln x\right)^{\frac{1}{x}}$;

19) $y=\left(x^2+3\right)^{\sqrt{x}}$;

20) $y=\left(1-x^2\right)^{\arcsin x}$;

21) $\ln(x+y)+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}=0.$ 22) $\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{y}-1=0.$

16. 1) $y=\cos x-\dfrac{1}{3}\cos^3 x;$ 2) $y=\dfrac{x\sin x}{1+\operatorname{tg} x};$

3) $y=\left(x^2-2x+5\right)e^x;$ 4) $y=\dfrac{\sin x}{e^x};$

5) $y=\sin\left(\ln^3 x\right);$ 6) $y=\ln\left(\operatorname{tg}\sqrt[3]{x}\right);$

7) $y=\dfrac{ax^6}{\sqrt{a^2+b^2}};$ 8) $y=\operatorname{tg}\left(\dfrac{x^2}{2}+1\right)+\operatorname{tg}3;$

9) $y=\dfrac{x}{1+x^2}-\operatorname{arctg} x;$ 10) $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}};$

11) $y=\sin x\cdot\sin 2x;$ 12) $y=\ln(\ln x);$

13) $y=\operatorname{tg}\left(\ln\sqrt{x}\right);$ 14) $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2};$

15) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{10-3x^2}{x^3-10x}};$ 16) $y=\dfrac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+1}};$

17) $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2};$ 18) $y=\left(\operatorname{tg}2x\right)^{\cos 2x}.$

19) $y=\left(2+\dfrac{1}{x^3}\right)^{x};$ 20) $y=\left(\cos x\right)^{\operatorname{arctg} x}.$

21) $x-y+e^y\operatorname{arctg} x=0;$ 22) $xy+\ln y-2\ln x=0.$

17. 1) $y=\cos^2 x;$ 2) $y=\dfrac{\sin x}{1-\cos x};$

3) $y=\dfrac{e^x}{\cos x};$ 4) $y=\dfrac{x^3+2^x}{e^x};$

5) $y=2\sin\sqrt{1+x^2};$ 7) $y=xe^{-x};$

7) $y=\left(1+x^4\right)^5;$ 8) $y=\left(a+b\sqrt{x}\right)^4;$

9) $y=\arcsin(\sin x)$; 10) $y=x\,\mathrm{sh}\,x$;

11) $y=\ln^4(\ln x)$; 12) $y=\ln(\cos x)$;

13) $y=8^{\cos^2 x}+\ln(\sin x)$; 14) $y=e^{1+\ln^2 x}$;

15) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{2x-3}{x^2-4x+6}}$; 16) $y=\dfrac{x^3-10}{\sqrt{x^4-8x}}$;

17) $y=\left(x^4+1\right)^{\frac{1}{x}}$; 18) $y=(\arcsin x)^{\sqrt{1-x^2}}$;

19) $y=(x+1)^{\frac{1}{\sin x}}$; 20) $y=\left(1+x^4\right)^{\mathrm{tg}\,x}$.

21) $y\cos(x+y)+x=0$; 22) $x^2-6y+y^3=0$;

18. 1) $y=\sin x+\cos x$; 2) $y=\dfrac{x}{1-\cos x}$;

3) $y=\dfrac{\log_2 x}{2^x}$; 4) $y=\dfrac{e^x}{1+x^2}$;

5) $y=5^{\sin^2 x}+\ln x$; 6) $y=x+\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$;

7) $y=x\cdot 10^{\sqrt{x}}$; 8) $y=\sqrt[3]{e^x}$;

9) $y=\mathrm{arctg}^2\,\dfrac{1}{x}$; 10) $y=\sqrt[4]{\dfrac{1+\mathrm{th}\,x}{1-\mathrm{th}\,x}}$;

11) $y=\ln\left(\ln^4 x\right)$; 12) $y=e^{ax}\cdot\sin\pi x$;

13) $y=\sin\sqrt{1+x^2}+x$; 14) $y=\ln(x-\sin x)$;

15) $y=\ln\sqrt[8]{\dfrac{4x^2-1}{4x^2+1}}$; 16) $y=\dfrac{5x-2}{\sqrt{x^2+5x+1}}$;

17) $y=\left(\dfrac{c}{x}\right)^{x^2}$; 18) $y=(\mathrm{ctg}4x)^{\sin 4x}$;

19) $y=(1+1/x)^{x^3}$; 20) $y=(1+\sin x)^{x^2}$;

21) $\ln y^x - \ln x^y + x + y = 0;$ 22) $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0.$

19. 1) $y = \sin x \cdot \arcsin x;$ 2) $y = \dfrac{x^2 + \operatorname{tg} x}{x^2 - \operatorname{tg} x};$

3) $y = \ln \dfrac{e^x}{1+e^x} + 3;$ 4) $y = \dfrac{\cos x}{2 + \sin x};$

5) $y = \operatorname{ctg}\left(\ln \sqrt[3]{x}\right);$ 6) $y = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}} + \log_5 e;$

7) $y = \sin\left(\ln x\right);$ 8) $y = \left(x-1\right)^2 \sqrt{1+x^2};$

9) $y = \sin^2\left(x^4\right);$ 10) $y = \sin^3 x + 1 + \cos^2 x;$

11) $y = \ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}};$ 12) $y = e^{-x} \cdot \cos \dfrac{x}{2};$

13) $y = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}};$ 14) $y = x + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}};$

15) $y = \ln \sqrt{\dfrac{5-4x}{x^2+8x-10}};$ 16) $y = \dfrac{3x-4}{\sqrt{x^2+9x-6}};$

17) $y = \left(1+x^3\right)^{\sqrt{x}};$ 18) $y = \left(\cos x\right)^{\operatorname{tg} x};$

19) $y = \left(1 + \dfrac{1}{x^4}\right)^x;$ 20) $y = \left(1+x^3\right)^{\cos x};$

21) $y \sin\left(x+y\right) - x = 0;$ 22) $x + 2\sqrt{y-x} + 4y - c = 0.$

20. 1) $y = \arcsin x + \arccos x;$ 2) $y = \dfrac{13^x}{13^x + 1};$

3) $y = \operatorname{tg} x - x + 4;$ 4) $y = \left(x^2 - 2x + 5\right)e^x;$

5) $y = e^{1+\ln^2 x};$ 6) $y = x \arccos x - \sqrt{1-x^2};$

7) $y = \sqrt{x} \sin 2x;$ 8) $y = \cos\left(3x^2 - 1\right) + \sin 4;$

9) $y=\left(x-\cos x\right)\ln\left(x-\cos x\right)$;   10) $y=x^3\operatorname{arctg}x^3$;

11) $y=\ln\left(x\sqrt{a^2-x^2}\right)$;   12) $y=e^{-x}\cdot\cos 2x$;

13) $y=\sqrt[3]{a+bx^2}$;   14) $y=\sin x\cdot\sin(x+\alpha)$;

15) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x^3+2}}$;   16) $y=\dfrac{5x+4}{\sqrt{x^2-5x-2}}$.

17) $y=\left(\operatorname{ctg}x\right)^{x^3}$;   18) $y=\left(\cos x\right)^{\operatorname{arctg}x}$.

19) $y=\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;   20) $y=\left(4+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$.

21) $e^{x+y}-xy=0$;   22) $\operatorname{tg}(x+y)-xy=0$.

21. 1) $y=\dfrac{4-x^2}{x}$;   2) $y=\dfrac{\cos x}{x}$;

3) $y=x\sin x+\cos x$;   4) $y=\left(x-1\right)e^x$;

5) $y=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}+\operatorname{tg}x$;   6) $y=\dfrac{1+\operatorname{ctg}x}{1-\operatorname{ctg}x}$;

7) $y=\operatorname{ctg}\dfrac{x+1}{2}+3$;   8) $y=\sin x-\dfrac{1}{3}\sin^3 x$;

9) $y=\sin\left(x+\sin x\right)$;   10) $y=\cos 2x\cdot\ln x$;

11) $y=x^2e^{-x^2}$;   12) $y=e^{ax}\cdot\cos bx$;

13) $y=\sin\left(\ln^2 x\right)$;   14) $14y=\left(e^{\cos x}-1\right)^2$;

15) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{3x^2-2}{3x^3+2}}$;   16) $y=\dfrac{3x-1}{\sqrt[3]{x^3+9x-1}}$;

17) $y=\left(\sin x\right)^{\sec x}$;   18) $y=\left(\operatorname{arctg}4x\right)^{x^2}$;

19) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;   20) $\operatorname{tg}y-x^2y=0$;

21) $x\sin y - y\cos x = 0;$ 22) $\operatorname{tg}\left(2x + y\right) - 3y + x = 0.$

22. 1) $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}};$ 2) $y = \dfrac{\sin x}{x};$

3) $y = e^x \cdot \ln x \cdot \log_2 x;$ 4) $y = e^x \cdot \sin x \cdot \operatorname{ctg} x;$

5) $y = \cos^3 2x + \cos 1;$ 6) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x};$

7) $y = x\arcsin\dfrac{x}{3};$ 8) $y = x\arcsin\dfrac{3x+1}{2};$

9) $y = \sin\left(x^2 + 3^x\right);$ 10) $y = 7^{x\sin\frac{x}{1-x}};$

11) $y = \lg\dfrac{x^2+3}{x^2+1};$ 12) $y = \ln\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}};$

13) $y = e^{-\sin^4 3x};$ 14) $y = e^{-x^2}\sin^3\left(3x+2\right);$

15) $y = \ln\sqrt{\dfrac{3x^2-4}{3x^3+4}};$ 16) $y = \dfrac{2x-7}{\sqrt{x^2+8x-14}};$

17) $y = x^{\sin(x+1)};$ 18) $y = \left(\operatorname{arcctg} x\right)^{\frac{1}{x}};$

19) $x^3 + y^3 + xy - a = 0;$ 20) $\operatorname{arctg}\left(x + y\right) - xy = 0.$

21) $x^3 + y^3 + 3xy = 0.$ 22) $x^2y - y^2x + \left(x - y\right)^3 = 0.$

23. 1) $y = \dfrac{2-3x^2}{1+2x};$ 2) $y = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}};$

3) $y = \sqrt{2x} - \dfrac{1}{\sqrt{2x}};$ 4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}};$

5) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}};$ 6) $y = \dfrac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}};$

7) $y = \cos\left(\cos x\right)$ 8) $y = x^2\sqrt{1-x^2};$

9) $y = 0{,}25\sin x^4;$ 10) $y = 2^{\cos x^2};$

11) $y=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$; 12) $y=e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln\dfrac{1}{x}$;

13) $y=x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{2}{x+1}}$; 14) $y=\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$;

15) $y=\left(2^{\operatorname{arctg}x}+\ln\left(1+x^2\right)\right)^4$; 16) $y=\ln\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right)$;

17) $y=\left(x^2+1\right)^{2x}$; 18) $y=\left(\ln^2 x\right)^x$;

19) $x^3+x^2y+y^2=0$; 20) $xy-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}=0$.

21) $y=\dfrac{1+x^2}{2x}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; 22) $y=\ln\cos\dfrac{2x+3}{3x+2}$.

24. 1) $y=\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{1}{x}$; 2) $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$;

3) $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; 4) $y=\ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

5) $y=x^3-2\sqrt{x}+\dfrac{4}{\sqrt{x}}$; 6) $y=\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}x+x$;

7) $y=\left(e^{\sin x}+3\right)^2$; 8) $y=\arcsin\sqrt{1-8x}$;

9) $y=x\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; 10) $y=\ln\left(ax^2+bx+c\right)$;

11) $y=\ln\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}\right)$; 12) $y=\dfrac{1}{x\cos 2x}$;

13) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$; 14) $y=x\cdot\operatorname{arctg}5x+\ln\left(\operatorname{tg}x\right)$;

15) $y=\left(2^{\arcsin x}+\arccos x\right)^4$; 16) $y=\arcsin\sqrt{1-4x^2}$;

17) $y=\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^3}}$; 18) $y=\left(1-x^2\right)^{\arcsin x}$;

19) $\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{a}=0$; 20) $x+y-e^y=0$;

21) $y\ln x - x\ln y - \ln xy = 0;$ 22) $y = \ln\dfrac{x}{1-\sqrt{x}}\cdot\arcsin 2x.$

25. 1) $y = \dfrac{2\sqrt{x} + x^{-0,2}}{\sqrt{5} - \sqrt[5]{x}};$ 2) $y = \dfrac{x^5}{e^x};$

3) $y = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}};$ 4) $y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2-5x}};$

5) $y = \dfrac{e^{\ln x} - e^{-\ln x}}{2};$ 6) $y = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x};$

7) $y = \ln\left(\cos\left(2x+3\right)\right);$ 8) $y = \cos x - x\sin x;$

9) $y = x^2 \operatorname{arcctg}\sqrt{x};$ 10) $y = e^x \ln\left(\sin x\right);$

11) $y = x\ln(\operatorname{tg} x);$ 12) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}};$

13) $y = \sqrt[3]{1 + x\sqrt{x+2}};$ 14) $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1};$

15) $y = e^{\arcsin\sqrt{1-x}};$ 16) $y = \ln\left(\sin\left(2^{x^2}\right)\right);$

17) $y = \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^x;$ 19) $y = \left(\operatorname{arcctg} x\right)^{x^2};$

19) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{a^2} = 0;$ 20) $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} - c = 0;$

21) $x + y + \operatorname{arctg} 3x = \arcsin 2y;$ 22) $y = \dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}}{x^2 - 2x + 3}.$

26. 1) $y = x^2\sin x + 2x\cos x;$ 2) $y = \dfrac{e^x + \sin x}{xe^x};$

3) $y = \left(3 + 5x^2\right)^3;$ 4) $y = x\sqrt{a+bx};$

5) $y = \dfrac{x}{\sqrt{a-bx}};$ 6) $y = \dfrac{x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x;$

7) $y = \operatorname{ctg}^2 x + 3;$ 8) $y = 2\operatorname{ctg}^2\left(x^2 + 3x\right);$

9) $y=\ln\left(\sin\dfrac{x-1}{x}\right)$; 10) $y=\ln\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$;

11) $y=e^x\arcsin x$; 12) $y=\sqrt[3]{2x^2+x-1}$;

13) $y=x\cdot\arcsin\dfrac{2x+1}{3}$; 14) $y=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

15) $y=\left(2^{\cos^2 x}+\sin^2 x\right)^4$; 16) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{2x\text{-}1}$;

17) $y=\left(\sin^2 2x\right)^{x^3}$; 18) $y=x^{x^{x^3}}$;

19) $y^3-\dfrac{x-y}{x+y}=0$; 20) $\ln y+\dfrac{x}{y}-a=0$;

21) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{3^x-3}{2}$; 22) $y=2\sqrt{x}-4\ln^2\left(2+\sqrt{x}\right)$.

27. 1) $y=5a^x-\sin x$; 2) $y=x^3+3^x$;

3) $y=x^2\cdot\sqrt[3]{6x-1}$; 4) $y=(x+2)\sqrt{x^2+4x}$;

5) $y=x\sqrt[3]{7-6x^2}$; 6) $y=\operatorname{tg}\dfrac{x+1}{2}$;

7) $y=3^{\operatorname{arctg}x^3}$; 8) $y=x^m\ln x$;

9) $y=\dfrac{\cos x}{3\sin^2 x}$; 10) $y=\cos^2 x+\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$;

11) $y=\arcsin(\sin x)$; 12) $y=\left(a+b\sqrt{x}\right)^{10}$;

13) $y=3^x e^{-x}$; 14) $y=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^2 x\right)$;

15) $y=\left(3^{\operatorname{arctg}2x}-\ln\left(1+4x^2\right)\right)^4$. 16) $y=\left(5^{\operatorname{tg}x}-x^2\right)^3$;

17) $y=\left(x^2+5\right)^{\operatorname{ctg}x}$; 18) $y=\left(1+x^2\right)^{\sin x}$;

19) $2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\ln\left(x^2+y^2\right)=0$; 20) $y-\dfrac{3}{10}\sin y-x=0$;

21) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+25}\right);$ 22) $y=\arccos\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2+16}}.$

28. 1) $y=3e^x+\ln x;$ 2) $y=x^7e^x;$

3) $y=3^xe^x;$ 1) 4) $y=\sqrt{1+5x^2};$

5) $y=\dfrac{\sqrt{3-x}}{x^3};$ 6) $y=\sqrt{\dfrac{3x+2}{3x-2}};$

7) $y=2^xe^x+\log_2 x^2;$ 8) $y=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}^2 x\right);$

9) $y=\dfrac{1}{\operatorname{tg} x+\sin x};$ 10) $y=\ln\dfrac{x^2}{1+x^2};$

11) $y=x^2\operatorname{arctg} x;$ 12) $y=5^{-x^2}+e^{\pi};$

13) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln\cos x;$ $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

15) $y=\left(\sec x\right)^{\frac{1}{x^2}}.$ 16) $y=x^{\sqrt[4]{x}};$

17) $y=\left(2^{\arcsin x}-\sqrt{1-x^2}\right)^5;$ 18) $y=\left(2^{\operatorname{tg}3x}+\dfrac{1}{\cos 3x}\right)^5.$

19) $a\cos^2\left(x+y\right)-6=0;$ 20) $x^y-y^x=0;$

21) $y=\dfrac{1}{4}\ln\left(x-1\right)\cdot\operatorname{arctg} x;$ 22) $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}\left(x-2\right)}{x^2}.$

29. 1) $y=5^x\left(x^2+3x-2\right);$ 2) $y=e^x\left(\cos x+\sin x\right);$

3) $y=x^2\sqrt{7-x^2};$ 4) $y=\left(x-1\right)\sqrt[3]{x+1};$

5) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}};$ 6) $y=\sin\dfrac{1}{x};$

7) $y=\ln\left(x^2-4x\right);$ 8) $y=\log_3\left(x^2-1\right);$

9) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}};$ 10) $y=\ln\dfrac{a+x}{a-x};$

11) $a^2 \arcsin \dfrac{x}{2}$; 12) $y = \ln\left(\sin \dfrac{x-1}{x}\right)$;

13) $y = 2^{\operatorname{arctg} x^3}$; 14) $y = x^m \ln x$;

15) $y = \left(4^{\arccos 2x} - \sqrt{1-x^2}\right)^5$; 16) $y = \ln\left(\arccos \dfrac{1}{x}\right)$.

17) $y = 2x^{\sqrt{x}}$; 18) $y = x^{\operatorname{ctg} x}$;

19) $\cos(xy) - x - y = 0$; 20) $x^4 + y^4 - x^2y^2 = 0$;

21) $y = \sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}} \cdot \arccos x$; 22) $y = \ln \sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$.

30. 1) $y = \dfrac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$; 2) $y = \dfrac{1-10^x}{1+10^x}$;

3) $y = \left(3+5x^2\right)^3$; 4) $y = x\sqrt{a+bx}$;

5) $y = \sin(\sin x)$; 6) $y = \sqrt{1+2\operatorname{tg} x}$;

7) $y = e^{\sqrt{x+1}}$; 8) $y = \sin\left(2^x\right)$;

9) $y = \arcsin x^2 + x$; 10) $y = 3x^2e^{-x}$;

11) $y = \sqrt{a^2-x^2} + a\arcsin \dfrac{x}{2}$; 12) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$;

13) $y = 2\operatorname{tg}^3\left(x^3+1\right)$; 14) $y = x^n \cdot \ln\left(x^3+1\right)$;

15) $y = \left(2^{\operatorname{ctg} 2x} + \dfrac{1}{\sin 2x}\right)^3$; 16) $y = \left(5^{\sin^2 x} - \cos 2x\right)^3$;

17) $y = (\cos x)^{x^2}$; 18) $y = (\sin x)^{\cos 2x}$;

19) $y - \cos(x+y) = 0$; 20) $1 + xe^y - y = 0$;

21) $y = \dfrac{(2x+1)\cdot\sqrt{x^2-x}}{x^2}$; 22) $y = \dfrac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$.

Задание 2. Найти производные первого и второго порядка функций $\left(\dfrac{dy}{dx} \quad \text{и} \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$.

1. 1) $y = x\sqrt{1+x^2}$; 2) $y = e^{-x}\cos x$;

3) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^2; \end{cases}$ 2) 4) $\begin{cases} x = 2t^3 + t, \\ y = \ln t + 1. \end{cases}$

2. 1) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

3) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin^2 t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = e^{2t} + 3, \\ y = e^{3t} + 2. \end{cases}$

3. 1) $y = (\arcsin x)^2$; 2) $y = \ln(2x-3)$;

3) $\begin{cases} x = at + b, \\ y = ct^2 + dt + e; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 1 + t^2, \\ y = \dfrac{t^3}{3} - 1. \end{cases}$

4. 1) $y = e^{x^2}$; 2) $y = \cos^2 t$;

3) $\begin{cases} x = \operatorname{ch} t, \\ y = \operatorname{sh} t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

5. 1) 1) $y = \ln\sqrt{1+x^2}$; 2) $x\ln y - e^y + 1 = 0$;

3) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \dfrac{1}{t}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = a(\sin t - t\cos t), \\ y = a(\cos t + t\sin t). \end{cases}$

6. 1) $y = 0,25x^2(2\ln x - 3)$; 2) $\operatorname{tg} x - \sqrt{4y+5} - y^2 = 0$;

3) $\begin{cases} x = \arccos\sqrt{t}, \\ y = 1 + \sqrt{t - t^2}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = t^2 + \ln t, \\ y = 2t^3 + 3t. \end{cases}$

7. 1) $y = x^3 \ln(x+1)$,

2) $\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{2y+3} = 0$;

3) $\begin{cases} x = e^t + 2t, \\ y = \arcsin t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = a\left(t - \sin t)\right), \\ y = b\left(1 - \cos t\right). \end{cases}$

8. 1) $y = \sqrt{x^2+1}$;

2) $2xy - \sin 2x - y^2 = 0$;

3) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = b\sin^3 t. \end{cases}$

9. 1) $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$;

2) $2y - \sin y - x^2 = 0$;

3) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} 3t, \\ y = \ln\left(1+9t^2\right). \end{cases}$

10. 1) 1) $\sin x - \operatorname{arctg} y = 0$;

2) $y = \cos^2 x$;

3) $\begin{cases} x = a \cdot \operatorname{tg} t, \\ y = t \sec t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = t^2 + t + 1, \\ y = t^3 + t^2 + 2. \end{cases}$

11. 1) $y = \ln\left(\operatorname{ctg} 4x\right)$;

2) $e^x - x - y^3 = 0$;

3) $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = 1 + \sin^3 t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

12. 1) $y = \sqrt[3]{\left(1-x\right)^2}$;

2) $\operatorname{ctg} x + \ln\sqrt{4y+1} = 0$;

3) $\begin{cases} x = \arcsin\left(t^2 - 1\right), \\ y = 1 + \arccos 2t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = \sec^2 t. \end{cases}$

13. 1) $y = x^{-1}\sqrt{1-x^2}$;

2) $e^x - x^2 - e^y = 0$;

3) $\begin{cases} x = t^5 + 2t - 1, \\ y = t^3 + 8t + 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = 1 + 8\sin^3 t. \end{cases}$

14. 1) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$;

2) $x^2 + y^2 - 2y = 0$;

3) $\begin{cases} x = \cos at, \\ y = \sin at; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = t - \ln t, \\ y = 3t^2 - t^3. \end{cases}$

15. 1) 1) $y = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\right);$

2) $x^2 y^2 - x^4 - 2y^4 = 0;$

3) $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^2}{2} + t, \\ y = \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{t} + 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$

16. 1) $y = \operatorname{arctg} x^2;$

2) $x^2 y + x^3 + y^3 + 1 = 0;$

3) $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = \dfrac{1}{3}t^3 - t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t. \end{cases}$

17. 1) $y = \cos x - \dfrac{1}{3}\cos^3 x;$

2) $x^2 - 6y + y^3 = 0;$

3) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 + \sin^3 t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = 3t - t^3, \\ y = 3t^2 + 5. \end{cases}$

18. 1) $y = \dfrac{x-1}{x+1} e^{-x};$

2) $x^2 - xy + 4y^2 - 16 = 0;$

3) $\begin{cases} x = t - \ln(\cos t), \\ y = t + \ln(\sin t); \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = 1 + \sin^2 t, \\ y = \cos 2t. \end{cases}$

19. 1) $y = x^2 \ln x;$

2) $x^2 + 4xy - y^2 - 9 = 0;$

3) $\begin{cases} x = t^2 + 3, \\ y = e^{t^3} - 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = 2(1 - \sin t), \\ y = 1 + 4\cos t. \end{cases}$

20. 1) $y = x \cdot \operatorname{arctg} x;$

2) $x^2 - 2xy - y^3 - 1 = 0;$

3) $\begin{cases} x = e^{2t} + 1, \\ y = 1 + \cos t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

21. 1) $y = x^3 e^{x^2}$;

2) $x + \sqrt{xy} + y - a = 0$;

3) $\begin{cases} x = t^3 + 8t - 1, \\ y = t^5 + 2t + 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t. \end{cases}$

22. 1) $y = \ln\left(\operatorname{ctg} 2x\right)$;

2) $\sin\left(2x + 3y\right) - 2y = 0$;

3) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin^2 t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = b\sin^2 t. \end{cases}$

23. 1) $y = x^3 \ln x$;

2) $e^{xy} + x^2 + y + 2 = 0$;

3) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$

24. 1) $y = \operatorname{arctg} x$;

2) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$;

3) $\begin{cases} x = 3\cos^2 t, \\ y = 2\sin^3 t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

25. 1) $y - \sin(x + 2y) = 0$;

2) $x^2 + y^2 - 5e^x = 0$;

3) $\begin{cases} x = a\left(1 - t^2\right), \\ y = b\left(t + t^3\right); \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$

26. 1) 1) $y = xe^{-x^2}$;

2) $y = xe^{-x^2}$;

3) $\begin{cases} x = t + \ln\left(\cos t\right), \\ y = t - \ln\left(\sin t\right); \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = 1 + \ln t, \\ y = \ln\left(t + t^{-1}\right). \end{cases}$

27. 1) $y = x\sqrt[x]{e}$;

2) $y - x - \operatorname{arctg} y = 0$;

3) $\begin{cases} x = 1 + \operatorname{ctg} t, \\ y = \left(\cos 2t\right)^{-1}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = t^3. \end{cases}$

28. 1) $y = e^{\operatorname{arctg} x}$;

2) $x^2 + 5xy + y^2 - x + y = 0$;

3) $\begin{cases} x = \sin 0{,}5t, \\ y = \cos t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = 1 + \ln t, \\ y = t^2 - 1. \end{cases}$

29. 1) $y = e^x \sin x$;

2) $y - \cos(x + y) = 0$;

3) $\begin{cases} x = \cos\dfrac{t}{2}, \\ y = t - \sin t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \ln\left(1 - t^2\right). \end{cases}$

30. 1) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$;

2) $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$;

3) $\begin{cases} x = 2t - t^3, \\ y = 2t^2 + 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right), \\ y = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right). \end{cases}$

Задание 3. Найти производную k -го порядка функции $y = f(x)$.

1. 1) $y = \ln x, \quad k = n$;

2) $y = \dfrac{1 + x}{\sqrt{x}}, \quad k = 4$.

2. 1) $y = e^{x/2}, \quad k = n$;

2) $y = x^2 \sin\dfrac{1}{x}, \quad k = 2$.

3. 1) $y = \sin 3x, \quad k = n$;

2) $y = \sqrt{x}, \quad k = 11$.

0

4. 1) $y = 2^{3x}, \quad k = n$;

2) $y = x^2 \log_3 x, \quad k = 2$.

5. 1) $y = \cos e^x + \sin e^x, \quad k = 2$; 2) $y = e^{-x}, \quad k = n$.

6. 1) $y = \cos^2 x, \quad k = n$;

2) $y = \sin x^2, \quad k = 3$.

7. 1) $y = \ln(ax + b), \quad k = n$;

2) $y = \ln(\sin x), \quad k = 3$.

8. 1) $y = \cos^2 x, \quad k = n$;

2) $y = \cos x^2, \quad k = 3$.

9. 1) $y = \dfrac{1}{ax + b}, \quad k = n$;

2) $y = x \sin^2 x, \quad k = 4$.

10. 1) $y = \sin^2 x, \quad k = n$;

2) $y = x^n \sqrt{x}, \quad k = 5$.

11. 1) $y = x \ln x, \quad k = n$;

2) $y = \dfrac{1}{2} \ln^2 x, \quad k = 3$.

12. 1) $y=\log_a x, \quad k=n;$ 2) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}, \quad k=3.$

13. 1) $y=\dfrac{1}{1+x}, \quad k=n;$ 2) $y=x+\sin 2x, \quad k=4.$

14. 1) $y=\sin ax, \quad k=n;$ 2) $y=2^x+2^{-x}, \quad k=6.$

15. 1) $y=\ln(1+x), \quad k=n;$ 2) $y=e^x+x^2, \quad k=4.$

16. 1) $y=\cos 2x, \quad k=n;$ 2) $y=\arcsin 2x, \quad k=4.$

17. 1) $y=\sin 2x, \quad k=n;$ 2) $y=\dfrac{x^2}{1-x}, \quad k=6.$

18. 1) $y=2^{3x+5}, \quad k=n;$ 2) $y=\dfrac{1}{3-x}, \quad k=5.$

19. 1) $y=a^x, \quad k=n;$ 2) $y=\ln(\cos x), \quad k=3.$

20. 1) $y=\lg x, \quad k=n;$ 2) $y=\operatorname{arcctg} x, \quad k=3.$

21. 1) $y=\dfrac{1}{2x+1}, \quad k=n;$ 2) $y=x^5\ln x, \quad k=4.$

22. 1) $y=\dfrac{1+x}{1-x}, \quad k=n;$ 2) $y=x^4\ln x, \quad k=4.$

23. 1) $y=x^6+e^{2x}, \quad k=4;$ 2) $y=\sin 5x, \quad k=4.$

24. 1) $y=\sqrt[5]{x^3}, \quad k=3;$ 2) $y=\sin^2 x, \quad k=6.$

25. 1) $y=e^{-x^2}, \quad k=3;$ 2) $y=\cos(ax+b), \quad k=4.$

26. 1) $y=x\sin^2 x, \quad k=4;$ 2) $y=\ln(2+x), \quad k=5.$

27. 1) $y=x^2e^{2x}, \quad k=10;$ 2) $y=(1+x^2)\operatorname{arctg} x, \quad k=2.$

28. 1) $y=x\log_2 x, \quad k=7;$ 2) $y=x^3\sin 2x, \quad k=3.$

29. 1) $y=\dfrac{x}{x+1}, \quad k=6;$ 2) $y=(\arcsin x)^2, \quad k=2.$

30. 1) $y=\dfrac{x^2}{1-x}, \quad k=5;$ 2) $y=x^2\sin 2x, \quad k=3.$

Задание 4. Найти дифференциал функции $y = f(x)$.

1. 1) $y = \dfrac{1}{x^2}$; 2) $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$.

2. 1) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; 2) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$.

3. 1) $y = \sqrt{1 - x^2}$; 2) $y = (\arcsin x)^2$.

4. 1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \cos(a - bx)$.

5. 1) $y = \dfrac{\cos x}{3\sin^2 x}$; 2) $y = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{4}\right)\right)$.

6. 1) $y = \arcsin\dfrac{x}{3}$; 2) $y = \operatorname{ctg} x + \dfrac{1}{\sin x}$.

7. 1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; 2) $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$.

8. 1) $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$; 2) $y = \dfrac{a}{x} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$.

9. 1) $y = \operatorname{arctg} e^x$; 2) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{4x - 1}$.

10. 1) $y = \sin\sqrt{x}$; 2) $y = ax - e^{-bx}$.

11. 1) $y = 1 - \cos x$; 2) $y = a\sin(bx + c)$.

12. 1) $y = x\ln x - x$; 2) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{4x + 1}$.

13. 1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; 2) $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x$.

14. 1) $y = \cos^2\sqrt{x}$; 2) $y = x^3 \sin 3x$.

15. 1) $y = \operatorname{arctg} e^{-2x}$; 2) $y = \sqrt{1 + \cos^2 x}$.

16. 1) $y = \sin(\ln x)$; 2) $y = \ln(\operatorname{tg}(ax + b))$.

17. 1) $y = \cos(\ln x)$; 2) $y = \sin x - x\cos x$.

18. 1) $y = 2^{\arcsin x}$; 2) $y = \cos(x^2 + 3x)$.

19. 1) $y = 5^{\ln(\mathrm{tg}x)}$; 2) $y = \sqrt{1 + \mathrm{arctg}x}$.

20. 1) $y = \sqrt{1 + \sin^2 x}$; 2) $y = \cos^2 \sqrt{x}$.

21. 1) $y = \cos\dfrac{x}{2}$; 2) $y = x + \ln x$.

22. 1) $y = ax^2/2$; 2) $y = e^{-2x}$.

23. 1) $y = \dfrac{1}{x^2}$; 2) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

24. 1) $y = \dfrac{x}{1-x}$; 2) $y = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$.

35. 1) $y = e^{-2x}$; 2) $y = 5^{\ln(\mathrm{tg}x)}$.

26. 1) $y = 2^{-\cos^{-1} x}$; 2) $y = \dfrac{\cos x}{1 - x^2}$.

27. 1) $y = \sqrt{x} + 1$; 2) $y = \sqrt[5]{x^3}$.

28. 1) $y = e^{-x^2}$; 2) $y = \arccos\left(2^x\right)$.

29. 1) $y = 2^{-\frac{1}{\cos x}}$; 2) $y = x \cdot 10^x$.

30. 1) $y = \mathrm{tg}x^3$; 2) $y = e^{1-x^3}$.

Задание 5. Вычислить приближенное значение выражения с помощью дифференциала.

1. $\sqrt[3]{9}$. **2.** $(1{,}03)^5$. **3.** $\sqrt{1{,}006}$.

4. $\cos 61^\circ$. **5.** $e^{0{,}1}$. **6.** $\ln 0{,}9$.

7. $\mathrm{ctg}\, 47^\circ$. **8.** $\sqrt[3]{26{,}19}$. **9.** $\sin 29^\circ$.

10. $\sqrt[4]{16{,}64}$. **11.** $\sqrt{8{,}76}$. **12.** $\mathrm{arctg} 0{,}97$.

13. $\mathrm{arctg} 1{,}05$. **14.** $\sqrt[3]{26}$. **15.** $\sqrt{124}$.

16. $\sqrt[5]{33}$. **17.** $\sqrt[4]{82}$. **18.** $\mathrm{tg} 44^\circ$.

19. $\mathrm{arctg} 0{,}98$. **20.** $\cos 91^\circ$. **21.** $\arcsin 0{,}54$.

22. $\sqrt[4]{17}$. **23.** $\sqrt[3]{70}$. **24.** $\sqrt[3]{200}$.

25. $\sqrt[3]{10}$. **26.** $\cos 61^\circ$. **27.** $\mathrm{tg}44^\circ$.

28. $\mathrm{tg}\,46^\circ$. **29.** $e^{0,2}$. **30.** $\mathrm{arctg}1{,}05$.

Задание 6. Вычислить с помощью правила Лопиталя.

1. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\mathrm{ctg}\,x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^2 x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\ln x\cdot\ln(x-1)\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\arcsin x\ \cdot\mathrm{ctg}\,x\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{tg}\,x\right)^{2\cos x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,x}-1}{2\sin^2 x-1}$.

2. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{ctg}\,x}{\ln 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x^3}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)\ln\dfrac{x-3}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\ \ \mathrm{ctg}\,5x\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos mx\right)^{\frac{n}{x^2}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2)e^x+x+2}{x^2}$.

3. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(\cos(x-1)\right)}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\ln x\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\ln x\cdot\ln(x-1)\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos x\right)^{\mathrm{tg}\,x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$.

4. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-\sin x}{x-\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)\ln\dfrac{x+2}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)\ln\dfrac{x-3}{x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{ctg}\,x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

5. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^5}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\,\mathrm{tg}\,x$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\mathrm{ctg}\,x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 3x}{x\cos x}$.

6. 1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x-2\,\mathrm{tg}\,x}{1+\cos 4x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$;

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{tg}\,x$. 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)\ln\frac{x+2}{x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}\,x)^x$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^2}$.

7. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+2\ln(\sin x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha}\ln x,\quad \alpha>0$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\,\mathrm{tg}\,x$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^2}\quad (a>0)$.

8. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,2x-2x}{x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\mathrm{ctg}\,\pi x}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-ax}\right),\quad a>0$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(x-\pi/2)\,\mathrm{tg}\,x$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{x/(x-1)}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

9. 1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{ch}\,x-1}{1-\cos x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(x-\pi/2)}{\mathrm{tg}\,x}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-2x}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha}\ln x,\quad \alpha>0$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

10. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x-\ln(1+2x)}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2-x+4}{x^3+x^2+4x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-ax}\right)$, $a>0$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin x}$.

11. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg} 3x}{\cos x-\cos^3 x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-2x}\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{2x}{x-1}}$; 6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$.

12. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin 0,5\pi x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 0,5\pi x}{\ln(1-x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2e^{\frac{1}{x^2}}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$.

13. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2e^{\frac{1}{x^2}}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-2}}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\ln(1-x)}{\ln\sin(1-x)}$.

14. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

15. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} x)^x$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\operatorname{th} x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

16. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^n-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln x-\sqrt{x}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 2x\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

17. 1) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{ctg} x-1}{\sin 4x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x^2-x-6}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0{,}5\pi}(\sin 2x)^{\cos x}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} x)^x$;

5) $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt[x]{x^5}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^3-x^5}{4x-x^4}$.

18. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin 3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$;

5) $\lim\limits_{x\to -2}(2x+5)^{\frac{3}{x+2}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^2}$.

19. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin 2x)^{\cos x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

20. 1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x-\sec x)$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\ln x}$, $x<1$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{3}{4+\ln x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to -1}(2x+3)^{\frac{1}{x+1}}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{a}{x}\right)$.

21. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

22. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+x^{-1}\right)}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\ln x}$, $x<1$;

5) $\lim\limits_{x\to 4}(5-x)^{\frac{3x}{x-4}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\ln(1+x)}{e^{3x}-1}$.

23. 1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\ln x}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2-x}}$;

6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{1-\operatorname{tg} x}$.

24. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{x}{x-1}}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}x^4\ln x$.

25. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x}{3x^2+x^5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}^2 x-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

26. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(x\operatorname{ctg} 2x)$;

3) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{x}{x-2}}$;

6) $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x)\operatorname{tg} 2x$.

27. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+1/x)}{\operatorname{arctg} x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left((1-\cos x)\operatorname{ctg} x\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{5x}{x-1}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$.

28. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^{ax}},\quad a>0$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(x\ \operatorname{ctg}\pi x)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(x\ \operatorname{ctg} 2x)$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

29. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\operatorname{tg}7x)}{\ln(\operatorname{tg}2x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\ \cdot\operatorname{ctg} x)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}((1-\cos x)\ \operatorname{ctg} x)$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+nx)^{\frac{1}{x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$.

30. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+\ln x-1}{e^x-e}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(x\ \operatorname{ctg} 5x)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(x\ \operatorname{ctg}\pi x)$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} 2x)^{\sin x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 6}(7-x)^{\frac{x}{x-6}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln(\sin x)}$.

Задание 7. Найти экстремумы, интервалы возрастания и убывания функции.

1. 1) $y=\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}$; 2) $y=\ln x+\dfrac{1}{x}$.

2. 1) $y=xe^{-x}$; 2) $y=x\ln^2 x$.

3. 1) $y=x^4-4x^3+6x^2-4x$; 2) $y=(x-5)\ e^x$.

4. 1) $y=\dfrac{x^3}{(x-2)\ (x+3)}$; 2) $y=\dfrac{2x+1}{1-3x}$.

5. 1) $y=\ln\left(x^2+1\right)$; 2) $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}$.

6. 1) $y=\dfrac{2x^2-1}{x^4}$; 2) $y=2x+\operatorname{arctg} x$.

7. 1) $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$; 2) $y=3x^4-4x^3+1$.

8. 1) $y=x^3-9x^2+15x+3$; 2) $y=\ln\left(1+x\right)-x+\dfrac{x^2}{2}$.

9. 1) $y=x^3-6x^2+12x+48$; 2) $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

10. 1) $y=x+\sqrt{3-x}$; 2) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$.

11. 1) $y=x^3e^{-x}$; 2) $y=2x^3-6x^2-18x+7$.

12. 1) $y=\dfrac{x}{x-2}$; 2) $y=\left(x-1\right)^2\ \left(x+1\right)^3$.

13. 1) $y=x^3-3x^2+3x+2$; 2) $y=x^5-5x^4+5x^3-1$.

14. 1) $y=\dfrac{3-2x}{x+1}$; 2) $y=\dfrac{\ln x+2}{x}$.

15. 1) $y=\dfrac{e^x}{x}$; 2) $y=3x^5-125x^3+2160x$.

16. 1) $y=x-\ln\left(1+x^2\right)$; 2) $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

17. 1) $y=2x^3+3x^2-12x+5$; 2) $y=x-\ln\left(1+x\right)$.

18. 1) $y=x-\ln\left(1+x\right)$; 2) $y=2x^3-3x^2$.

19. 1) $y=x-\operatorname{arctg} x$; 2) $y=\dfrac{2x-1}{2-4x}$.

20. 1) $y=2x^2-\ln x$; 2) $y=\dfrac{x^3}{x^2+3}$.

21. 1) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ 2) $y=x^2e^x$.

22. 1) $y = x\sqrt{1-x^2}$; 2) $y = \dfrac{16}{x\,\left(4-x^2\right)}$.

23. 1) $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; 2) $y = 2^{x^2-4x}$.

24. 1) $y = \dfrac{(x-1)\,(3-x)}{x^2}$; 2) $y = 2x^3-3x^2+1$.

25. 1) $y = \dfrac{x}{x+1}$; 2) $y = 3x-x^3$.

26. 1) $y = e^{-x}-e^{-2x}$; 2) $y = x-2\ln x$.

27. 1) $y = \dfrac{1}{3}x^3-x^4$; 2) $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

28. 1) $y = \dfrac{2}{3}x^3-2x+1$; 2) $y = xe^x$.

29. 1) $y = x+x^{-1}$; 2) $y = 3x-x^3$.

30. 1) $y = \dfrac{2}{3}x^3-2x+1$; 2) $y = \ln x-\operatorname{arctg} x$.

Задание 8. Найти наибольшее $\left(\max\limits_{[a;\,b]} f(x)\right)$ и наименьшее $\left(\min\limits_{[a;\,b]} f(x)\right)$ значения функции $y = f(x)$ на указанном отрезке.

1. 1) $y = -3x^4+6x^2$ на отрезке $[-2;\ 2]$;

2) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\cos x$ на отрезке $[0;\ \pi/2]$.

2. 1) $y = x+2\sqrt{x}$ на отрезке $[0;\ 4]$;

2) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1\text{-}x}{1+x}$ на отрезке $[0;\ 1]$.

3. 1) $y = x^4 - 8x^2 + 3$ на отрезке $[-2;\ 2]$;

2) $y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2$ на отрезке $[0;\ 2]$.

4. 1) $y = x^4 - 2x^2$ на отрезке $[-2;\ 2]$;

2) $y = \sqrt[3]{2x^2 + 1}$ на отрезке $[-2;\ 1]$.

5. 1) $y = x^4 - 2x^2$ на отрезке $[-3;\ 2]$;

2) $y = x^3 - 12x + 7$ на отрезке $[0;\ 3]$.

6. 1) $y = \operatorname{tg} x - x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$;

2) $y = \frac{x-4}{x^2+9}$ на отрезке $[-4;\ 6]$.

7. 1) $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ на отрезке $[-5;\ 1]$;

2) $y = \frac{x-5}{x^2+11}$ на отрезке $[-3;\ 7]$.

8. 1) $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ на отрезке $[0;\ 1]$;

2) $y = 3x^4 - 16x^2 + 2$ на отрезке $[-3;\ 1]$.

9. 1) $y = x^4 - 8x^2 + 8$ на отрезке $[-2;\ 2]$;

2) $y = x^3 - 3x + 1$ на отрезке $[1/2;\ 2]$.

10. 1) $y = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-2;\ 1]$;

2) $y = \frac{x-1}{x+1}$ на отрезке $[0;\ 5]$.

11. 1) $y = x^3 - 18x^2 + 96x$ на отрезке $[0;\ 9]$;

2) $y = x^4 - 8x^2 + 3$ на отрезке $[-2;\ 2]$.

12. 1) $y = \frac{4-x^2}{4+x^2}$ на отрезке $[-1;\ 3]$;

2) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке $[0;\ 3]$.

13. 1) $y = (x-2)^3(x+1)^2$ на отрезке $[-1;\ 2]$;

2) $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на отрезке $[-2;\ 1]$.

14. 1) $y = \dfrac{x+6}{x^2+13}$ на отрезке $[-5;\ 5]$;

2) $y = \dfrac{x}{2} + \cos x$ на отрезке $[\pi/2;\ \pi]$.

15. 1) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ на отрезке $[-1;\ 2]$.

2) $y = \operatorname{tg} x + x$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

16. 1) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ на отрезке $[0;\ 4]$;

2) $y = 2x - \sqrt{x}$ на отрезке $[0;\ 4]$.

17. 1) $y = \sin 2x - x$ на отрезке $[-\pi/2;\ \pi/2]$;

2) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ на отрезке $[-2;\ 2]$.

18. 1) $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x + 3$ на отрезке $[-1;\ 2]$;

2) $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$ на отрезке $[-1;\ 2]$.

19. 1) $y = \dfrac{x}{2} + \cos x$ на отрезке $[0;\ \pi/2]$;

2) $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$ на отрезке $[0;\ 4]$.

20. 1) $y = \sqrt{4 - x^2}$ на отрезке $[-2;\ 2]$;

2) $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{4}{x}$ на отрезке $[-5;\ -1]$.

21. 1) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ на отрезке $[-1;\ 1]$;

2) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \sin x$ на отрезке $[0;\ \pi/2]$.

22. 1) $y = x + \sqrt{x}$ на отрезке $[0;\ 4]$;

2) $y = 2x^2 - \ln x$ на отрезке $[1/e;\ e]$.

23. 1) $y = x^3 - 3x + 5$ на отрезке $\left[-3;\ \dfrac{5}{2}\right]$;

2) $y = x^5 - x^3 + x + 2$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

24. 1) $y = \sqrt{100 - x^2}$ на отрезке $[-6;\ 8]$;

2) $y = x^3 - 3x + 1$ на отрезке $[0;\ 3]$.

25. 1) $y = 3 - x^2$ на отрезке $[-1;\ 3]$;

2) $y = \dfrac{x}{8} + \dfrac{2}{x}$ на отрезке $[1;\ 6]$.

26. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ на отрезке $[-1/2;\ 1/2]$.

2) $y = x^2 - 6\sqrt[3]{x}$ на отрезке $[0;\ 8]$.

27. 1) $y = 3x^4 - 16x^3 + 5$ на отрезке $[-3;\ 1]$;

2) $y = x^5 - 5x^3 + 10x + 1$ на отрезке $[-1;\ 2]$;

28. 1) $y = \dfrac{x - 3}{x^2 + 16}$ на отрезке $[-5;\ 5]$;

2) $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x}$ на отрезке $[-5;\ -1]$.

29. 1) $y = -3x^4 + 6x^2 - 1$ на отрезке $[-3;\ 2]$;

2) $y = x - 2\sqrt{x - 2} - 3$ на отрезке $[2;\ 11]$.

30. 1) $y = 2x - \sqrt{x}$ на отрезке $[0;\ 9]$;

2) $y = 9x^2 - 3x^2$ на отрезке $[0;\ 3]$.

Задание 9. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции $y = f(x)$.

1. 1) $y = xe^x$; 2) $y = 2x^2 + 3x - 1$.

2. 1) $y=3x^3-x$; 2) $y=\ln\left(x^2-1\right)$.

3. 1) $y=x^4-8x^3+24x^2$; 2) $y=-x^4-2x^3+36x^2+x$.

4. 1) $y=xe^{-x}$; 2) $y=\sqrt[3]{x^5}$.

5. 1) $y=x^3-3x^2-9x+9$; 2) $y=\left(x+2\right)^6+2x+2$.

6. 1) $y=3x^2-2$; 2) $y=\dfrac{x^2}{x^2+12}$.

7. 1) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$; 2) $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

8. 1) $y=x^5-10x^2+x+3$; 2) $y=x^4+8x^3+18x^2+8$.

9. 1) $y=\left(x-4\right)^5+4x+4$; 2) $y=\dfrac{1}{x+4}$.

10. 1) $y=\sqrt[3]{x^2}$; 2) $y=\dfrac{x^3}{x^2+3}$.

11. 1) $y=x^3-6x^2+12x+4$; 2) $y=x^4-6x^2+5$.

12. 1) $y=\left(x+1\right)^4$; 2) $y=3x^3-x$.

13. 1) $y=e^{-x^2}$; 2) $y=\dfrac{x^3}{x^2+12}$.

14. 1) $y=x^2\ln x$; 2) $y=\dfrac{8}{4+x^2}$.

15. 1) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$; 2) $y=\sqrt[3]{x}+2$.

16. 1) $y=\dfrac{1}{x+3}$; 2) $y=\sqrt[3]{x-1}$.

17. 1) $y=\ln\left(1+x^3\right)$; 2) $y=-x^3+15x^2-x-250$.

18. 1) $y=x^4+6x^2$; 2) $y=\dfrac{x}{x^2+16}$.

19. 1) $y=3x^4-8x^3+6x^2+12;$ 2) $y=2x^3-12x^2+18x.$

20. 1) $y=2x^2-\ln x;$ 2) $y=e^{-\frac{x^2}{4}}.$

21. 1) $y=x^4-6x^2+5;$ 2) $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}.$

22. 1) $y=\operatorname{arctg} x-x;$ 2) $y=\ln\left(x^2-4x+8\right).$

23. 1) $y=x^3+1;$ 2) $y=\ln x/x.$

24. 1) $y=(x+2)^6+2x+2;$ 2) $y=\ln\left(x^2-4\right).$

25. 1) $y=x^3-5x^2+3x-5;$ 2) $y=\ln\left(x^2+4x\right).$

26. 1) $y=\sqrt[3]{x+2};$ 2) $y=\ln\left(2x^2+3\right).$

27. 1) $y=x^4-12x^3+48x^2-50;$ 2) $y=e^{2x-x^2}.$

28. 1) $y=\ln\left(1+x^3\right);$ 2) $y=x^3e^{-x}.$

29. 1) $y=3x^5-5x^4+3x-2;$ 2) $y=x^2e^{-x}.$

30. 1) $y=x^2+x^4;$ 2) $y=x-\ln(x+1).$

Задание 10. Найти асимптоты графика функции $y=f(x)$.

1. $y=x+\ln x.$

2. $y=xe^x.$

3. $y=\ln(1+x).$

4. $y=\ln(x-1).$

5. $y=\sqrt{x^2-1}.$

6. $y=\dfrac{1}{(x-2)^2}.$

7. $y=\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2-4x}.$

8. $y=\dfrac{x}{x^2-4x+3}.$

9. $y=\dfrac{x^2+5}{x^2-1}+2x.$

10. $y=\dfrac{2x}{x-1}.$

11. $y=\dfrac{2x-1}{x-1}.$

12. $y=\dfrac{2x-1}{3x}.$

13. $y=\dfrac{1}{x-1}$.

14. $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$.

15. $y=\dfrac{1}{(x+2)^2}$.

16. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$.

17. $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}$.

18. $y=\dfrac{3x^2}{x^2+5}$.

19. $y=x+e^{-x}$.

20. $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$.

21. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

22. $y=\dfrac{x}{2x-1}+x$.

23. $y=\dfrac{3}{x}$.

24. $y=\dfrac{1}{2x^2+x-1}$.

25. $y=\dfrac{2x^2}{1+x}$.

26. $y=xe^{1/x}$.

27. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

28. $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$.

29. $y=\dfrac{x^2+1}{2x+3}$.

30. $y=\dfrac{3x+1}{x+1}$.

Задание 11. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и построить график, используя результаты исследования.

1. 1) $y=\ln\left(9-x^2\right)$; 2) $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

2. 1) $y=\ln\left(x^2+1\right)$; 2) $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$.

3. 1) $y=x-\ln x$; 2) $y=\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$.

4. 1) $y = x - \ln(x+1)$; 2) $y = (x+2)e^{-x}$.

5. 1) $y = \ln(x^2 - 4)$. 3) $y = \dfrac{(x+1)(2-x)}{2x-3}$.

6. 1) $y = \dfrac{x^3}{5} - \dfrac{6}{5}x^2 + 5$; 2) $y = x^3 e^{-4x}$;

7. 3) $y = \dfrac{x^2-9}{x^2-4}$. 1) $y = xe^{-x}$;

8. 3) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$. 3) $y = e^{\frac{1}{x+2}}$.

9. 1) $y = \dfrac{2x}{x^2-1}$; 2) $y = e^{2x-x^2}$.

10. 1) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$; 2) $y = \ln(2x^2+3)$.

11. 1) $y = \dfrac{x^2}{x-2}$; 2) $y = x^2 e^{-x}$.

12. 1) $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2$; 2) $y = \ln(1-x^2)$.

13. 1) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$; 2) $y = x - \ln x$.

14. 1) $y = \dfrac{6x}{x^2+1}$; 2) $y = e^{x^2+2x}$.

15. 1) $y = \dfrac{-x^2+3x-1}{x}$; 2) $y = e^{x^2-2x}$.

16. 1) $y = \dfrac{x-1}{x^2-4}$; 2) $y = e^{\frac{1}{x+2}}$.

17. 1) $y = (x+1)^2(x-2)$; 2) $y = xe^{-x^2}$.

18. 1) $y = \dfrac{6x^2 - x^3}{9}$; 2) $y = x - \ln(x+1)$.

19. 1) $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$; 2) $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$.

20. 1) $y=\dfrac{4x}{x^2+4}$; 2) $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

21. 1) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$; 2) $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$.

22. 1) $y=\dfrac{3x^2}{3x-1}$; 2) $y=\dfrac{x^2}{2}-\ln x$.

23. 1) $y=x+\dfrac{1}{x}$; 2) $y=x^2e^{-x^2}$.

24. 1) $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$; 2) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

25. 1) $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$; 2) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$.

26. 1) $y=\dfrac{2}{x^2+4}$; 2) $y=\dfrac{(x+1)^2}{x-2}$.

27. 1) $y=x^2+\dfrac{16}{x}$; 2) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

28. 1) $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$; 2) $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

29. 1) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$; 2) $y=3x+\dfrac{1}{3x}$.

30. 1) $y=\dfrac{x}{x^2-4}$; 2) $y=\dfrac{3x-2}{5x^2}$.

Задание 12. Разложить функцию $y=f(x)$ по формуле Тейлора (Маклорена) в окрестности заданной точки $x=x_0$.

1. $y=1/x,\ x_0=-1.$ **2.** $y=\ln x,\ x_0=1.$

3. $y=xe^x,\ x_0=0.$ **4.** $y=\sqrt[3]{x},\ x_0=1.$

5. $y=\sqrt{x},\ x_0=4.$

6. $y=1/x,\ x_0=3.$

7. $y=\operatorname{ch}x,\ x_0=0.$

8. $y=xe^{-2x},\ x_0=0.$

9. $y=x^3\ln x,\ x_0=1.$

10. $y=\sin x,\ \ x_0=\pi/2.$

11. $y=\operatorname{arctg}x,\ x_0=0.$

12. $y=\sin^2 x,\ x_0=0.$

13. $y=\cos x,\ \ x_0=\pi/2.$

14. $y=\cos 2x,\ x_0=0.$

15. $y=e^{\frac{x}{2}},\ \ x_0=0.$

16. $y=\sin 2x,\ x_0=0.$

17. $y=\dfrac{1}{1-x},\ \ x_0=0.$

18. $y=\arcsin x,\ x_0=0.$

19. $y=\sqrt{x},\ x_0=1.$

20. $y=2^x,\ x_0=1.$

21. $y=e^x,\ x_0=2.$

22. $y=\operatorname{sh}x,\ x_0=0.$

23. $y=\cos^2 x,\ \ x_0=\pi/4.$

34. $y=\dfrac{1}{x^2},\ \ x_0=1.$

25. $y=e^x,\ x_0=-2.$

26. $y=\cos x,\ \ x_0=\pi/4.$

27. $y=\dfrac{1}{x},\ x_0=-3.$

28. $y=e^{x^2},\ x_0=0.$

29. $y=\cos^2 x,\ x_0=0.$

30. $y=e^{-x^2},\ x_0=0.$

Задание 13. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$.

1. $y=\ln(2x+4),\quad M_0\left(-\dfrac{1}{2};\ \ln 3\right).$

2. $y=\dfrac{1}{1-x^2},\ \ M_0(x_0;y_0).x_0=-2.$

3. $y=x^3-4x^2+6x+6,\ \ M_0(x_0;y_0).x_0=2.$

4. $y=x^2\ln x,\quad M_0\left(e;e^2\right).$

5. $y=x^2e^{-x},\quad M_0\left(1;\ \dfrac{1}{e}\right).$

6. $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1,\quad M_0\left(3;\,1_0\right).$

7. $\begin{cases} x=2\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$ в точке $M_0\left(x_0;y_0\right)$ при $t_0=\pi/4$.

8. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2+9},\quad M_0\left(0;\ \dfrac{1}{9}\right).$

9. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1,\quad M_0\left(1;\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$

10. $y=\operatorname{tg}x,\quad M_0\left(\pi/4;\,1\right).$

11. $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{18}=1,\quad M_0\left(2;\,3\right).$

12. $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t \end{cases}$ в точке $M_0\left(x_0;y_0\right)$ при $t_0=3\pi/4$.

13. $y=x\sqrt{x-1},\quad M_0\left(2;\,2\right).$

14. $x^2+y^2=1,\quad M_0\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right).$

15. $y=x^2-3x+4,\quad M_0\left(0;\,4\right).$

16. $y=4x-x^2,\quad M_0\left(4;\,0\right).$

17. $y=\operatorname{tg}2x,\quad M_0\left(0;\,0\right).$

18. $\begin{cases} x=t^2, \\ y=t^3 \end{cases}$ в точке $M_0\left(x_0;y_0\right)$ при $t_0=2$.

19. $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$ в точке $M_0\left(x_0;y_0\right)$ при $t_0=\pi/4$.

20. $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{8}=1,\quad M_0\left(-9;\,-8\right).$

21. $y = x^2 - 3x + 5, \quad M_0(2;\ 3).$

22. $y = 4x + x^2, \quad M_0(-3;\ -3).$

23. $y = x^2 - 2x + 3, \quad M_0(2;\ 3).$

24. $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3 \end{cases}$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ при $t_0 = 2.$

25. $y = x^3 - 4x^2 + 8, \quad M_0(1;\ 5).$

26. $y = \dfrac{1}{x^2 + 4}, \quad M_0(2;\ 1).$

27. $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ при $t_0 = 2.$

28. $y = 2x^2 - 3x + 1, \quad M_0(2;\ 3).$

29. $y = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + 1, \quad M_0(8;\ 29).$

30. $y = \dfrac{x+1}{x^2 + 1}, \quad M_0(1;\ 1).$

Задание 14. Найти угол между линиями в точке (точках) их пересечения.

1. $y = x^2 - 1$ и $y = x^3 - 1.$

2. $2y = x^2$ и $2y = 8 - x^2.$

3. $y = \sin x$ и $y = \cos x$ при $0 \le x \le \pi.$

4. $xy = 1$ и $y = \sqrt{x}.$

5. $y = x^3$ и $y = \dfrac{1}{x^2}.$

6. $y = 1 + \sin x$ и $y = 1.$

7. $y = e^x$ и $y = e^{3x}.$

8. $x^2 + 4y^2 = 4$ и $4y = 4 - 5x^2.$

9. $x^2 - y^2 = 3$ и $xy = 2.$

10. $x + y - 4 = 0$ и $2y = 8 - x^2.$

11. $x^2 + 4y^2 = 4$ и $4y = 4 - 5x^2.$

12. $4y = 12x^2 + 4x + 53$ и $y = 2x^2 + 4x + 11.$

13. $x^2 - y^2 = 5$ и $xy = 6.$

14. $3x^2 + y^2 = 12$ и $y^2 = 2x + 7.$

15. $9x^2 + 16y^2 = 25$ и $y = x^2.$

16. $4x^2 + y^2 = 13$ и $xy = 3.$

17. $x^2 - 2y^2 = 8$ и $y = \sqrt{3x - 8}.$

18. $2x^2 + 5y^2 = 13$ и $y = 3x^2 - 11.$

19. $x^2 + y^2 = 5$ и $y^2 = 4x.$

20. $3x^2 + 5y^2 = 17$ и $y = \sqrt{3x - 5}.$

21. $2x^2 - 3y^2 = 6$ и $xy = 6.$

22. $2x^2 + 3y^2 = 11$ и $y = x^2 + 1.$

23. $x^2 + 2y^2 = 19$ и $xy = 3.$

24. $x^2 + y^2 = 5$ и $y^2 = 4x.$

25. $y = \left(x - 1\right)^2$ и $y = -x^2 + 4x + 1.$

26. $y = \dfrac{8}{x}$ и $x^2 - y^2 = 12.$

27. $y^2 = 6x + 9$ и $y^2 = 4 - 4x.$

28. $y = \sin x$ и $y = \sin 2x.$

29. $x^2 - y^2 = 6$ и $x^2 + 4y^2 = 16.$

30. $9y = x^2$ и $x - y = 0.$

РАЗДЕЛ III.
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Задание 1. Используя табличные интегралы и основные правила интегрирования найти интеграл $\int f(x)\,dx$. Полученный результат проверить дифференцированием.

1. 1) $\int\left(x^2-2x+3e^x\right)dx$; 2) $\int\dfrac{x}{\cos^2 x^2}\,dx$;

3) $\int\left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt{5x}+1\right)dx$; 4) $\int\dfrac{\operatorname{tg}3x-\operatorname{ctg}3x}{\sin 3x}dx$;

5) $\int\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{x\sqrt{x}}{3}\right)dx$; 6) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$;

7) $\int\left(2^x+\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)dx$; 8) $\int\dfrac{x^2}{a+ax^2}dx$.

2. 1) $\int\left(\cos ax+\sin ax\right)^2 dx$; 2) $\int\dfrac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$;

3) $f(x)=\dfrac{xe^x-2x+1}{x}$; 4) $\int x\cos\left(3-x^2\right)dx$;

5) $\int\dfrac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 6) $\int\dfrac{x^5+2x^3-x}{x^2+1}dx$;

7) $\int\sin^3 x\cos x\,dx$; 8) $\int\dfrac{e^{3x}}{9+e^{6x}}dx$.

3. 1) $\int\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-7\sin x\right)dx$; 2) $\int xe^{-x^2+1}dx$;

3) $\int\dfrac{x^3+4x+5}{x^2+4}dx$; 4) $\int\dfrac{(\ln x)^2}{2x}dx$;

5) $\int\left(\dfrac{e^{5x}-e^{-5x}}{2}+\sqrt{x}\right)dx$; 6) $\int\dfrac{5+\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$;

7) $\int\left(-\sin x+\frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx;$ 8) $\int\frac{x+3}{2x-1}dx.$

4. 1) $\int\frac{3-\sqrt{5+x^2}}{5+x^2}dx;$ 2) $\int e^x\sqrt{3-2e^x}\,dx;$

3) $\int\frac{1-\sin x}{\cos x}dx;$ 4) $\int\frac{e^{\sqrt{x}}+5x-1}{\sqrt{x}}dx;$

5) $\int\left(\left(e^x+1\right)^3+\operatorname{tg}x\right)dx;$ 6) $\int\frac{x}{\sqrt{a^4-x^4}}dx;$

7) $\int\frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx;$ 8) $\int\left(x^2e^{-x^3}+3\right)dx.$

5. 1) $\int\left(x^3+2a^x+\frac{1}{x}\right)dx;$ 2) $\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx;$

3) $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx;$ 4) $\int\frac{2x-11}{x+4}dx;$

5) $\int\frac{x^4-4}{x+4}dx;$ 6) $\int\frac{3x+1}{\sqrt{6x^2+1}}dx;$

7) $\int\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^3}{x}dx;$ 8) $\int\frac{x^2-4}{x^2+4}dx.$

6. 1) $\int\frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx;$ 2) $\int\frac{dx}{x\ln^4 x};$

3) $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx;$ 4) $\int e^x\left(e^x+2\right)^2dx;$

5) $\int a\left(x+a\right)\left(x-a\right)dx;$ 6) $\int\left(a+bx\right)^2dx;$

7) $\int x\cos\left(x^2\right)dx;$ 8) $\int x^3\sqrt[5]{2+x^4}\,dx.$

7. 1) $\int \frac{1}{\sqrt{5-4x^2}}dx;$ 2) $\int \left(e^{\cos x}\sin x + e^x\right)dx;$

3) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot \sin^2 x}dx;$ 4) $\int \frac{3xdx}{\left(2x^2-1\right)^2};$

5) $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx;$ 6) $\int \frac{2x-1}{x-2}dx;$

7) $\int \frac{x^3-3x+4}{\sqrt{x}}dx\,;$ 8) $\int \frac{\left(2+x\right)^2}{x^2+1}dx.$

8. 1) $\int \frac{\sin 5x}{\cos^3 5x}dx;$ 2) $\int \frac{x^4+2x^2+x-1}{\sqrt[3]{x}}dx;$

3) $\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}dx;$ 4) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^4 x}dx;$

5) $\int \left(\frac{1}{1-\cos x}+4^x\right)dx;$ 6) $\int \frac{dx}{1+\sin x};$

7) $\int \left(\sqrt{x}+\cos 2x+1\right)dx;$ 8) $\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{5^x}dx.$

9. 1) $\int \frac{dx}{2x^2+9};$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{80-11x^2}};$

3) $\int \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx;$ 4) $\int \left(e^x+e^{-2x}+\sqrt{x}\right)dx;$

5) $\int \left(3\sin x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx;$ 6) $\int \frac{x+4}{\sqrt{9-\left(x+1\right)^2}}dx;$

7) $\int \left(x^2-2\sin x+3e^x\right)dx;$ 8) $\int \frac{x^3+4x+5}{x^2+4}dx.$

10. 1) $\int \left(\sin^5 x-\cos^3 x\right)dx;$ 2) $\int \frac{\left(1+x\right)^2}{x\left(1+x^2\right)}dx;$

3) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\,(2\operatorname{ctg} x+3)}$;

4) $\int \frac{2\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$;

5) $\int \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+6}}dx$;

6) $\int \left(\cos^3 x+\sqrt[5]{x}\right)dx$;

7) $\int \left(\frac{1}{\sin^2 x}+7\cos x\right)dx$;

8) $\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

11. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-3}}$;

2) $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx$;

3) $\int (ax+b)^3\,dx$;

4) $\int \frac{(x-1)^2+\sqrt{x}}{2x}dx$;

5) $\int \left(3^x e^x+\frac{1}{2x}\right)dx$;

6) $\int \frac{11+3x}{\sqrt{4x^2+9}}dx$;

7) $\int \frac{(x-1)(x^2+3)}{x^2}dx$;

8) $\int \left(2x+\sqrt{x}\right)^2 dx$.

12. 1) $\int (\cos^5 x+\sin x)dx$;

2) $\int \left(e^{-x^3}x^2-5^{-x}\right)dx$;

3) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx$;

4) $\int \frac{e^x+\sin x}{e^x-\cos x}dx$;

5) $\int \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$;

6) $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}\,dx$;

7) $\int \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$;

8) $2^x 3^x\,dx$.

13. 1) $\int \frac{dx}{4x^2-3}$;

2) $\int \left((2x+1)^{15}+\sqrt[4]{x}\right)dx$;

3) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sin^2 x}$;

4) $\int \frac{(e^x+2)^2}{e^x}dx$;

5) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}+e^{x}\right)dx;$ 6) $\int\frac{\cos x}{\sqrt{9+\sin^{2}x}}dx;$

7) $\int 4x\left(x^{2}-3\right)dx;$ 8) $\int e^{x}\left(1+\frac{e^{-x}}{x^{2}}\right)dx.$

14. 1) $\int\left(\mathrm{tg}^{3}x+3e^{x}\right)dx;$ 2) $\int e^{x}\cos\left(e^{x}+1\right)dx;$

3) $\int\frac{x}{\sqrt{x^{2}+1}}dx;$ 4) $\int\frac{dx}{\cos^{2}(1-2x)};$

5) $\int\cos^{4}x\ \sin 2x\,dx;$ 6) $\int\frac{x^{3}dx}{\sqrt{1-x^{8}}};$

7) $\int\frac{3-\sin^{3}x}{\sin^{2}x}dx;$ 8) $\int\frac{x^{2}-4}{x+4}dx.$

15. 1) $\int\cos^{2}\frac{x}{2}dx;$ 2) $\int\left(\frac{x}{x^{4}+9}+e^{-x}\right)dx;$

3) $\int\frac{x^{4}dx}{x^{2}+1};$ 4) $\int\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^{2}+2x}}+\frac{3}{\sqrt[3]{x^{2}}}\right)dx;$

5) $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+x\sqrt{x}+1\right)dx;$ 6) $\int\frac{\cos^{3}x}{\sin x}dx;$

7) $\int\frac{dx}{\sin^{2}x\cos^{2}x};$ 8) $\int\frac{2x-1}{x-2}dx.$

16. 1) $\int x7^{x^{2}}dx;$ 2) $\int\left(\mathrm{tg}\,x+2\right)dx;$

3) $\int\frac{e^{2x}dx}{e^{x}+1};$ 4) $\int\left(e^{2x}\cos 2x+\sqrt[5]{x}\right)dx;$

5) $\int\frac{\left(\mathrm{arctg}\,x\right)^{2}}{1+x^{2}}dx;$ 6) $\int\frac{x^{2}+1}{x^{2}-1}dx;$

7) $\int\left(a+bx\right)^{2}dx;$ 8) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{x\sqrt{x}}{3}\right)dx.$

17. 1) $\int \sin^2 \frac{x}{2}dx;$ 2) $\int \frac{x\left(1+x^2\right)}{1+x^4}dx\,;$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}};$ 4) $\int \left(\frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} + \frac{\operatorname{ctg} 7x}{\sin 7x} \right) dx;$

5) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx;$ 6) $\int \sin^5 x \cos^3 x\, dx;$

7) $\int (a-bx)^3\, dx;$ 8) $\int (x+5)^3\, dx.$

18. 1) $\int \frac{3-2x}{5x^2+7}dx;$ 2) $\int \left(\frac{e^{2x}-1}{e^x} + 3 \right) dx;$

3) $\int \cos x \sin 3x dx;$ 4) $\int \left(\left(e^x - e^{-x}\right)^3 + 1 \right) dx;$

5) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\, \sqrt{1+\operatorname{tg} x}};$ 6) $\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}dx;$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-9}};$ 8) $\int \left(\operatorname{ctg}^2 x + 2\right) dx.$

19. 1) $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx;$ 2) $\int \frac{1+\sin 5x}{\cos^2 5x}dx;$

3) $\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-9}}dx;$ 5) $\int \left(\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\operatorname{ctg} 2x} \right) dx;$

5) $\int \left(2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2} \right) dx;$ 7) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx;$

7) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx;$ 8) $\int \frac{dx}{7-x^2}.$

20. 1) $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^3 dx;$ 2) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}};$

3) $\int\sin 2x\sin 5xdx;$ 4) $\int\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{\cos x}\right)dx;$

5) $\int\left(e^x\sin\left(e^x\right)+3\right)dx;$ 6) $\int\frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx;$

7) $\int 2x^3\left(x^2-3\right)^2 dx;$ 8) $\int\frac{dx}{4x^2+1}.$

21. 1) $\int\operatorname{ctg}^2 x\,dx;$ 2) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^3-1}};$

3) $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx;$ 4) $\int\frac{\sec x\operatorname{tg} x}{2+3\sec x}dx;$

5) $\int\frac{x^5+2x^4-x^3+1}{x^2+1}dx;$ 6) $\int\left(2e^x-\sqrt[4]{x^3}\right)dx;$

7) $\int\left(2\sqrt[3]{x}+\sqrt{5x}+1\right)dx;$ 8) $\int\sin^2\frac{x}{2}dx.$

22. 1) $\int\frac{x^2dx}{x^2+2};$ 2) $\int\left(\sin\left(5x+3\right)+e^{2x}\right)dx;$

3) $\int\sin 2x\sin 4x\,dx;$ 4) $\int ddx;\frac{1}{\sqrt{5+2x^2}};$

5) $\int\left(2\operatorname{tg} x+3\operatorname{ctg} x\right)^2 dx;$ 6) $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx;$

7) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}+\frac{5}{x^2-9}\right)dx;$ 8) $\int\frac{dx}{x^4+x^2}.$

23. 1) $\int\frac{dx}{2\sqrt{x}};$ 2) $\int\frac{2x-5}{3x^2-2}dx;$

3) $\int\frac{1}{\sqrt{8-3x^2}}dx;$ 4) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2+7}};$

5) $\int\left(\cos x+2\sqrt[5]{x^3}\right)dx;$ 6) $\int\left(\frac{\sqrt{\ln x}}{x}+e^x\right)dx;$

7) $\int\frac{x^6-x^5+1}{x^2}dx;$ 8) $\int\frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}.$

24. 1) $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx;$ 2) $\int\left(4^{2-3x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx;$

4) $\int\cos 2x\cos 3x\,dx;$ 4) $\int\frac{\sin x}{\sqrt{9+\cos^2 x}}dx;$

5) $\int\frac{3x^4-5x^2+1}{1-x^2}dx;$ 6) $\int\frac{x^4}{\sqrt{5+x^5}}dx;$

7) $\int\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)^2dx;$ 8) $\int 3^x 2^{2x}dx.$

25. 1) $\int\left(2x+\sqrt{x}\right)dx;$ 2) $\int\left(\frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}+\sqrt{x}\right)dx;$

3) $\int\frac{3-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx;$ 4) $\int\frac{x^4+x^3+x}{x^2+2}dx;$

5) $\int\left(4\cos 3x-\frac{5}{\sqrt{9-9x^2}}\right)dx;$ 6) $\int\frac{x^5-3x^2+x}{x^2+1}dx;$

7) $\int\left(e^x-e^{-x}\right)^2dx;$ 8) $\int x\left(x^2-1\right)^3dx.$

26. 1) $\int\frac{e^x dx}{e^x+1};$ 2) $\int\frac{dx}{\cos ax\sin ax};$

3) $\int\cos x\cos 2x\cos 3x dx;$ 4) $\int\frac{3e^{2x}dx}{\sqrt{1-e^{4x}}};$

5) $\int\frac{dx}{x\cos^2(1+\ln x)};$ 6) $\int\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+5^x\right)dx;$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$; 8) $\int \left(3+x^2-\sin x\right)dx$;

27. 1) $\int \frac{(x-1)\ \left(x^2+3\right)}{x^2}dx$; 2) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{4-\operatorname{tg}^2 x}}$;

3) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{3}{4+x^2}\right)dx$; 4) $\int e^{\sin 2x}\sin x dx$;

5) $\int \frac{x^5-2x^3+x-4}{x^2-1}dx$; 6) $\int \frac{x^2-3}{2\left(1+x^2\right)}dx$;

7) $\int \left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}+x\right)dx$; 8) $\int \left(e^{-4x}+e^{-x}\right)dx$.

28. 1) $\int \left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx$; 2) $\int \frac{a^x dx}{1+a^{2x}}$;

3) $\int \frac{e^x dx}{e^x+1}$; 4) $\int \frac{\arcsin x - x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

5) $\int \left(3\operatorname{tg}\ x+\operatorname{ctg}^2 x\right)dx$; 6) $\int \left(\frac{3-x^4}{x^2+1}+e^x\right)dx$;

7) $\int (\cos 3x+\operatorname{tg} x-3)dx$; 8) $\int \frac{2+x}{x}dx$.

29. 1) $\int x\left(x^2-3\right)dx$; 2) $\int x\ \sqrt[5]{5-x^2}dx$;

3) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}+\frac{5}{x^2-9}\right)dx$; 4) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x+1}}$;

5) $\int \frac{x^5-2x^3+x-4}{x^2-1}dx$; 6) $\int \frac{dx}{2+2x^2}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$; 8) $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$.

30. 1) $\int \frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}$; 2) $\int \frac{3-2\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$;

3) $\int \frac{\cos x}{a^2+\sin^2 x}dx$; 4) $\int \frac{e^{-\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$;

5) $\int \left(\cos^2 \frac{x}{2}+\operatorname{ctg}^2 x\right)dx$; 6) $\int \frac{4+\ln x}{x\ln^2 x}dx$;

7) $\int \left(\sin^2 x+\cos^3 x+1\right)dx$; 8) $\int \frac{2x^2+x-1}{x^3}dx$.

Задание 2. Найти интегралы с помощью соответствующего метода.

1. 1) $\int e^{-3x}dx$; 2) $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$;

3) $\int \frac{(x+1)\ dx}{x^2+1}$; 4) $\int \frac{x^4\ dx}{x^2-3}$;

5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; 6) $\int \frac{x^3\ dx}{\sqrt{x-1}}$;

7) $\int \sin x\ \cos x\ dx$; 8) $\int \sqrt{1-x^2}\ dx$;

9) $\int (3x-4)\ln x\ dx$; 10) $\int \left(x^2+1\right)dx$.

2. 1) $\int \left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)dx$; 2) $\int \sqrt{4x-1}\ dx$;

3) $\int \left(\frac{3}{x^2+3}+\frac{6}{x^2-3}\right)dx$; 4) $\int \frac{x^2dx}{x^2-2}$;

5) $\int \frac{\sin\sqrt{x}\ dx}{\sqrt{x}}$; 6) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$;

7) $\int e^{\cos x}\sin x\, dx$; 8) $\int (3x-5)^{30}\ dx$;

9) $\int \sqrt{x}\ln x\, dx$; 10) $\int \sin(\ln x)\, dx$.

3. 1) $\int (3-2x)^4\,dx$; 2) $\int \sqrt[3]{5-6x}\,dx$;

3) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\right)dx$; 4) $\int \frac{(4x-5)\,dx}{x^2+5}$;

5) $\int \frac{(3x+1)\,dx}{x^2+4}$; 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$;

7) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+2\sin x}}$; 8) $\int \frac{\left(a^x-b^x\right)^2 dx}{a^x b^x}$;

9) $\int \ln^2 x\,dx$; 10) $\int \cos(\ln x)\,dx$.

4. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$; 2) $\int \frac{(1-2\cos x)\,dx}{\sin^2 x}$;

3) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; 4) $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$;

5) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+4\cos^2 x}}$; 6) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

7) $\int x e^x dx$; 8) $\int x\ln x\,dx$;

9) $\int \frac{\ln x\,dx}{(x+1)^2}$; 10) $\int x^2 a^x dx$.

5. 1) $\int \frac{(2x-5)\,dx}{x^2-5x+7}$; 2) $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$.

3) $\int (\sin x+5\cos x)\,dx$; 4) $\int \left(2^x+3^x\right)dx$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(a^2+x^2\right)^3}}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;

7) $\int \arcsin x\,dx$; 8) $\int \ln x\,dx$;

9) $\int \frac{\arccos\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x}}$; 10) $\int x^3 3^x dx$.

6. 1) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$; 2) $\int \frac{\cos x\ dx}{1+2\sin x}$;

3) $\int \frac{x^4 dx}{x^2+2}$; 4) $\int \frac{dx}{x^4+0,25}$;

5) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}$;

7) $\int x \arcsin x\, dx$; 8) $\int \ln(1-x)\, dx$;

9) $\int \frac{x^2 dx}{\left(1+x^2\right)^2}$; 10) $\int \frac{x\cos x\ dx}{\sin^2 x}$.

7. 1) $\int \frac{\sin x\, dx}{1+3\cos x}$; 2) $\int \frac{\cos 2x\, dx}{\sin x \cos x}$;

3) $\int x\left(x^2+1\right)^3 dx$; 4) $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx$;

5) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+4}}$; 6) $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$;

7) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\ dx$; 8) $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$;

9) $\int \left(x^2+x+1\right)e^{-x} dx$; 10) $\int x^3 \ln(2+x)\, dx$.

8. 1) $\int \frac{dx}{1-5x}$; 2) $\int \frac{e^{2x} dx}{1-3e^{2x}}$;

3) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{x^2+3}\right) dx$; 4) $\int \frac{(1-\sin^3 x)\, dx}{\sin^2 x}$;

5) $\int x\sqrt{2x^2+5}\, dx$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$;.

7) $\int x\cos^2 x\, dx$; 8) $\int \ln\left(x^2+1\right) dx$;

9) $\int \frac{\arcsin x\, dx}{\sqrt{1+x}}$; 10) $\int x^2 \sin 2x\, dx$.

9. 1) $\int \frac{dx}{3^x}$; 2) $\int 2^{3x-1}dx$;

3) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}+\frac{1}{x^2-25}\right)dx$; 4) $\int \frac{x^4\ dx}{1+x^2}$;

5) $\int (x-1)\sqrt{x+1}\,dx$; 6) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}\,dx}{x\ \ln x}$;

7) $\int x\,\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}\,dx$; 8) $\int x\sin x\,dx$;

9) $\int (x^2-5x+8)e^x dx$; 10) $\int x^2\ln(1+x)\,dx$.

10. 1) $\int \frac{dx}{9x^2-1}$; 2) $\int \frac{dx}{4x^2+25}$;

3) $\int \frac{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 4) $\int \frac{x^2dx}{x^2+1}$;

5) $\int \sqrt[3]{5x-2}\,dx$; 6) $\int \frac{e^x\ dx}{\sqrt{1+e^x}}$;

7) $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$; 8) $\int x^n\ln x\,dx$;

9) $\int x\,\mathrm{ctg}^2 x\ dx$; 10) $\int \ln^3 x\,dx$.

11. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$; 2) $\int \frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)^3 dx}{x\sqrt{x}}$.

3) $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$; 4) $\int \frac{(5x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$;

5) $\int x\sqrt{x+2}\,dx$; 6) $\int \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1\text{-}x^2}}$;

7) $\int e^x\sin x\,dx$; 8) $\int x\ln(x-1)\,dx$;

9) $\int x\ \cos^2 x\,dx$; 10) $\int x^2 5^x\,dx$.

12. 1) $\int \frac{\left(x^2-16\right)dx}{\sqrt{x}+2}$; 2) $\int \sqrt[3]{3-x}\,dx$;

3) $\int e^x\left(2-\frac{e^{-x}}{x^3}\right)dx$; 4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$;

5) $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$; 6) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$;

7) $\int e^x \cos x\,dx$; 8) $\int x^2 \cos x\,dx$;

9) $\int x^2 \operatorname{tg} x\,dx$; 10) $\int x\ln^2 x\,dx$.

13. 1) $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$; 2) $\int \frac{x^2\,dx}{x^2+4}$;

3) $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$; 4) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

5) $\int x^2\sqrt[3]{x^3+2}\,dx$; 6) $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\sqrt{\cos x}}$;

7) $\int \ln^2 x\,dx$; 8) $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$;

9) $\int x\operatorname{tg}^2 x\,dx$; 10) $\int x\sin x\cos x\,dx$.

14. 1) $\int \frac{dx}{4x+3}$; 2) $\int e^{-2x+3}\,dx$;

3) $\int x^3\sqrt{2x^4-3}\,dx$; 4) $\int \frac{\left(2\ln x+3\right)^3 dx}{x}$;

5) $\int 3^{4x}dx$. 6) $\int x^3\left(1-2x^4\right)^3 dx$;

7) $\int x^3 e^{-x}\,dx$; 8) $\int \ln\left(x^2+1\right)dx$;

9) $\int\left(x^2-2x\right)\cos x\,dx$; 10) $\int (x+1)e^{4x}dx$.

15. 1) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$;

3) $\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}\;dx}{\sqrt{4-x^4}}$; 4) $\int \frac{(x^2+2)\,dx}{x^2-1}$;

5) $\int \frac{dx}{(x+1)\;\sqrt{x}}$; 6) $\int x\left(x^2+1\right)^5 dx$;

7) $\int \frac{\arcsin x\;dx}{x^2}$; 8) $\int \frac{x\;\operatorname{arctg} x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}$;

9) $\int\left(x^2-4x+3\right)\sin x\,dx$; 10) $\int x^3e^x dx$.

16. 1) $\int \frac{x\,dx}{3-2x^2}$; 2) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$;

3) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$; 4) $\int \frac{\sin 2x\;dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}$;

5) $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}$; 6) $\int \frac{\ln^2 x\,dx}{x\sqrt{1-\ln x}}$;

7) $\int \frac{\ln x\;dx}{x^2}$; 8) $\int \frac{x\;\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

9) $\int x^3e^{-x^2}dx$; 10) $\int x^3\sin x\;dx$.

17. 1) $\int \frac{\sqrt{\ln x}\;dx}{x}$; 2) $\int \frac{\left(x^2+1\right)dx}{x+2}$;

3) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$; 4) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$;

5) $\int \frac{x\,dx}{x^2-1}$; 6) $\int e^x\,\sqrt[3]{4+e^x}\;dx$;

7) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}\;dx}{\sqrt{x}}$; 8) $\int \frac{x\;dx}{\cos^2 x}$;

9) $\int\left(x^2-2x+3\right)\ln x\,dx$;

10) $\int x^3\cos x\,dx$;

18. 1) $\int e^{-x^2}x dx$;

2) $\int e^{x^3}x^2 dx$;

3) $\int\dfrac{dx}{\cos^2 3x}$;

4) $\int\dfrac{x\,dx}{x^4+2x^2+5}$;

5) $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$;

6) $\int\dfrac{\sqrt{1+x^2}\ dx}{x}$;

7) $\int\dfrac{\arcsin\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x}}$;

8) $\int\dfrac{x\sin x\ dx}{\cos^2 x}$;

9) $\int\dfrac{\ln(\ln x)\ dx}{x}$;

10) $\int\dfrac{x\cos x\,dx}{\sin^2 x}$.

19. 1) $\int e^{\cos x}\sin x\ dx$;

2) $\int\sin\left(ax-b\right)dx$;

3) $\int\dfrac{dx}{\sin^2 5x}$;

4) $\int\dfrac{dx}{\left(x-7\right)\sqrt{x}}$;

5) $\int\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}$;

6) $\int\dfrac{\ln^2 x\,dx}{x}$;

7) $\int x\mathrm{arctg}x\ dx$;

8) $\int x^2\ln x\ dx$;

9) $\int\sin\sqrt{x}\ dx$;

10) $\int x^3\ \mathrm{arctg}\ x\ dx$.

20. 1) $\int\dfrac{\cos x\ dx}{\sin^4 x}$;

2) $\int\dfrac{\sin x\,dx}{\cos^3 x}$;

3) $\int\dfrac{\sin x\ dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$;

4) $\int\dfrac{e^{2x}dx}{e^{4x}-5}$;

5) $\int\dfrac{x^4dx}{\sqrt{x^{10}-2}}$;

6) $\int\dfrac{\mathrm{tg}\ x\ dx}{\cos^2 x}$;

7) $\int\mathrm{arctg}\sqrt{3x}\ dx$;

8) $\int\left(x^2+3\right)e^{-2x}dx$;

9) $\int\sin\sqrt{x}\ dx$;

10) $\int\ln\left(2+x^2\right)dx$.

21. 1) $\int \sin 2x \cos x\, dx$; 2) $\int \cos^3 x \sin x\, dx$;

3) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+4}}$; 4) $\int \frac{e^{2x} dx}{e^x+1}$;

5) $\int \frac{\sin 4x\, dx}{4+\sin^2 2x}$; 6) $\int \frac{dx}{x \ln x}$;

7) $\int x \ln^2 x\, dx$; 8) $\int x e^{3x}\, dx$;

9) $\int x^4 \ln x\, dx$; 10) $\int x^5 e^x dx$.

22. 1) $\int x^2 e^{3+5x^3} dx$. 2) $\int \left(x^2+1\right) dx$.

3) $\int \frac{dx}{x\left(2+\ln x\right)}$; 4) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

5) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$; 6) $\int \frac{\operatorname{ctg} x\, dx}{\sin^2 x}$.

7) $\int \frac{\ln x\ dx}{x^3}$; 8) $\int \frac{x\, dx}{\sin^2 x}$;

9) $\int \arcsin^2 x\, dx$; 10) $\int \ln\left(2+x^2\right) dx$.

23. 1) $\int \frac{dx}{x^2-25}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2+9}$;

3) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}\ dx}{x}$; 4) $\int x^2\ \sqrt[3]{x^3+5}\, dx$;

5) $\int \frac{e^{\frac{x}{2}} dx}{\sqrt{16-e^x}}$; 6) $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x}$;

7) $\int \left(x^2+2x+1\right) \sin x\, dx$; 8) $\int x e^{-2x} dx$;

9) $\int \operatorname{arctg}^2 x\, dx$; 10) $\int \left(x^2+x\right) \cos x\, dx$.

24. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2+5}$.

3) $\int xe^{-x^2}dx$.

4) $\int x(6x-1)^{19}dx$;

5) $\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}$;

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x-1}}$;

7) $\int (x^3+2)\cos x\,dx$;

8) $\int (x^2+x)e^x dx$;

9) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$;

10) $\int (x^2-2x)\sin x\,dx$.

25. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$;

2) $\int \frac{dx}{x^2+3}$;

3) $\int \frac{dx}{x^2+x}$;

4) $\int x\sqrt{(x^2+1)^3}\,dx$;

5) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$;

6) $\int \frac{(x-\operatorname{arctg} x)\,dx}{1+x^2}$;

7) $\int x^2e^{3x}dx$;

8) $\int x^2\arcsin x\,dx$;

9) $\int \sqrt{x^2+a}\,dx$;

10) $\int (x^2-2^x+3)e^x dx$.

26. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$;

2) $\int \frac{x^2dx}{4+x^6}$;

3) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

4) $\int \frac{(1+x)dx}{1+\sqrt{x}}$;

5) $\int \frac{(2x-5)dx}{x^2-5x+7}$;

6) $\int \frac{(\arccos x-x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

7) $\int \frac{x\cos x\,dx}{\sin^2 x}$;

8) $\int x^2\arccos x\,dx$;

9) $\int \frac{dx}{x\sin^2(\ln x)}$;

10) $\int (1+\ln^2 x)\,dx$.

27. 1) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-x^2}}$;

2) $\int \frac{dx}{b^2x^2-a^2}$;

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$; 4) $\int \frac{e^{3x}dx}{\sqrt{1-e^x}}$;

5) $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin x\ \cos x}$; 6) $\int \frac{e^x dx}{3+4e^x}$;

7) $\int \frac{x\sin x\ dx}{\cos^2 x}$; 8) $\int \frac{\ln x\,dx}{x^4}$;

9) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$; 10) $\int \frac{\ln x\ dx}{x^5}$.

28. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$; 2) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^8-1}}$;

3) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{3+5\sin x}}$; 4) $\int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{x+1}+1}$;

5) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+3\cos x}}$; 6) $\int x^2\sqrt{2x^3+5}\ dx$;

7) $\int (2x-5)e^{-3x}dx$; 8) $\int x\cos 2x\,dx$;

9) $\int \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$; 10) $\int \frac{x\ dx}{\sin^2 x}$.

29. 1) $\int \frac{(5x-2)\,dx}{x^2-4}$; 2) $\int \frac{(3x-4)\,dx}{x^2-4}$.

3) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+e^x}}$.

5) $\int \cos^3 x\ \sin x\ dx$; 6) $\int x\sqrt{a+x^2}dx$;

7) $\int xe^{-4x}dx$; 8) $\int (2x-3)\sin\frac{x}{2}\,dx$;

9) $\int \frac{\sin x\ dx}{a^2+\cos^2 x}$; 10) $\int \left(2x-x^3\right)e^x dx$.

30. 1) $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$; 2) $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{1\text{-}x^2}}$;

3) $\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{x^6-a^2}}$;

4) $\int \frac{(x+1)\,dx}{x\sqrt{x-2}}$;

5) $\int \sin^3 x \cdot \cos x\,dx$;

6) $\int x\left(5x^2+3\right)^7 dx$;

7) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$;

8) $\int \frac{\arccos x\,dx}{\sqrt{1+x}}$;

9) $\int \frac{e^x\ dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$;

10) $\int \left(1-x^2\right)\sin x\,dx$.

Задание 3. Найти интегралы, содержащие квадратный трехчлен.

1. 1) $\int \frac{(5-2x)\ dx}{3-2x-x^2}$; 2) $\int \frac{(3x+2)\,dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}$.

2. 1) $\int \frac{(3x-5)\ dx}{x^2-4x+3}$; 2) $\int \frac{(3+x)\,dx}{\sqrt{7+6x-x^2}}$.

3. 1) $\int \frac{(3+2x)\ dx}{15+2x-x^2}$; 2) $\int \frac{(2x-7)\,dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$.

4. 1) $\int \frac{(3x+2)\ dx}{x^2+2x+5}$; 2) $\int \frac{(5-x)\,dx}{\sqrt{24+2x-x^2}}$.

5. 1) $\int \frac{(7-2x)\ dx}{12+4x-x^2}$; 2) $\int \frac{(3x+13)\,dx}{\sqrt{x^2-6x+5}}$.

6. 1) $\int \frac{(2x-7)\ dx}{x^2-6x+13}$; 2) $\int \frac{(3-2x)\,dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

7. 1) $\int \frac{(9-2x)\ dx}{12-4x-x^2}$; 2) $\int \frac{(4x+7)\,dx}{\sqrt{x^2-6x+25}}$.

8. 1) $\int \frac{(2x+11)\ dx}{x^2+6x+34}$; 2) $\int \frac{(7-3x)\,dx}{\sqrt{16-2x-x^2}}$.

9. 1) $\int \frac{(3+4x)\ dx}{35-2x-x^2}$; 2) $\int \frac{(2x+11)dx}{\sqrt{x^2+6x+25}}$.

10. 1) $\int \frac{(2x+6)\ dx}{x^2+6x-7}$; 2) $\int \frac{(5-4x)dx}{\sqrt{9+8x-x^2}}$.

11. 1) $\int \frac{(6x-7)\ dx}{31+4x-x^2}$; 2) $\int \frac{(4x+9)\ dx}{\sqrt{x^2+6x-16}}$.

12. 1) $\int \frac{(2x+13)\ dx}{x^2+4x+20}$; 2) $\int \frac{(7-4x)\ dx}{\sqrt{35+2x-x^2}}$.

13. 1) $\int \frac{(4x-11)dx}{20-8x-x^2}$; 2) $\int \frac{(2x+7)dx}{\sqrt{x^2-4x+13}}$.

14. 1) $\int \frac{(2x+7)dx}{x^2-4x+5}$; 2) $\int \frac{(5-2x)dx}{\sqrt{27-6x-x^2}}$.

15. 1) $\int \frac{(2x-3)dx}{11+10x-x^2}$; 2) $\int \frac{(4x+9)dx}{\sqrt{x^2+2x+26}}$.

16. 1) $\int \frac{(2x-3)dx}{x^2+2x-24}$; 2) $\int \frac{(7-6x)dx}{\sqrt{20+8x-x^2}}$.

17. 1) $\int \frac{(2x-13)dx}{21+4x-x^2}$; 2) $\int \frac{(4x+11)dx}{\sqrt{x^2+2x+17}}$.

18. 1) $\int \frac{(4x+7)dx}{x^2+2x-15}$; 2) $\int \frac{(9-2x)dx}{\sqrt{11-10x-x^2}}$.

19. 1) $\int \frac{(4x+11)dx}{16-6x-x^2}$; 2) $\int \frac{(3x+5)dx}{\sqrt{x^2+2x+10}}$.

20. 1) $\int \frac{(2x+9)dx}{x^2+2x-8}$; 2) $\int \frac{(7-6x)dx}{\sqrt{13+12x-x^2}}$.

21. 1) $\int \frac{(5-2x)dx}{13-12x-x^2}$; 2) $\int \frac{(3x+5)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

22. 1) $\int \frac{(4x+13)\,dx}{x^2+2x-3}$; 2) $\int \frac{(5-2x)\,dx}{\sqrt{33-8x-x^2}}$.

23. 1) $\int \frac{(5-4x)\,dx}{33+8x-x^2}$; 2) $\int \frac{(4x+7)\,dx}{\sqrt{x^2-2x+26}}$.

24. 1) $\int \frac{(3x+11)\,dx}{x^2-2x-24}$; 2) $\int \frac{(7-6x)\,dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

25. 1) $\int \frac{(2x-7)\,dx}{24-10x-x^2}$; 2) $\int \frac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{x^2-2x+17}}$.

26. 1) $\int \frac{(4x+5)\,dx}{x^2-2x-15}$; 2) $\int \frac{(5-3x)\,dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

27. 1) $\int \frac{(9-2x)\,dx}{40+6x-x^2}$; 2) $\int \frac{(2x+4)\,dx}{\sqrt{x^2-2x+10}}$.

28. 1) $\int \frac{(2x+3)\,dx}{x^2-2x-8}$; 2) $\int \frac{(7-4x)\,dx}{\sqrt{15+2x-x^2}}$.

29. 1) $\int \frac{(2x-11)\,dx}{40+6x-x^2}$; 2) $\int \frac{(2x+1)\,dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.

30. 1) $\int \frac{(4x+7)\,dx}{x^2-2x-3}$; 2) $\int \frac{(7+2x)\,dx}{\sqrt{12-4x-x^2}}$.

Задание 4. Найти интегралы от рациональных дробей.

1. 1) $\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2+x-6}$; 2) $\int \frac{dx}{(x^2+2)(x-1)^2}$.

2 1) $\int \frac{(x^5+x^4-8)\,dx}{x^3-4x}$; 2) $\int \frac{(3x+2)\,dx}{x(x+1)^3}$.

3. 1) $\int \frac{(x^3+2)\,dx}{x^3-9x}$; 2) $\int \frac{(3x+2)\,dx}{(x-2)(x+1)^2}$.

4. 1) $\int \frac{dx}{x^3 - x}$; 2) $\int \frac{(x^2 - 4)dx}{(x-2)(x^2+1)}$.

5. 1) $\int \frac{x^6 dx}{x^3 - 2x^2 + x}$; 2) $\int \frac{(3x+5)dx}{(x+4)(x+3)(x-1)^2}$.

6. 1) $\int \frac{(x^5 + 2x^4 + 8)dx}{x^3 - 9x}$; 2) $\int \frac{(4x+1)dx}{x^2(x+1)(x-1)}$.

7. 1) $\int \frac{(x-8)dx}{x^3 - 4x^2 + 4x}$; 2) $\int \frac{(2x+1)dx}{x^3(x+2)(x-1)}$.

8. 1) $\int \frac{(x^3 + 1)dx}{x^5 - x^2}$; 2) $\int \frac{(3x+4)dx}{x^2(x+4)(x-1)}$.

9. 1) $\int \frac{(x^5 + 3)dx}{x^3 - 1}$; 2) $\int \frac{(2x+3)dx}{(x-1)^2(x+2)^2}$.

10. 1) $\int \frac{(x^3 - 2x^2 + 3)dx}{x^3 - 16x}$; 2) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+4)}$.

1. 1) $\int \frac{(x^5 + x^3 + x + 1)dx}{x^3 + 4x}$; 2) $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$.

12. 1) $\int \frac{(x^3 + 4)dx}{x^3 - x^2}$; 2) $\int \frac{(x^2 + 2x + 6)dx}{(x-1)(x-2)(x-4)}$.

13. 1) $\int \frac{(x+4)dx}{(x^2-1)(x+2)(x+3)}$; 2) $\int \frac{(x^5 + 2x^3 + x + 1)dx}{x^3 + 9x}$.

14. 1) $\int \frac{(x^5 + 3x^3 + 7)dx}{x^4 - 8x}$; 2) $\int \frac{(3x+8)dx}{(x+3)(x-1)(x-2)}$.

15. 1) $\int \frac{(x^5 + x^4 + 8)dx}{x^3 - 4x}$; 2) $\int \frac{(2x-1)dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

16. 1) $\int \frac{\left(x^2+3x+6\right)dx}{x^4+5x^2+4}$; 2) $\int \frac{(2x-1)\,dx}{(x-2)(x-3)(x-4)}$.

17. 1) $\int \frac{\left(2x^2-5\right)dx}{x^4-5x^2+6}$; 2) $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2(x-3)(x-4)}$.

18. 1) $\int \frac{(3x-7)\,dx}{x^3+x^2+4x+4}$; 2) $\int \frac{(3x+4)\,dx}{x(x+1)(x+3)}$.

19. 1) $\int \frac{\left(x^3+x+1\right)dx}{x^4-81}$; 2) $\int \frac{\left(2x^2-3x-3\right)dx}{(x-1)\left(x^2-2x+5\right)}$.

20. 1) $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^4+10x^2+9}$; 2) $\int \frac{\left(x^2-3x+2\right)dx}{x\left(x^2+2x+5\right)}$.

21. 1) $\int \frac{x\,dx}{x^3-2x-4}$; 2) $\int \frac{(2x-5)\ dx}{(x-2)(x-3)^2}$.

22. 1) $\int \frac{(x+1)^3\,dx}{x^3-1}$; 2) $\int \frac{(2x+7)\,dx}{x^2(x+3)(x-1)}$.

23. 1) $\int \frac{\left(x^5+1\right)dx}{x^4-16}$; 2) $\int \frac{(4x+3)\,dx}{x^3(x-1)(x-4)}$.

24. 1) $\int \frac{(7x-15)\ dx}{x^3-2x^2+5x}$; 2) $\int \frac{(5x+4)\ \ dx}{x(x-1)^2(x-2)}$.

25. 1) $\int \frac{\left(x^3+x^2-5\right)dx}{x^3-8}$; 2) $\int \frac{(3x+1)\,dx}{x^2(x+3)(x-1)^2}$.

26. 1) $\int \frac{(2x-5)\,dx}{x^3-3x^2+4}$; 2) $\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^3(x+4)(x-1)}$.

27. 1) $\int \frac{\left(x^5+x^4-8\right)dx}{x^3-4x}$; 2) $\int \frac{\left(3x+5\right)dx}{x\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x-3\right)}$.

28. 1) $\int \frac{\left(x^3-2x+5\right)dx}{x^4-1}$; 2) $\int \frac{\left(3x+4\right)dx}{x^3\left(x+1\right)\left(x+2\right)}$.

29. 1) $\int \frac{\left(x^2+x+1\right)dx}{x^4-2x^2+1}$; 2) $\int \frac{\left(3x-2\right)dx}{x^3\left(x+3\right)\left(x-1\right)}$.

30. 1) $\int \frac{\left(x^3+x^2-4\right)dx}{x^4+4x^2+4}$; 2) $\int \frac{\left(2x+5\right)dx}{x\left(x-3\right)\left(x+2\right)}$.

Задание 5. Найти интегралы от иррациональных выражений.

1. 1) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$; 2) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

2. 1) $\int \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $\int \frac{\left(x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$.

3. 1) $\int \frac{\left(2x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x^4}\right)dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x^4}}$; 2) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}+3x}$.

4. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt[8]{x^5}+\sqrt[8]{x}}$.

5. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[10]{x^3}}$; 2) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$.

6. 1) $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}+4\right)\sqrt{x}}$; 2) $\int \frac{dx}{\left(x-1\right)\sqrt[4]{x^3}}$.

7. 1) $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}\right)}$; 2) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$.

8. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

9. 1) $\int \frac{\sqrt{x}\ dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $\int \frac{\left(\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}\right)dx}{\sqrt[4]{x}}$.

10. 1) $\int \frac{\sqrt[6]{x}\ dx}{\sqrt[3]{x}+1}$; 2) $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\sqrt{x}}$.

11. 1) $\int \frac{\left(\sqrt[6]{x}\ \ +1\right)\ dx}{\sqrt[6]{x^7}\ +\sqrt[4]{x^5}}$; 2) $\int \frac{\sqrt{x}\ dx}{1+\sqrt[4]{x}}$.

12. 1) $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\ dx}{\sqrt[3]{x}+1}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

13. 1) $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x}+4\right)\sqrt{x}}$; 2) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{x^3}}$.

14. 1) $\int \frac{\left(\sqrt{x+1}+1\right)dx}{\sqrt{x+1}-1}$; 2) $\int \frac{dx}{x\ \sqrt{x+1}}$.

15. 1) $\int \frac{(x+1)\ dx}{x\ \sqrt{x-2}}$; 2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

16. 1) $\int x\sqrt[4]{x-2}dx$; 2) $\int \frac{x\ dx}{\sqrt[3]{2x-3}}$.

17. 1) $\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$; 2) $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}\right)}$.

18. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}$; 2) $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}\ dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

19. 1) $\int \frac{\sqrt{x^5}\ dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $\int \frac{\left(\sqrt[6]{x+1}\ \ -1\right)dx}{(x+1)\ \left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)}$.

20. 1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; 2) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$.

21. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt{x+1}}$; 2) $\int \frac{\left(x^2+\sqrt{x+1}\right)dx}{\sqrt[3]{x+1}}$.

22. 1) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}$; 2) $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)\sqrt{x}}$.

23. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

24. 1) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 2) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{2-x}}$.

25. 1) $\int \frac{(x+1)\,dx}{x\sqrt{x-2}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$.

26. 1) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-\sqrt[3]{x^5}}$; 2) $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)dx}{\sqrt[6]{x^5}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$.

27. 1) $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x+4}+1\right)\sqrt{x+4}}$; 2) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[6]{x}}$.

28. 1) $\int \frac{\sqrt{1+x}\,dx}{x}$; 2) $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}\,dx}{1+\sqrt[3]{x-1}}$.

29. 1) $\int \frac{\left(x^2+\sqrt{1+x}\right)dx}{\sqrt[3]{1+x}}$; 2) $\int \frac{\sqrt{x+2}\,dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

30. 1) $\int \frac{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)dx}{\left(\sqrt{x}+4\right)\sqrt[4]{x^3}}$; 2) $\int \frac{\left(\sqrt[3]{x+1}+1\right)dx}{\sqrt[3]{x+1}-1}$.

Задание 6. Найти интегралы от тригонометрических выражений.

1. 1) $\int \cos 7x \sin 3x\, dx$; 2) $\int \sin^3 x \cos^4 x\, dx$;

3) $\int (1+3\cos 2x)^2\, dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$.

2. 1) $\int \cos 6x\ \cos 7x\, dx$; 2) $\int \sin^5 x\ \cos^4 x\, dx$;

3) $\int \frac{(\cos x - \sin x)^2\, dx}{\sin 2x}$; 4) $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}$.

3. 1) $\int \sin 2x \sin 6x\, dx$; 2) $\int \sin^7 x \cos^2 x\, dx$;

3) $\int \frac{\left(3-\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}\right) dx}{\sin^2 x}$; 4) $\int \frac{\cos^5 x\ dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}$.

4. 1) $\int \cos 2x\ \sin 4x\ dx$; 2) $\int \sin^6 x\ \cos^3 x\ dx$;

3) $\int \frac{\left(2-\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}\right) dx}{\cos^2 x}$; 4) $\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\sqrt[4]{\cos x}}$.

5. 1) $\int \cos 5x \cos x\, dx$; 2) $\int \sin^4 x\ \cos^5 x\ dx$;

3) $\int (1+2\sin x)^2\, dx$; 4) $\int \frac{\cos 2x\, dx}{\sin^4 x}$.

6. 1) $\int \cos 2x \cos 5x\, dx$; 2) $\int \sin^2 x\ \cos^7 x\ dx$;

3) $\int \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x\, dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

7. 1) $\int \cos 2x \sin 3x\, dx$; 2) $\int \sin^3 x\ \cos^5 x\ dx$;

3) $\int \frac{\left(1+\sin^3 x\right) dx}{\cos^2 x}$; 4) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^5 x}$.

8. 1) $\int \cos 2x \sin 6x\, dx$; 2) $\int \sin^5 x\ \cos^3 x\ dx$;

3) $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$; 4) $\int \frac{\sin^7 x\, dx}{\cos^4 x}$.

9. 1) $\int \cos 7x \sin 3x \, dx$; 2) $\int \sin^3 x \ \cos^7 x \ dx$;

3) $\int \frac{dx}{\mathrm{tg}^6 x}$; 4) $\int \frac{\cos^7 x \, dx}{\sqrt[5]{\sin x}}$.

10. 1) $\int \cos 4x \ \sin 8x \ dx$; 2) $\int \sin^2 x \ \cos^6 x \ dx$;

3) $\int \frac{\sin x \, dx}{(1-\cos x)^2}$; 4) $\int \frac{dx}{\cos x \ \sin^5 x}$.

11. 1) $\int \cos x \cdot \sin 3x \, dx$; 2) $\int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \, dx$;

3) $\int \frac{\cos x \, dx}{(1-\cos x)^2}$; 4) $\int \frac{dx}{\mathrm{tg}^8 x}$.

12. 1) $\int \cos 3x \cdot \sin x \, dx$; 2) $\int \sin^6 x \cdot \cos^2 x \, dx$;

3) $\int \mathrm{ctg}^4 x \, dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

13. 1) $\int \cos 6x \sin 4x \, dx$; 2) $\int \sin^8 x \cos^3 x \, dx$;

3) $\int \frac{\sin^7 x \, dx}{\cos^4 x}$; 4) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

14. 1) $\int \cos 3x \cos 5x \, dx$; 2) $\int \sin^6 x \cos^5 x \, dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^5 x}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{tg} \ x}}$.

15. 1) $\int \sin 4x \sin 5x \, dx$; 2) $\int \sin^5 x \cos^6 x \, dx$;

3) $\int \sqrt[3]{\sin^4 x} \cos^3 x \ dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\mathrm{ctg} \, x}}$.

16. 1) $\int \cos x \sin x \, dx$; 2) $\int \sin^3 x \cos^8 x \, dx$;

3) $\int \sqrt[5]{\sin^2 x} \cos^5 x \, dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{ctg} \, x}}$.

17. 1) $\int \cos 7x \sin 3x \, dx$; 2) $\int \sin^4 x \cos^7 x \, dx$;

3) $\int \sqrt[7]{\cos^4 x}\sin^5 x\,dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}$.

18. 1) $\int \cos 4x \cos 3x\,dx$; 2) $\int \sin^7 x \cos^4 x\,dx$;

3) $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin x}$; 4) $\int \frac{\cos 3x\ dx}{4+\sin 3x}$.

19. 1) $\int \cos 9x \sin 7x\,dx$; 2) $\int \sin^3 x \cos^6 x\,dx$.

3) $\int \sin^2 x \cos 3x\,dx$; 4) $\int \frac{\sin 2x\ dx}{1+\sin^2 x}$.

20. 1) $\int \sin 5x \sin 3x\,dx$; 2) $\int \sin^5 x \cos^5 x\,dx$;

3) $\int \sin^2 x \sin 3x\,dx$; 4) $\int \frac{\sin x\ dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$.

21. 1) $\int \sin 7x \cdot \sin 3x\ dx$; 2) $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$;

3) $\int \frac{\sin^5 x\,dx}{\cos^3 x}$; 4) $\int \frac{dx}{3+5\sin x}$.

22. 1) $\int \sin 3x \sin x\,dx$; 2) $\int \sin^4 x \cos^2 x\,dx$;

3) $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos x - 5}$; 4) $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$.

23. 1) $\int \sin^3 3x\ dx$; 2) $\int \frac{\sin^3 x\ dx}{\cos^2 x}$;

3) $\int \frac{x\cos x\,dx}{\sin^5 x}$; 4) $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$.

24. 1) $\int (1+2\cos x)^2\ dx$; 2) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx$;

3) $\int \frac{\sin x \cos x\,dx}{(1+\cos x)^2}$; 4) $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$.

25. 1) $\int (1-\sin 2x)^2\ dx$; 2) $\int \sin^3 x \cos^4 x\,dx$;

3) $\int \frac{\sin x + \cos x}{8 + \sin 2x} dx$;

4) $\int \frac{\sin^3 x \, dx}{\sqrt[3]{\cos^5 x}}$.

26. 1) $\int \left(1 + \cos^4 x\right) dx$;

2) $\int \frac{\sin^3 x \, dx}{1 + \cos^2 x}$;

3) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$;

4) $\int \frac{dx}{5 + 4\cos x}$.

27. 1) $\int \frac{\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) dx}{\sin 2x}$;

2) $\int \frac{\sin^3 x \, dx}{\sqrt[5]{\cos x}}$;

3) $\int \frac{2\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} dx$;

4) $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

28. 1) $\int \frac{(\sin x + \cos x) dx}{\sin 2x}$;

2) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$;

3) $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$;

4) $\int \frac{\cos^3 5x \, dx}{\sin^4 5x}$.

29. 1) $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$;

2) $\int \frac{dx}{\sin x (1 + \cos x)}$;

3) $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$;

4) $\int \frac{dx}{3 + 2\cos^2 x}$.

30. 1) $\int \operatorname{ctg}^7 x \, dx$;

2) $\int \frac{\sin x \, dx}{1 - \cos x}$;

3) $\int \frac{dx}{\sin^2 (3x - 2)}$;

4) $\int \sqrt[3]{2\sin x - 7} \cos x \, dx$.

Задание 7. Найти интегралы, выбрав соответствующий метод.

1. 1) $\int \operatorname{tg} 2x \, dx$;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x - 2)^4}}$.

2. 1) $\int \cos^{11} 2x \sin 2x \, dx$;

2) $\int \frac{7^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}$.

3. 1) $\int \mathrm{ctg}^2 x\, dx$; 2) $\int \dfrac{x^5\ dx}{\sqrt{x^6+7}}$.

4. 1) $\int x^2 e^{-x^3} dx$; 2) $\int \dfrac{\sqrt{\mathrm{tg}\, x}\, dx}{\cos^2 x}$.

5. 1) $\int x \ln x\, dx$; 2) $\int \dfrac{dx}{\arccos x \sqrt{1-x^2}}$.

128

6. 1) $\int x^2 \ln x\, dx$; 2) $\int \dfrac{(2x+3)\, dx}{\left(x^2+3x-1\right)^4}$.

7. 1) $\int \cos(6x+1)\, dx$; 2) $\int \dfrac{\sqrt[x]{e}}{x^2} dx$.

8. 1) $\int x^3 e^x dx$; 2) $\int \dfrac{\ln 5x\, dx}{x}$.

9. 1) $\int \sqrt{16-x^2}\, dx$; 2) $\int \dfrac{\cos x\, dx}{\sin^2 x}$.

10. 1) $\int x\sqrt{x+3}\, dx$; 2) $\int \dfrac{x\ dx}{x^4+1}$.

11. 1) $\int \left(x^2-4x+1\right)\ e^{-x} dx$; 2) $\int \dfrac{x^2\ dx}{\sqrt{x^6-4}}$.

12. 1) $\int \cos\left(\ln x\right)\, dx$; 2) $\int \dfrac{(7x+2)\ dx}{\sqrt{x^2+10}}$.

13. 1) $\int \mathrm{arctg}\sqrt{x}\, dx$; 2) $\int \dfrac{(x+8)\ dx}{\sqrt{x^2+10}}$.

14. 1) $\int x \sin\sqrt{x}\, dx$; 2) $\int \dfrac{(1-6x)\ dx}{(x-1)\ (x+1)}$.

15. 2) $\int \sin 2x \ln\left(\sin x\right) dx$. 1) $\int \dfrac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

16. 1) $\int \left(2x-1\right) e^{3x} dx$; 2) $\int \dfrac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

17. 1) $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$; 2) $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

18. 1) $\int x 2^x\, dx$; 2) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$.

19. 1) $\int \ln^2 x\, dx$; 2) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x}}$.

20. 1) $\int (2x+5)\cos x\, dx$; 2) $\int \frac{\arccos x\, dx}{\sqrt{1+x}}$.

21. 1) $\int x \operatorname{arcctg} x\, dx$; 2) $\int \frac{x\cos x\, dx}{\sin^3 x}$.

22. 1) $\int x 4^{-x} dx$; 2) $\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x}$.

23. 1) $\int x\ln(x-1)\, dx$; 2) $\int \frac{\cos\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x}}$.

24. 1) $\int (x-3x)\ln x\, dx$; 2) $\int \frac{x\cos x\, dx}{\sin^2 x}$.

25. 1) $\int x^2 \ln^3 x\, dx$; 2) $\int \frac{x\sin x\, dx}{\cos^2 x}$.

26. 1) $\int x^2 \cos x\, dx$; 2) $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{x-1}}$.

27. 1) $\int \cos^2(\ln x)\, dx$; 2) $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{x+2}$.

28. 1) $\int \operatorname{tg} x \cos^3 x\, dx$; 2) $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

29. 1) $\int \left(x^2+2x+3\right) e^{2x} dx$; 2) $\int \frac{(5x-6)\, dx}{\sqrt{1-3x}}$.

30. 1) $\int \sqrt{e^x+1}\, dx$; 2) $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. Лекции по математическому анализу, М., Высшая школа, 1999.
2. С.М. Никольский, Курс математического анализа. М., Наука , т. 1, 1990, т.2, 1991.
3. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа. М., Высшая школа, т.1, 2, 1981.
4. Я.С. Бугров, С.М. Никольский, Дифференциальное и интегральное исчисление, М., Наука, 1980.
5. Е.В. Майков, Математический анализ. М., МГУ, Введение, 1998; Предел числовой последовательности, 1999; Числовые ряды, 1999.
6. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов, под ред. Б.П. Демидовича, М., ГИФМЛ, 1961, 2000.
7. К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. Сборник задач по высшей математике. 1 курс, Москва, Айрис пресс, 2008.
8. К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. Сборник задач по высшей математике. 2 курс, Москва, Айрис пресс, 2008.

Дополнительная

1\. Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление, т. 1, М., Наука, 1985.

2\. Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление, т. 2, М., Наука, 1985.

3\. В.С. Шипачев. Основы высшей математики. Москва. Высшая школа, 1986

3\. Дмитрий Письменный. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. Москва, Айрис пресс, 2007.

4\. Берман Г.Н. Сборник задач по математическому анализу. М., Наука, 1985.

5\. И.А. Каплан, В.И. Пустынников. Практикум по высшей математике в двух томах. Том 1. Москва, ЭКСМО, 2008.

6\. И.А. Каплан, В.И. Пустынников. Практикум по высшей математике в двух томах. Том 2. Москва, ЭКСМО, 2008.

7\. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть I. Москва. Высшая школа, 1986.

7\. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть II. Москва. Высшая школа, 1986.

Приложение 1

ПРОГРАММА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ

1. Что такое математический анализ. Переменные и постоянные величины. Множества. Операции над множествами. Декартово произведение множеств. Отображение и функции. Эквивалентные множества. Счетные и несчетные множества. Понятие о мощности множества. Мощность континуума.

2. Множество действительных чисел. Основные свойства действительных чисел. Полнота множества действительных чисел. Правило сравнения действительных чисел. Леммы об отделимости множеств. Система вложенных отрезков и последовательности стягивающихся отрезков. Множество комплексных чисел.

3. Понятие предела последовательности. Арифметические действия с переменными, имеющими предел. Бесконечно малая и бесконечно большая величины. Неопределенные выражения. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса. Определение числа e. Принцип вложенных отрезков. Точная верхняя и нижняя грани множества. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Верхний и нижний пределы. Условие Коши сходимости последовательности.

4. Функции, области определения и задания. Классификация функций. Различные виды задания функции. Графики функций. Основные элементарные функции.

5. Предел функции при $x \to x_0$ и при $x \to \infty$. Действия над пределами. Левый и правый пределы. Свойства пределов. Равносильность понятий предела по Коши и по Гейне. Порядок бесконечно малой функции. Понятия функций $o\left(\varphi\left(x\right)\right)$ и $O\left(\varphi\left(x\right)\right)$. Замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших и их приложения.

6. Определение непрерывности функции. Непрерывность функции в промежутке. Разрывы, их классификация. Монотонные функции и свойства их разрывов. Действия над непрерывными функциями. Непрерывность сложных и обратных функций. Непрерывность элементарных функций.

7. Свойства функций, непрерывных на отрезке (наибольшее и наименьшее значения, ограниченность, теорема Вейерштрасса, теорема Больцано-Коши, обращение в нуль в промежуточной точке). Понятие равномерной непрерывности. Теорема Гейне-Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке. Свойства замкнутых и открытых множеств. Компакт. Функции, непрерывные в компакте.

8. Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной, ее механический и геометрический смысл. Уравнения касательной и нормали к кривой. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции. Производная суммы, произведения и частного функций. Производная сложной и обратной функции.

9. Производные основных элементарных функций. Гиперболические функции и их производные. Дифференцирование неявных и функций, заданных в параметрической форме. Логарифмическое дифференцирование.

146

10. Производные высших порядков от функций, заданных явно, неявно и в параметрической форме. Производные высших порядков от функций $e^x, \ \sin x, \ \cos x.$

11. Основные теоремы о дифференцируемых функциях (Ферма, Ролль, Лагранж, Коши) и их приложения.

12. Раскрытие неопределенностей, Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.

13. Формула Тейлора и ее приложения. Формулы Тейлора для элементарных функций. Формы остаточных членов.

14. Исследование поведения функций. Возрастание и убывание функции. Локальные экстремумы и их необходимые и достаточные признаки существования.

15. Глобальные экстремумы. Выпуклость, вогнутость и точки перегиба. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции.

16. Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица интегралов. Методы интегрирования (непосредственное интегрирование; интегрирование заменой переменной; интегрирование по частям).

17. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование некоторых иррациональных и тригонометрических выражений.

Приложение 2

ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Множества и операции над ними. Вещественные числа: определение, аксиомы.
2. Верхняя и нижняя грани числового множества. Теорема о существовании верхней и нижней грани.
3. Предел последовательности, геометрическая интерпретация. Арифметические свойства предела последовательности.
4. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства.
5. Ограниченные последовательности. Свойства сходящихся последовательностей.
6. Монотонные последовательности. Теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности.
7. Принцип компактности отрезка.
8. Частичные последовательности и частичные пределы. Число e.
9. Определения предела функции в точке по Коши и по Гейне, их эквивалентность. Геометрическая интерпретация предела.
10. Бесконечный предел функции и предел на бесконечности. Геометрическая интерпретация.
11. Бесконечно большие функции, их свойства, связь с бесконечно малыми.
12. Свойства предела функции.
13. Односторонние пределы, связь с пределом функции в точке.
14. Первый и второй замечательные пределы и их следствия.
15. Сравнение бесконечно малых функций. Принцип замены и отбрасывания бесконечно малых.
16. Критерий Коши существования предела функции.
17. Определение непрерывности функции в точке, геометрическая интерпретация.
18. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
19. Равномерная непрерывность функции. Теорема Кантора.
20. Точки разрыва и их классификация.
21. Непрерывность элементарных функций (степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных тригонометрических функций).
22. Непрерывность обратной функции.
23. Понятие производной, геометрический и механический смысл. Дифференцируемость функции.

24. Правила дифференцирования. Дифференцирование элементарных функций.
25. Дифференциал функции, геометрический и механический смысл дифференциала.
26. Производные и дифференциалы высших порядков.
27. Бином Ньютона.
28. Основные теоремы дифференциального исчисления.
28. Первая и вторая теоремы Лопиталя и их следствия.
29. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, Лагранжа, Коши. Разложение элементарных функций по формуле Тейлора
30. Условия возрастания и убывания функции в точке и на промежутке.
31. Экстремумы. Необходимые и достаточные условия экстремума.
32. Выпуклые функции, точки перегиба. Необходимые и достаточные услов**ия**.
33. Вектор-функция и ее дифференцирование.
34. Восстановление функций по ее производной. Первообразная функция и неопределенный интеграл, их свойства. Непосредственное интегрирование.
35. Методы интегрирования по частям и подстановкой в неопределенном интеграле.
36. Интегрирование простейших рациональных функций.
37. Интегрирование рациональных функций. Метод Остроградского.
38. Интегрирование простейших иррациональностей.
39. Интегрирование иррациональностей функций.
40. Интегрирование тригонометрических функций.

.

Приложение 3

КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК

1. Множества

Понятие «множество» нельзя строго определить. Понятие «множества» в математике и есть одно из самых простых, первоначальных и общих.

Множества обозначаются буквами A, B, C и т.д.

Элементы множества обозначаются буквами a, b, c и т.д.

Если элемент a принадлежит множеству A, то это обозначается символом $a \in A$. Если элемент b не принадлежит множеству B, то это обозначается символом $b \notin B$.

Если множество A содержит все элементы множества B, то B называется подмножеством множества A и обозначается символом $B \subset A$.

Если имеют место соотношения $B \subset A$ и $A \subset B$, то множества A и B равны, т.е. равные множества состоят из одних и тех же элементов.

Если множество содержит конечное число элементов, то называется конечным, в противном случае – бесконечным. Например, множество студентов учебной группы – конечное, а множества натуральных чисел – бесконечное.

Если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется пустым множеством.

Над множествами можно произвести ряд действий и их можно иллюстрировать с помощью кругов Эйлера.

Объединением (*суммой*) множеств A и B называется множество $A \cup B$, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств (рис. 1).

Пересечением (*произведением*) множеств A и B называется множество $A \cap B$, элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B (рис. 2).

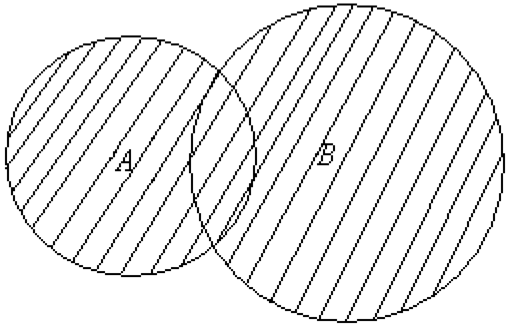


Рис. 1

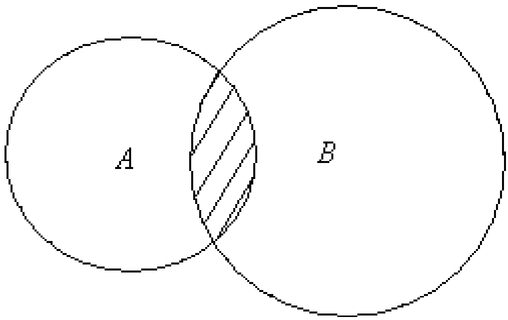


Рис. 2

Разностью множеств A и B называется множество $A \setminus B$, элементы которого принадлежат множесву A, но не принадлежат множеству B (рис. 3).

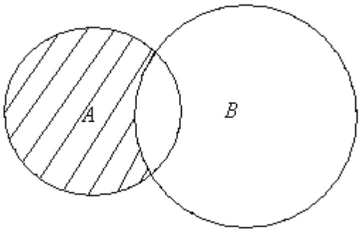


Рис. 3

Симметричной разностью множеств A и B называется множество $A\Delta B$, являющееся объединением разностей множеств $A \setminus B$ и $B \setminus A$, т.е. $A\Delta B = B \setminus A \bigcup B \setminus A$ (рис. 4).

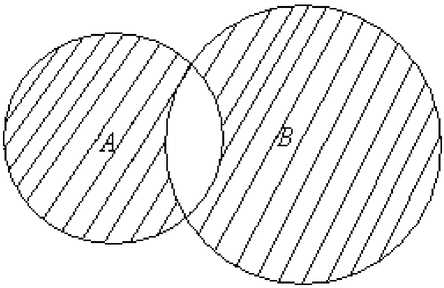


Рис. 4.

2. Комплексные числа

Алгебраическая форма комплексного числа:

$$z = x + iy,$$

где x, y – действительные числа, i – мнимая единица.

Для мнимой единицы имеют место соотношения:

$$i = \sqrt{-1} \text{ или } i^2 = -1;$$

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -i, \quad i^{4k+3} = -i.$$

Если $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$z_1 \pm z_2 = \left(x_1 \pm x_2\right) + i\left(y_1 \pm y_2\right).$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Тригонометрическая форма комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r -$ модуль комплексного числа, $\varphi -$ аргумент комплексного числа. Связи между комплексными числами алгебраических и тригонометрических форм:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

и

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), & \text{если } x > 0, \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi, & \text{если } x < 0,\ y \geq 0, \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi, & \text{если } x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$

и

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

Возведение комплексного числа в n-ю степень:

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Это – формула Муавра.

Извлечение корня n-й степени из комплексного числа:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, (n-1).$$

Значениям корня n-й степени соответствуют вершины правильного n-угольника, расположенные в круге радиуса $\sqrt[n]{r}$.

ФУНКЦИЯ

1. Определение и классификация функций

Символика функциональной зависимости:

$$y = f\left(x\right),$$

где $x-$ *аргумент* или *независимая переменная*, $y-$ *функция* или *зависимая переменная*, $f-$ множество действий, которые надо выполнить над аргументом, чтобы получить функцию.

Функция задается тремя способами: табличным, графическим и аналитическим способами. Вышеприведенная зависимость $y = f\left(x\right)-$ пример аналитического способа, который является универсальным.

Область определения функции – множество значений аргумента, при которых функция имеет смысл.

Областью определения функции может быть числовые множества, такие как: сегмент (отрезок) $\left[a;\ b\right]$, интервал $\left(a;\ b\right)$, полусегмент $\left[a;\ b\right)$, полуинтервал $\left(a;\ b\right]$, числовая ось $\left(-\infty;\ +\infty\right)$. Иногда используют термином «промежуток», который объединяет эти числовые промежутки.

Если в состав формулы входят только алгебраические действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня, совершаемые над аргументом в ограниченном количестве, то функция называется алгебраической.

Все остальные функции называются трансцендентными.

Алгебраические функции разделяются на рациональные и иррациональные. Рациональной называется такая функция, в которой ни разу над аргументом не совершается извлечение корня или возведение в дробную степень. В противном случае функция называется иррациональной.

Иррациональные функции не подразделяются, а рациональные подразделяются на целые и дробные.

Целыми функциями называются такие, где аргумент ни разу не встречается в знаменателе, в противном случае мы имеем дробную функцию.

В свою очередь целые функции еще подразделяются на порядки, прочем порядком называется наибольшая степень, в которую возводится аргумент.

Дробные функции далее никак не подразделяются. Общим видом любой дробной функции будет частное от деления двух целых функций.

Имеется очень большое число типов трансцендентных функций. К числу их относятся показательные, логарифмические, тригонометрические функции и т.п. функции.

Функциональная зависимость вида $F(x,y)=0,$ т.е. неразрешенная относительно одной из переменных, называется *неявной*, тогда функциональная зависимость вида $y=f(x)$ называется *явной*.

Если функция задана в неявном виде, то в некоторых случаях можно найти соответствующую явную функцию. В общем случае переход в явную форму задания функции затруднителен или невозможно. Поэтому приходится исследовать неявную функции без перехода в явную.

Если зависимость между переменными x и $y,$ задана посредством третьей переменной t, т.е. в виде

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

то это задание функции в параметрической форме. Переменная t называется параметром.

В некоторых случаях параметр t можно исключить и найти соответствующую неявную или явную функцию.

Графиком функции в декартовой прямоугольной системе координат называется множество всех точек, абсциссы которых являются значениями аргумента, а ординаты – соответствующими значениями функции.

Функция называется *возрастающей (убывающей)* в интервале, если большему значению аргумента из этого интервала соответствует большее (меньшее) значения функции.

График возрастающей на интервале $(a;\ b)$ функции, если его рассматривать слева направо, поднимается вверх, а для убывающей функции – опускается вниз.

Значение аргумента, при котором функция обращается в ноль, называется *нулем функции.*

Если функция задана формулой $y=f(x),$ то для нахождения нуля (или нулей) функции следует решить уравнение $f(x)=0.$

При графическом задании нулями функции являются точки пересечения ее графиком оси абсцисс.

Функция называется *четной,* если при изменении знака допустимого аргумента значение функции не изменяется, т.е.

$$f(-x)=f(x).$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция называется *нечетной,* если при изменении знака допустимого аргумента значение функции меняет знак на противоположный, т.е.

$$f(-x)=-f(x).$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Если имеет место неравенство вида

$$f(-x)\neq\pm f(x),$$

то эта функция *общего вида*.

Функция $f(x)$, определенная на некотором множестве, называется *ограниченной* на этом множестве X, если существует такое число $M>0$, что для всех $x\in X$ выполняется неравенство $|f(x)|<M$.

График ограниченной функции лежит между прямыми $y=-M$ и $y=M$.

Функция $f(x)$ называется *периодической,* если существует такое положительное число T, что

$$f(x+T)=f(x)=f(x-T)$$

для любого *x* из области определения функции (точек x, $x+T$, $x-T$, принадлежащих области определения функции).

При этом наименьшее положительное T с таким свойством (если таковое существует) называется *периодом* функции.

График периодической функции получается путем повторения части графика, соответствующего интервалу оси абсцисс, равному по длине периоду функции.

Сложной функцией называется функция, аргумент которой также является функцией, т. е. $F(x)=f(\varphi(x))$.

Иначе говоря, чтобы сосчитать значение в точке *x* сложной функции $f(\varphi(x))$, составленной из функций f и φ, следует сначала найти частное значение $u=\varphi(x)$ внутренней функции φ, а затем подставить его в качестве аргумента во внешнюю функцию f.

При этом область определения функции $F(x)$ следует выбирать таким образом, чтобы промежуточное множество U с одной стороны, было областью значений функции $\varphi(x)$, а с другой стороны, являлось областью определения функции $f(u)$.

Если функциональную зависимость вида $y=f(x)$ можно решить относительно x, то получается функциональ-ная зависимость вида $x=\varphi(y)$. Эти две зависимости имеют один и тот же график. Если в функциональной зависимости $x=\varphi(y)$ поменять местами x и y, то получается зависимость вида $y=\varphi(x)$, которая называется обратной функцией для функции $y=f(x)$. Функции $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ называются взаимно обратными функциями. Их графики симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Если одну из этих функций принять за прямую функцию, то другая будет обратной и наоборот. Для всякой однозначной и монотонной функции существует подобная же обратная функция.

Основными элементарными функциями называются:

1) степенная функция: $y=x^{\alpha}$, где $\alpha -$ действительное число;

2) показательная функция: $y=a^{x}$, где $a>0,\ a\neq 1$;

3) логарифмическая функция: $y=\log_a x$, где $a>0,\ a\neq 1$;

4) тригонометрические функции: $y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\operatorname{tg} x,$ $y=\operatorname{ctg} x$;

5) обратные тригонометрические функции: $y=\arcsin x,\ y=\arccos x,$ $y=\operatorname{arctg} x,\ y=\operatorname{arcctg} x.$

К множеству *элементарных функций* относятся все основные элементарные функции и постоянные, а также все функции, получающиеся из них с помощью четырех арифметических действий и операции взятия функции от функции, примененных последовательно конечное число раз.

2. Предел последовательности

Если в функции $y = f(x)$ переменная x принимает натуральные значения, то $f(n)$ называется *функцией целочисленного аргумента* или *последовательностью* и обозначается символом $\{x_n\}$ или $x_1,\ x_2,\ \dots,x_n,\ \dots$.

x_n называется n -м членом последовательности.

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n > N(\varepsilon)$ имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, и обозначается: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

Это определение коротко записывается в виде:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \ \exists N(\varepsilon)\ \ \forall n > N(\varepsilon)\ \ |x_n - a| < \varepsilon.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$ то последовательность $\{x_n\}$ сходится к a или стремится к a и пишется в виде $x_n \to a$ при $n \to \infty.$

Последовательность, имеющаяся предел, называется *сходящейся.*

Если последовательность не имеет предела, то называется *расходящейся*.

Последовательность, принимающую только одно значение, будем называть постоянной.

Любая окрестность предела последовательности содержит все члены последовательности, за исключением конечного их числа.

Последовательность не может иметь двух различных пределов.

Сходящаяся последовательность ограничена.

Если $\{x_n\},\ \{y_n\} -$ две числовые последовательности, то их суммой, произведением и частным называются соответственно последовательности вида

$$\{(x_n + y_n)\},\ \ \{(x_n y_n)\},\ \ \left\{\left(\frac{x_n}{y_n}\right)\right\}.$$

Частное определено лишь при $y_n \neq 0,\ n \in N.$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,$ то:

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n + y_n\right) = a + b;\quad \lim_{n\to\infty}\left(x_n - y_n\right) = a - b;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n y_n\right) = ab;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}\ \left(\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0\right).$$

Если $x_n \le y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3. Предел функции

Число A называется пределом функции $y = f\left(x\right)$ при $x \to x_0\ \left(x \neq x_0\right)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая δ - окрестность точки $a,$ что для всех $\left|x - x_0\right| < \delta$ выполняется условие $\left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon$ и обозначается:

$\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right) = A,$ или $f\left(x\right) \underset{x\to x_0}{\to} A.$

Это определение коротко записывается в виде:

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\ \ \forall\left|x - x_0\right| < \delta\ \ \left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon.$$

Число A называется правым (левым) пределом функции $f\left(x\right)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $x_0 < x < x_0 + \delta\ \ \left(x_0 - \delta < x < x_0\right)$ выполняется неравенство $\left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon$.

Число A называется левым пределом $f\left(x\right)$ при $x \to x_0$ (обозначение $\lim\limits_{x\to x_0 -} f\left(x\right) = f\left(x_0 - 0\right) = A$), если:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x:\ \ x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow \left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon.$$

Число A называется правым пределом $f\left(x\right)$ при $x \to x_0$ (обозначение $\lim\limits_{x\to x_0 +} f\left(x\right) = f\left(x_0 + 0\right) = A$), если:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x:\ \ x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow \left| f\left(x\right) - A \right| < \varepsilon.$$

Функция $f\left(x\right)$ имеет в точке x_0 предел тогда и только тогда, когда в этой точке существует как правый, так и левый пределы и они равны. В этом случае предел функции равен односторонним пределам.

Функция $f\left(x\right)$ называется бесконечно большой величиной (или просто бесконечно большой) в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) = \infty.$

Число A называется пределом функции $f\left(x\right)$ при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число $N,$ что для всех x, удовлетворяющих неравенству $\left|x\right| > N,$ будет выполняться неравенство $\left| f\left(x\right) - A \right| < \varepsilon$.

Из определения следует, что для достаточно большого числа $M > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $\left|x - x_0\right| < \delta$, имеет место неравенство $\left| f\left(x\right) \right| > M$.

Если $f\left(x\right)$ стремится к бесконечности при $x \to x_0$ и при этом принимает только положительные или только отрицательные значения, то соответственно пишут:

$$\lim_{x \to x_0} f\left(x\right) = +\infty \text{ или } \lim_{x \to x_0} f\left(x\right) = -\infty.$$

Если функция стремится к бесконечности при $x \to \infty$, то пишут: $\lim\limits_{x \to \infty} f\left(x\right) = \infty,$

Если функция стремится к бесконечности при $x \to \infty$, то пишут: $\lim\limits_{x \to \infty} f\left(x\right) = \infty,$ и, в частности, может быть:

$$\lim_{x \to +\infty} f\left(x\right) = \infty,\ \ \lim_{x \to -\infty} f\left(x\right) = \infty,\ \ \lim_{x \to +\infty} f\left(x\right) = -\infty.$$

Функция $f\left(x\right)$ называется ограниченной в данной области изменения аргумента, если существует число $M > 0$

такое, что для всех значений x, принадлежащих рассматриваемой области, будет выполняться неравенство $\left|f\left(x\right)\right| < M$. Если же такое число не существует, то функция $f\left(x\right)$ называется неограниченной в данной области.

Функция $f\left(x\right)$ называется ограниченной при $x \to a$, если существует окрестность точки a, в которой данная функция ограничена.

Функция $f\left(x\right)$ называется ограниченной при $x \to \infty$, если существует такое число $N > 0$, что при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $\left|x\right| > N$, функция ограничена.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) = A$, при этом A есть конечное число, то функция $f\left(x\right)$ является ограниченной при $x \to x_0$.

Если $\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right) = A$, $\lim\limits_{x \to a} g\left(x\right) = B$, то:

$$\lim_{x \to a}\left(f\left(x\right) \pm g\left(x\right)\right) = A \pm B; \quad \lim_{x \to a}\left(f\left(x\right)g\left(x\right)\right) = AB;$$

$$\lim_{x \to a}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = \frac{A}{B} \quad \left(\lim_{x \to a} g\left(x\right) \neq 0\right).$$

4. Бесконечно малые и бесконечно большие

Функция $\alpha\left(x\right)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a}\alpha(x) = 0$.

Функция $f\left(x\right)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right) = \infty$.

Если $\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to a}\dfrac{1}{f(x)} = 0$, если $\lim\limits_{x \to a}\alpha(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to a}\dfrac{1}{\alpha(x)} = \infty$.

Сумма, разность и произведение бесконечно малых есть функция бесконечно малая. Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию есть бесконечно малая.

Отношение же двух бесконечно малых может вести себя различным образом. Две бесконечно малые сравниваются между собой с помощью их отношения.

Пусть $\alpha=\alpha(x)$ и $\beta=\beta(x)$ есть бесконечно малые при $x\to a$, где под a подразумеваются x_0 или ∞.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=0,$ то $\beta-$ бесконечно малая *высшего порядка малости*, чем $\alpha.$ Обозначают $\beta=o(\alpha)$ или $\beta\prec\alpha.$

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty,$ то $\beta-$ бесконечно малая *низшего порядка малости*, чем $\alpha.$ Соответственно $\alpha=o(\beta)$ или $\alpha\prec\beta.$

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=c\neq0,$ то α и β называются бесконечно малыми *одного порядка малости*. Соответственно $\beta=O(\alpha)$ и $\alpha=O(\beta)$. Одинаковость порядков записывают в виде только одного отношения «о большое», что является вольным использованием данного символа.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta^k}=c\neq0,$ то бесконечно малая α имеет k*-й порядок малости* относительно бесконечно малой β.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}$ не существует, то α и β называются *несравнимыми* бесконечно малыми.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=1,$ то α и $\beta-$ *эквивалентные бесконечно малые*. Обозначают $\alpha\sim\beta.$

Если $\alpha\sim\beta,$ то $|\alpha-\beta|$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем каждая из α и $\beta.$

Эквивалентные бесконечно малые широко используются в приближенных вычислениях, нахождении пределов и т.п. в виде $\alpha \sim \beta \Rightarrow \alpha \approx \beta.$

Справедливы следующие соотношения эквивалентности:

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x);$
2. $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x);$
3. $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x);$
4. $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x);$
5. $\log_a\left(1+\alpha(x)\right) \sim \frac{1}{\ln a}\cdot\alpha(x);$
6. $\ln\left(1+\alpha(x)\right) \sim \alpha(x);$
7. $a^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\cdot\ln a,\ \ a>0;$
8. $e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x);$
9. $1-\cos\alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2};$
10. $\sqrt{1+\alpha(x)} \sim 1+\frac{\alpha(x)}{2}.$

5. Непрерывность функции

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в некоторой точке x_0, если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$ где $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$ т.е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Если ввести обозначение $x_0+\Delta x=x,$ то $x\to x_0$ при $\Delta x\to 0.$ Тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0;$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0;$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

Следовательно, если предел функции равен значению функции в предельной точке, то функция называется непрерывной в этой точке.

При нахождении предела функции $y=f(x),$ которая является непрерывной, можно переходить к пределу под знаком функции, то есть

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0}x\right)=f(x_0).$$

Если функция непрерывна на некотором промежутке, то она называется непрерывной на этом промежутке. График этой функции – непрерывная кривая без разрывов.

Равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)= f\left(x_0\right)$ означает, что имеет место равенства

$$f\left(x_0-0\right)= f\left(x_0+0\right)= f\left(x_0\right).$$

Если неравенства

$$f\left(x_0-0\right)= f\left(x_0+0\right)= f\left(x_0\right).$$

каким-то образом нарушено, т.е.

$$f\left(x_0-0\right)= f\left(x_0+0\right)\neq f\left(x_0\right),\quad f\left(x_0-0\right)\neq f\left(x_0+0\right)= f\left(x_0\right).$$

$$f\left(x_0-0\right)\neq f\left(x_0+0\right)\neq f\left(x_0\right),$$

то x_0 называется точкой разрыва. При этом, если $f\left(x_0-0\right)$, $f\left(x_0+0\right)$, $f\left(x_0\right)$ – конечные, то x_0 – *точка разрыва первого рода*.

Если них хотя бы одно бесконечность, то x_0 – *точка разрыва второго рода*.

II. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Определение производной

Производная функции $y= f\left(x\right)$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)- f\left(x\right)}{\Delta x}=\begin{cases} y', \\ \dfrac{dy}{dx}, \\ f'(x). \end{cases}$$

Производная функции $y= f(x)$ в точке x_0:

$$f'(x_0) \text{ или } y'(x_0).$$

Функция, которая имеет производную, называется *дифференцируемой.* Действие нахождение производной называется *дифференцированием*.

Таким образом, схема вычисления производной состоит из следующих действий:

2. Правила дифференцирования

Пусть $c = \text{const}$ и $u(x)$, $v(x)$ и $w(x)-$ дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила:

I. $c' = 0.$ **II.** $x' = 1.$

III. $(u+v)' = u' + v'.$ **IV.** $(uv)' = u'v + uv'.$

V. $(cu)' = cu'.$ **VI.** $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$

VII. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}.$ **VIII.** $\left(\dfrac{u}{c}\right)' = \dfrac{u'}{c}.$

IX. $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}.$

3. Производная сложной и обратной функции

1. Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$. Тогда имеет место формула:

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\cdot\varphi'(x) \text{ или } y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Аналогично, если $y = f(u)$ и $u = \varphi(v)$. $v = \psi(x)$, то

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\cdot\varphi'(y)\cdot\psi'(x) \text{ или } \boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x.}$$

2. Пусть дана функция $y = f(x)$. Решив уравнение $y = f(x)$ относительно x, получим $x = \varphi(y)$. Имеет место формула

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \text{ или } x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

4. Логарифмическое дифференцирование

Функция вида $y = u^v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$, называется сложной показательной функцией.

Для дифференцирования сложной показательной функции используется следующий алгоритм.

$$y=u^{v}\leftrightarrow \ln y=v\ln u\leftrightarrow \frac{1}{y}\cdot y'=v'\ln v+v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow y'=y\left(v'\ln v+v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'\right)\leftrightarrow y'=u^{v}v'\ln u+vu^{v-1}u'.$$

Таким образом, производная функции $y=u^{v}$ состоит из двух слагаемых: первое слагаемое получается, если при дифференцировании предположить, что v есть функция от x, т.е. $v=v(x)$, а $u=\text{const}$, второй слагаемое получается, если предположить, что $u=u(x)$, а $v=\text{const}$.

5. Формулы дифференцирования некоторых функций $\left(u=u(x)\right)$

I. $\left(u^{n}\right)'=nu^{n-1}\cdot u'.$

II. $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'.$

III. $\left(a^{u}\right)'=a^{u}\ln a\cdot u'.$

IV. $\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'.$

V. $\left(\log_{a}u\right)'=\dfrac{1}{u\ln a}\cdot u'.$

VI. $\left(\log_{a}u\right)'=\dfrac{1}{u\ln a}\cdot u'.$

VII. $\left(\sin u\right)'=\cos u\cdot u'.$

VIII. $\left(\cos u\right)'=-\sin u\cdot u'.$

IX. $\left(\operatorname{tg}u\right)'=\dfrac{1}{\cos^{2}u}\cdot u'.$

X. $\left(\operatorname{ctg}u\right)'=-\dfrac{1}{\sin^{2}u}\cdot u'.$

XI. $\left(\arcsin u\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}\cdot u'.$

XII. $\left(\arccos u\right)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}\cdot u'.$

XIII. $\left(\operatorname{arctg}u\right)'=\dfrac{1}{1+u^{2}}\cdot u'.$

XIV. $\left(\operatorname{arcctg}u\right)'=-\dfrac{1}{1+u^{2}}\cdot u'.$

XV. $\left(\operatorname{sh}u\right)'=\operatorname{ch}u\cdot u'.$

XVI. $\left(\operatorname{ch}u\right)'=\operatorname{sh}u\cdot u'.$

XVII. $\left(\operatorname{th}u\right)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^{2}u}\cdot u'.$

XIX. $\left(\operatorname{cth}u\right)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^{2}u}\cdot u'.$

6. Производная неявной функции

Если функция задана в виде $F(x, y) = 0,$ то для нахождения производной нужно дифференцировать обе части уравнения, рассматривая y как функцию от x, а затем из полученного уравнения найти y'.

7. Производная функции, заданной в параметрической форме

Пусть дана функция вида $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ где $t -$ параметр. Тогда справедливо правило:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

8. Производные высших порядков

Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции:

$$y'' = (y')'; \; y''' = (y'')'; \ldots ; \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Если функция задана в параметрической форме, $x = \varphi(t),$ $y = \psi(t),$ то

$$y''_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\psi''\varphi' - \varphi''\psi'}{(\varphi')^3},$$

и, вообще,

$$y'''_{xxx} = \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t}; \ldots ; \; y^{(n)}_{xx\ldots x} = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\left(y_x^{(n-1)}\right)'_t}{x'_t}.$$

9. Дифференциал и его приложения

Дифференциал функции – произведение производной функции на припржение аргумента, т.е.

$$dy = df = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Ввиду того, что приращение аргумента и дифференциал аргумента равны между собой дифференциал функции – произведение производной функции на дифференциал аргумента, т.е.

$$dy = df = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции в рассматриваемой точке x, то можно доказать, что справедливы формулы

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$d(u \cdot v) = udv + vdu,$$

$$d(cu) = cdu \quad (c = \text{const}),$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \quad (v \neq 0),$$

$$dy = y'_u \cdot du, \ \text{ если } y = f(u), \ u = \varphi(x).$$

Формула приложения дифференциала в приближенных вычислениях:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Таблица дифференциалов:

I. $d(c) = 0.$

II. $d(u^n) = nu^{n-1} \cdot du.$

III. $d(\sqrt{u}) = \dfrac{du}{2\sqrt{u}}.$

IV. $d(a^u) = a^u \cdot \ln a \cdot du.$

V. $d(e^u) = e^u \cdot du.$

VI. $d(\log_a u) = \dfrac{du}{u \ln a}.$

VII. $d(\ln u) = \dfrac{du}{u}.$

VIII. $d(\sin u) = \cos u \, du.$

IX. $d(\cos u) = -\sin u \, du.$

X. $d(\operatorname{tg} u) = \dfrac{du}{\cos^2 u} \cdot$

XI. $d(\operatorname{ctg} u) = -\dfrac{du}{\sin^2 u}$.

XII. $d(\arcsin u) = \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

XIII. $d(\arccos u) = -\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

XIV. $d(\operatorname{arctg} u) = \dfrac{du}{1+u^2}$.

XV. $d(\operatorname{arcctg} u) = -\dfrac{du}{1+u^2}$.

XVI. $d(\operatorname{sh} u) = \operatorname{ch} u \cdot du$.

XVII. $d(\operatorname{ch} u) = \operatorname{sh} u \cdot du$.

XVIII. $d(\operatorname{th} u) = \dfrac{du}{\operatorname{ch}^2 u}$.

XIX. $d(\operatorname{cth} u) = -\dfrac{du}{\operatorname{sh}^2 u}$.

Дифференциалы различных порядков функции $y = f(x)$:

$$dy = f'(x)dx;\ \ d^2y = f''(x)dx^2;\ \dots;\ d^n y = d\left(d^{n-1}y\right).$$

10. Правило Лопиталя

Пусть требуется вычислить пределы вида

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}, \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\,g(x)\right], \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right], \qquad (3)$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}, \qquad (4)$$

где a является некоторым конечным действительным или равно бесконечности.

При нахождении предела (1), в частности, может иметь место следующие случаи:

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0;$ б) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty.$

Тогда имеют место неопределенности типов $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

При нахождении предела (2) может иметь место случай:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty.$$

Тогда имеет место неопределенность типа $0 \cdot \infty$.

При нахождении предела (3) может иметь место случай:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty.$$

Тогда имеет место неопределенность типа $\infty - \infty$.

При нахождении предела (4), в частности, может иметь место следующие случаи:

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty;$

б) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0.$

в) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0.$

Тогда имеют место неопределенности типов $1^\infty, \ 0^0, \ \infty^0$.

В случае неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, если

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c = \text{const},$$

то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

т.е. если существует предел отношения производных числителя и знаменателя, то исходный предел существует.

Если при нахождении предела $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ вновь получается неопределенность, то находится предел вида $\lim\limits_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=c=\text{const},$ то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Вообще,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\ldots$$

и если

$$\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=c=\text{const},$$

то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ldots=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=c.$$

Раскрытие неопределенности вида $0\cdot\infty$ приводится к раскрытию неопределенности $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$. Можно пользоваться правилом

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{1/g(x)}\right]\leftrightarrow\frac{0}{0}$$

или

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to a}\left[\frac{g(x)}{1/f(x)}\right]\leftrightarrow\frac{\infty}{\infty}.$$

Для раскрытия неопределенности вида $\infty-\infty$ можно пользоваться следующим алгоритмом:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{1/f(x)}-\frac{1}{1/g(x)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\frac{1/g(x)-1/f(x)}{1/f(x)\cdot 1/g(x)}\right]\leftrightarrow\frac{0}{0}.$$

Для раскрытия неопределенностей видов 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0} введем обозначение

$$y=\left[f(x)\right]^{g(x)}.$$

Тогда, логарифмируя, получим

$$\ln y=g(x)\ln\left[f(x)\right],\ \ y=e^{g(x)\ln\left[f(x)\right]},$$

$$\lim_{x\to a}y=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\ln\left[f(x)\right]}.$$

Таким образом, раскрытие неопределенностей видов 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0} сводится к раскрытию неопределенности вида $0\cdot\infty$.

11. Интервалы монотонности функции

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и имеет неотрицательную (положительную) производную в интервале $(a;\ b)$, то она не убывает (строго возрастает) на отрезке $[a;\ b]$.

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и имеет неположительную (отрицательную) производную в интервале $(a;\ b)$, то она не возрастает (строго убывает) на отрезке $[a;\ b]$.

Если $f(x)$ имеет в интервале $(a;\ b)$ производную, равную нулю, то она постоянна в $(a;\ b)$.

Функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) в точке x_0, если существует число $\delta>0$ такое, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}>0\quad\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}<0\right)\ \text{при}\ 0<\left|\Delta x\right|<\delta.$$

Если $f'(x_0)>0$ $\left(f'(x_0)<0\right)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0.

Если функция $f(x)$ четная (нечетная) и дифференцируема на $[-a;\ a]$, то $f'(x)$ нечетная (четная) функция.

12. Экстремумы функции

Функция $f(x)$ достигает в точке x_0 максимума (минимума), если существует окрестность этой точки, на которой выполняется неравенство

$$f(x_0) > f(x) \quad \left(f(x_0) < f(x)\right).$$

Максимум или минимум называется *экстремумом*. Экстремум имеет локальный характер

Экстремум следует искать среди тех точек, в которых $f'(x)$ равна нулю, не существует или равна бесконечности. Эти точки называются *критическими первого рода*.

Не всякая критическая точка является точкой экстремума.

Если при переходе через точку x_0 производная функции $y = f(x)$ меняет знак с «плюса» на «минус», т.е. $f'(x) > 0$ слева от точки x_0 и $f'(x) < 0$ справа от точки x_0, то $x_0 -$ точка максимума функции $y = f(x)$.

Если при переходе через точку x_0 производная функции $y = f(x)$ меняет знак с «минуса» на «плюс», т.е. $f'(x) < 0$ слева от точки x_0 и $f'(x) > 0$ справа от точки x_0, то $x_0 -$ точка минимума функции $y = f(x)$.

Схема для решения задач на определения экстремума функций:

1. Установить область определения функции $y = f(x)$.

2. Найти производную функции $y = f(x)$.

3. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки в которых $f'(x) = 0$, и точки в которых $f'(x)$ не определена.

4. Определить знак производной на числовых интервалах, на которые критические точки разбили область определения функции.

Пусть x_0 – стационарная точка функции $f(x)$ (т.е. $f'(x_0)=0$) и $f(x)$ имеет вторую непрерывную производную в окрестности точки x_0. Тогда:

1) если $f''(x_0)<0$, то x_0 есть точка максимума;

2) если $f''(x_0)>0$, то x_0 есть точка минимума.

Пусть в критической точке x_0 функция $f(x)$ n раз дифференцируема $(n>1)$, причем

$$f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0, \text{ но } f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

Тогда если $n-$ четное, то имеет место экстремум, а именно при $f^{(n)}(x_0)<0$ – максимум, при $f^{(n)}(x_0)>0$ – минимум. Если же n нечетное, то экстремума нет.

13. Наибольшее и наименьшее значения функции

Пусть требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ в интервале $(a;\ b)$. Если в данном интервале имеется единственный экстремум, то соответствующее значение функции будет либо наибольшим, либо наименьшим, смотря по тому, будет ли этот экстремум максимумом или минимумом.

Пусть требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$, т.е. $\max\limits_{x\in[a;\ b]} f(x)$ и $\min\limits_{x\in[a;\ b]} f(x)$. Для этого нужно определить $x_1, x_2, \ldots, x_n -$ критические точки, принадлежащие интервалу $(a;\ b)$. Тогда:

$$\max_{x\in[a;\ b]} f(x)=\max\left\{f(a),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,f(x_m),\ f(b)\right\}$$

$$\min_{x\in[a;\ b]} f(x)=\min\left\{f(a),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,f(x_m),\ f(b)\right\}.$$

14. Выпуклость, вогнутость и точки перегиба функции

График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым* в интервале $(a; b)$, если он расположен ниже любой своей касательной на этом интервале.

График функции $y = f(x)$ называется *вогнутым* в интервале $(a; b)$, если он расположен выше любой своей касательной на этом интервале.

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в $(a; b)$. Если во всех точках интервала $(a; b)$ выполняется условие $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый, если же $f''(x) > 0$ – вогнутый.

Точка графика непрерывной функции, отделяющая его выпуклую часть от вогнутой части, называется *точкой перегиба*.

Точки перегиба следует искать среди тех точек, в которых $f''(x)$ равна нулю, не существует или равна бесконечности. Эти точки называются *критическими второго рода*.

Для определения точек перегиба, определяют критические точки второго рода $x_1, x_2, ..., x_n$. С помощью найденных точек область определения функции разделяют на элементарные области. Если при переходе через критическую точку x_i вторая производная меняет знак, то x_i – точка перегиба, в противном случае – нет.

15. Асимптоты графика функции

График функции может иметь двух типов асимптот: вертикальные и наклонные (частный случай – горизонтальные).

Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* графика непрерывной функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x), \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x).$$

равен ∞.

Прямая $Y = kx + b$ является *наклонной асимптотой* непрерывной кривой $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если $\lim\limits_{x\to\infty}\left(Y - f(x)\right) = 0.$

Угловой коэффициент k и начальная ордината b прямой $Y = kx + b$ определяется следующим алгоритмом:

1) нужно вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = k;$ если $k -$ конечное число, то необходимо вычислить начальную ординату $b;$ в противном случае, т.е. когда k есть бесконечность или не существует, наклонная асимптота не существует;

2) если $k -$ конечное число, то b вычисляется с помощью формулы $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right];$ если $b -$ конечное число, то наклонная асимптота существует и ее уравнением является $Y = kx + b;$ если $k = 0,$ то $Y = b -$ горизонтальная асимптота; когда b есть бесконечность или не существует, наклонная асимптота не существует.

Из изложенных выше следует, сто для нахождения асимптот достаточно найти два указанных предела. Причем, если хотя бы один из пределов не существует или обращается в бесконечность, то кривая асимптот не имеет.

Наличие горизонтальной асимптоты означает, что существуют пределы. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b.$

Пределы для отыскания k и b могут быть различны при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ и, следовательно, график функции может иметь две различные асимптоты при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty.$

16. Общая схема исследования функции и построение графиков

Чтобы исследовать функцию $y = f(x)$ и построить ее график необходимо выполнить следующие действия:

1. Найти область определения функции, т.е. множество всех точек для которых существует значение функции.

2. Найти (если они существуют) точки пересечения графика с координатными осями. Для этого нужно в уравнение $y = f(x)$ подставить аргумент $x = 0$, а также решить уравнение $f(x) = 0$ для отыскания точек пересечения с осью Ox.

3. Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность. В некоторых случаях это можно сделать визуально по самому виду функции, если нет, то провести проверку:

а) $f(-x) = f(x) -$ функция четная;

б) $f(-x) = -f(x) -$ функция нечетная;

в) $f(x+T) = f(x) -$ функция периодическая, $T -$ период функции.

Таким образом, если имеем четную функцию $y = f(x)$, то достаточно построить ее для положительных значений x**,** после чего отразить ее симметрично относительно оси ординат на другую часть. В случае нечетной функции график будет симметричен относительно начала координат.

4. Найти точки разрыва и исследовать их (такими точками являются края интервалов определения функции).

5. Найти интервалы монотонности, точки экстремумов и значения функции в этих точках.

6. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

7. Найти асимптоты кривой.

8. Построить график функции.

17. Формулы Тейлора и Маклорена

Формула Тейлора показывает поведение функции в окрестности некоторой точки. Формула Тейлора имеет широкое применение.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) -$ остаточный член формулы Тейлора.

Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Остаточный член формулы Тейлора в форме Коши:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)}{n!}(1-\theta)^n (x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

При $x_0 = 0$ формула Тейлора принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x),$$

где $r_n(x) -$ остаточный член формулы. Эта формула Маклорена.

Остаточный член формулы Маклорена в форме Лагранжа:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Остаточный член формулы Маклорена в форме Коши:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Разложение некоторых функций по формуле Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x);$$

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + r_n(x);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + r_n(x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_n(x),$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + r_n(x),$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_n(x),$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{4!}x^3 \ldots +$$
$$+ \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n + r_n(x);$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + r_n(x);$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)\ \ x^n + r_n(x);$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

Для приведенных выше формул можно найти ту или иную форму остаточного члена по известным формулам.

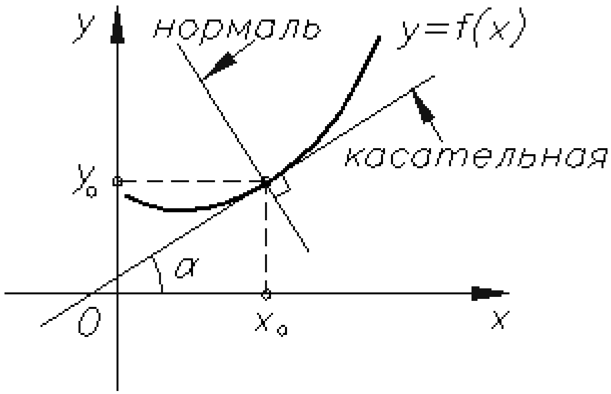
18. Геометрические и механические приложения производной

1. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $\left(x_0;\ f(x_0)\right)$ имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

2. Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $\left(x_0;\ f(x_0)\right)$ имеет вид:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$



3. Угол между двумя кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в точке их пересечения $M_0(x_0; y_0)$ определяется как угол между касательными к этим прямым в точке $M_0(x_0; y_0)$, тангенс которого находится по формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f_2(x_0) - f_1(x_0)}{1 + f_2(x_0)\cdot f_1(x_0)}.$$

4. Если точка движется по закону $s = s(t)$, где $s -$ путь, $t -$ время, то $s' = s'(t) = v(t)$ представляет скорость изменения пути в момент времени $t.$ Вторая производная пути по времени $s''(t) = \left[s'(t)\right]' = v'(t)$ есть скорость изменения скорости или ускорение точки в момент $t.$

III. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Определение и свойства неопределенных интегралов

Если имеет место равенство

$$\left[F(x) + C\right]' = f(x),$$

то

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $f(x) -$ подынтегральная функция, $f(x)dx$ $-$ подынтегральное выражение, $F(x) -$ первообразная от функции $f(x)$, $C -$ произвольная постоянная, $\int -$ символ неопределенного интеграла.

Свойства неопределенного интеграла:

1°. *Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции,* т.е.

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

2°. *Дифференциал от неопределенного интеграла равна подынтегральному выражению,* т.е.

$$d\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)dx.$$

3°. *Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная,* т.е.

$$\int dF(x)\,dx=F(x)+C.$$

4°. *Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла*, т.е.

$$\int af(x)\,dx=a\int f(x)dx, \text{ где } a\neq 0.$$

5°. *Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов*, т.е.

$$\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.$$

Полезно помнить следующие правила.

1. $$\int f(x)\,dx=F(x)+C\Rightarrow\begin{cases}\int f(x+b)\,dx=F(x+b)+C,\\ \int f(ax)\,dx=\dfrac{1}{a}F(ax)+C,\\ \int f(ax+b)\,dx=\dfrac{1}{a}F(ax+b)+C.\end{cases},$$

2. *Если производная знаменателя равна числителю, то первообразная равна натуральному логарифму знаменателя, т.е.*

$$\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx=\ln\left|\varphi(x)\right|+C.$$

2. Таблица неопределенных интегралов

Приводим таблицу интегралов, вытекающую из основных формул дифференциального исчисления. Предполагаем, что $u=\varphi(x)$.

I. $\int 0\,du=C.$ II. $\int du=u+C.$

III. $\int u^m du = \dfrac{u^{m+1}}{m+1} + C,\ \ m \neq -1.$

IV. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C.$

V. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C.$

VI. $\int e^u du = e^u + C.$

VII. $\int \sin u\, du = -\cos u + C.$

VIII. $\int \cos u\, du = \sin u + C.$

IX. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C.$

X. $\int \operatorname{ctg} u\ du = \ln|\sin u| + C.$

XI. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$

XII. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$

XIII. $\int \operatorname{sh} u\, du = \operatorname{ch} u + C.$

XIV. $\int \operatorname{ch} u\, du = \operatorname{sh} u + C.$

XV. $\int \dfrac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.$

XVI. $\int \dfrac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$

XVII. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right| + C.$

XVIII. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

XIX. $\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \begin{cases} \arcsin u + C. \\ -\arccos u + C. \end{cases}$

XX. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \begin{cases} \arcsin \dfrac{u}{a} + C. \\ -\arccos \dfrac{u}{a} + C. \end{cases}$

XXI. $\int \dfrac{du}{1+u^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} u + C. \\ -\operatorname{arcctg} u + C. \end{cases}$

XXII. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{u}{a} + C. \\ -\dfrac{1}{a} \operatorname{arcctg} \dfrac{u}{a} + C. \end{cases}$

XXII. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a}\right| + C.$

XIV. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$

Правильность формул проверяется непосредственным интегрированием правой части равенств.

Операция дифференцирования элементарных функций снова приводит к элементарным функциям. Однако операция интегрирования элементарных функций может привести к неэлементарным функциям, т.е. функциям, которые не выражаются через конечное число арифметических действий и суперпозиции элементарных функций.

Например, следующие интегралы не интегрируются в элементарных функциях:

1) $\int e^{-x^2}dx$ – интеграл Пуассона,

2) $\int \cos x^2 dx$ и $\int \cos x^2 dx$ – интегралы Френеля,

3) $\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм,

4) $\int \frac{\sin x}{x}dx$ – интегральный синус,

5) $\int \frac{\cos x}{x}dx$ – интегральный косинус

и др. Указанные интегралы существуют, но они не являются элементарными функциями.

3. Непосредственное интегрирование

Нахождение неопределенного интеграла с помощью основных свойств и табличных интегралов называется непосредственным интегрированием. При нахождении интеграла стараются подынтегральное выражение привести к тому или иному табличному интегралу.

При приведении неопределенного интеграла к табличному интегралу часто используется действие «введение под знак дифференциала», некоторые из которых следующие:

$$du = d(u+b),\ \ b-\text{число},\qquad du = \frac{1}{a}d\left(au\right),\ \ a \neq 0-\text{число},$$

$$udu = \frac{1}{2} d\left(u^2\right), \quad u^n du = \frac{1}{n+1} d\left(u^{n+1}\right),$$

$$\cos u du = d\left(\sin u\right), \quad \sin u du = -d\left(\cos u\right),$$

$$\frac{1}{u} du = d(\ln u), \quad \frac{1}{\cos^2 u} du = d\left(\operatorname{tg} u\right),$$

$$\frac{1}{\sin^2 u} du = -d\left(\operatorname{ctg} u\right) \text{ и т.п.}$$

Вообще, имеет место равенство

$$f'\left(u\right) du = d\left(f\left(u\right)\right),$$

которое широко используется при нахождении интегралов.

4. Интегрирование подстановкой (заменой переменной)

Суть данного метода заключается в том, что в рассмотрение вводится новая переменная интегрирования. После этого заданный в условии интеграл сводится либо к табличному интегралу, либо к нему сводящемуся.

Если в *неопределенном интеграле* $\int f\left(x\right) dx$ сделать подстановку $x = \varphi\left(t\right)$, где функция $\varphi\left(t\right) -$ функция с непрерывной первой производной, то тогда $dx = \varphi'\left(t\right) dt$ и согласно *свойству неопределенного интеграла* имеем, что:

$$\int f\left(x\right) dx = \int f\left(\varphi\left(t\right)\right) \varphi'\left(t\right) dt.$$

Эта формула называется **формулой замены переменной в неопределенном интеграле**. После нахождения интеграла по новой переменной t необходимо вернуться к первоначальной переменной x.

В некоторых случаях целесообразно делать подстановку $t = g\left(x\right)$, тогда

$$\int f\left(g\left(t\right)\right) g'\left(g\right) dg = \int f\left(t\right) dt.$$

1. Интегралы вида

$$\int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx, \quad \int \cos mx \cos nx dx$$

вычисляются методом разложения на основании следующих тригонометрических формул:

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\sin\left(m+n\right)x+\sin\left(m-n\right)x\right],$$

$$\sin mx\sin nxdx=\frac{1}{2}\left[\cos\left(m-n\right)x-\cos\left(m+n\right)x\right],$$

$$\cos mx\cos nxdx=\frac{1}{2}\left[\cos\left(m-n\right)x+\cos\left(m-n\right)x\right].$$

Тогда

$$\int\sin mx\cos nxdx=-\frac{\cos\left(m+n\right)x}{2\left(m+n\right)}-\frac{\cos\left(m-n\right)x}{2\left(m-n\right)}+C,$$

$$\int\sin mx\sin nxdx=\frac{\sin\left(m-n\right)x}{2\left(m-n\right)}-\frac{\sin\left(m+n\right)x}{2\left(m+n\right)}+C,$$

$$\int\cos mx\cos nxdx=\frac{\sin\left(m-n\right)x}{2\left(m-n\right)}+\frac{\sin\left(m+n\right)x}{2\left(m+n\right)}+C.$$

2. Интеграл вида $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ можно найти с помощью одной из подстановок $x=a\sin t$ или $x=a\cos t.$

3. Интеграл вида $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$ можно найти с помощью одной из подстановок $x=a\operatorname{tg}t$ или $x=a\operatorname{ctg}t.$

4. Интеграл вида $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ можно найти с помощью одной из подстановок $x=\dfrac{a}{\sin t}$ или $x=\dfrac{a}{\cos t}.$

5. Интегрирование по частям

Если функции $u=u\left(x\right)$ и $v=v\left(x\right)$ имеют непрерывные производные, то

$$d\left(uv\right)=udv+vdu.$$

Проинтегрировав левую и правую части последнего равенства, то

$$\int d\left(uv\right)=\int\left(udv+vdu\right)\Rightarrow uv=\int udv+\int vdu$$

Полученное равенство иожно переписать в виде

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям.* С ее помощью интеграл вида $\int u dv$ можно свести к нахождению интеграла вида **,** который может быть более просттым.

В некоторых случаях формулу интегрирования по частям нужно применять неоднократно. Формулу интегрирования по частям целесообразно применять к интегралам вида

$$\int P_n(x) e^{kx}\, dx,\ \int P_n(x) \sin kx\, dx,\ \int P_n(x) \cos kx\, dx.$$

Здесь $P_n(x) -$ многочлен степени $n,\ k-$ некоторая постоянная. В данном случае в качестве функции u берется многочлен, а в качестве dv $-$ оставшиеся множители.

Интегралы вида

$$\int P_n(x) \ln x\, dx,\ \int P_n(x) \arcsin x\, dx,\ \int P_n(x) \arccos x\, dx,$$

$$\int P_n(x) \operatorname{arctg} x\, dx,\ \int P_n(x) \operatorname{arcctg} x\, dx$$

находятся интегрированием по частям с разницей в том, что в начале в качестве dv берутся $P_n(x) dx$.

Интегралы вида

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx \quad \int e^{ax} \cos bx\, dx$$

находятся применением интегрирования частям дважды.

6. Интегралы, содержащие квадратный трехчлен

1. Интеграл вида $I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ находится преобразованием трехчлена $ax^2 + bx + c$ к виду

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + b/2a\right)^2 \pm m^2\right),$$

где $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm m^2$. Тогда

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+b/2a\right)^2\pm m^2}.$$

Заменой переменной $x+\dfrac{b}{2a}=t$ интеграл приводится к табличным интегралам:

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm m^2},$$

которые

$$1)\ \int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{t}{m}+C;$$

$$2)\ \int\frac{dt}{t^2-m^2}=\frac{1}{2m}\ln\left|\frac{t-m}{t+m}\right|+C.$$

2. Интеграл вида

$$I_2=\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$$

тождественное преобразование подынтегральной функции приводится к виду

$$I_2=\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\frac{M}{2a}\left(2ax+b\right)+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx.$$

Отсюда

$$I_2=\frac{M}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Второй интеграл есть интеграл I_1. Первый интеграл находится заменой переменной

$$ax^2+bx+c=t,\ \left(2ax+b\right)dx=dt.$$

Окончательно:

$$I_2 = \frac{M}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)I_1.$$

3. Интеграл вида

$$I_3 = \int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

с помощью преобразований, рассмотренных в п. 1, сводится, в зависимости от знака a, к табличным интегралам вида

$$I_3 = \int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm m^2}} \text{ при } a>0: \quad \left[\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm m^2}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2\pm m^2}\right|+C.\right]$$

или

$$I_3 = \int\frac{dt}{\sqrt{m^2-t^2}} \quad \text{при} \quad a<0: \quad \left[\int\frac{dt}{\sqrt{m^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{m}+C.\right]$$

4. Интеграл вида

$$I_4 = \int\frac{(Mx+N)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

находится с помощью следующих преобразований, аналогичных тем, которые были рассмотрены в п. II:

$$I_4 = \int\frac{(Mx+N)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int\frac{\frac{M}{2a}(2ax+b)+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$

$$= \frac{M}{2a}\int\frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Первый из полученных интегралов находится заменой переменной $ax^2+bx+c=t,\ (2ax+b)\,dx = dt$:

$$\int\frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int\frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+C = 2\sqrt{ax^2+bx+c}+C.$$

Окончательно:

$$I_4 = 2\sqrt{ax^2+bx+c}+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)I_3.$$

IV. Интеграл вида $I_5 = \int \frac{dx}{(Mx+N)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ приводится к табличному интегралу подстановкой $\frac{1}{Mx+N} = t.$

7. Интегрирование простейших рациональных дробей

Интегрирование всякой рациональной дроби сводится к интегрированию следующих четырех типов так называемых простейших дробей:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}; \qquad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^n} \quad (n = 2, 3, \ldots);$$

$$\text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; \quad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

где A, a, p, q, M и $N -$ действительные числа, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т. е. $\frac{p^2}{4} - q < 0.$

8. Интегрирование иррациональных функций

Интеграл не всякой иррациональной функции выражается через элементарные функции. Имеется ряд иррациональных функций, интегралы которых выражаются через элементарные функции.

1.Интеграл вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{x^m}, \sqrt[q]{x^p}, \ldots, \sqrt[s]{x^r}\right) dx,$$

где $R -$ рациональная функция своих аргументов, сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

$$x = t^k, \text{ где } t = \text{НОК}(n, q, \ldots, s).$$

2. Интеграл вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}, \sqrt[q]{(ax+b)^p}, \ldots, \sqrt[s]{(ax+b)^r}\right) dx$$

сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $ax+b = t^k$, где $t = \text{НОК}(n, q, \ldots, s)$.

3. Интеграл вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}, \sqrt[q]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^p}, \ldots, \sqrt[s]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r}\right) dx,$$

сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k, \quad \text{где} \quad t = \text{НОК}(n, q, \ldots, s) \quad \text{и} \quad ad \neq bc.$$

4. Интеграл вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановок Эйлера:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x \pm t,$ если $a > 0;$

2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c},$ если $c > 0;$

3) $$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = \begin{cases} \pm t(x-\alpha) \\ \text{или} \\ \pm t(x-\beta), \end{cases}$$

где α и β – действительные различные корни трехчлена ax^2+bx+c .

4. Интеграл вида $\int x^m \left(a+bx^n\right)^p dx,$ где m, n, p – рациональные числа, a, b – действительные числа.

Подынтегральное выражение называется *дифференциальным биномом*. Интеграл от него сводится к интегралам от рациональных функций в трех случаях.

1) Если p – целое, то выполняется подстановка $\boxed{x = t^s,}$ где s – общий знаменатель дробей m и n .

2) Если $\frac{m+1}{n}$ – целое, то подстановка $\boxed{a+bx^n = t^s,}$ где s – знаменатель числа p .

3) Если $\frac{m+1}{n} + p$ – целое, подстановка $\boxed{ax^{-n}+b = t^s,}$ где s – знаменатель числа p .

Если ни одно из трех чисел $p,\ \frac{m+1}{n},\ \frac{m+1}{n}+p$ не является целым числом, то по интегралы данного вида не могут быть выражены конечной комбинацией элементарных функций.

9. Интегрирование тригонометрических функций

1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где $R-$ рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, приводятся к интегрлам от рациональной функции с помощью подстановки

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

При этом

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

В следующих случаях можно применить более простые подстановки.

1) Если $R(-\sin x, \cos x) = R(\sin x, \cos x)$, т.е. функция четная относительно $\sin x$, то целесообразно применить подстановку $\operatorname{tg} x = t.$ При этом

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

2) Если $R(\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, т.е. функция четная относительно $\cos x$, то целесообразно применить подстановку $\operatorname{ctg} x = t.$ При этом

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = -\frac{dt}{1+t^2}.$$

3) Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, т.е. функция четная относительно $\sin t$ и $\cos x$, то целесообразно применить подстановку $\operatorname{tg} x = t$ или $\operatorname{ctg} x = t.$

2. Интегралы вида $I_{m,n}=\int \sin^m x \cos^n x\, dx$:

1) если $m=2k+1,\ k=0,1,2,\ldots$, то применяется подстановка $\cos x=t.$

2) если $n=2l+1,\ l=0,1,2,\ldots,$ то применяется подстановка $\sin x=t.$

3) если $m=2k+1,\ k=0,1,2,\ldots$ и $n=2l+1,\ l=0,1,2,\ldots$, то следует применить подстановку $\cos x=t$ или $\sin x=t$ соответственно;

4) если $m=2k,\ n=2l,$ т.е. m и n $-$ четные числа, находятся с помощью формул понижения степени

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

5) если имеет место равенство $m+n=0,$ то применяется подстановка

$$\operatorname{tg} x=t,\quad \text{если}\quad m>0$$

если $m>0$ или

$$\operatorname{ctg} x=t,\quad \text{если}\quad n>0.$$

3. Интеграл вида $\int \operatorname{tg}^m x\, dx$ находится с помощью подстановки $\operatorname{tg} x=t.$

4. Интеграл вида $\int \operatorname{ctg}^m x\, dx$ находится с помощью подстановки $\operatorname{ctg} x=t.$

5. Интеграл вида $\int \operatorname{tg}^m x\cdot \sec^{2k} x\, dx,$ где $n=2k-$четное натуральное число, находится подстановкой $\operatorname{tg} x=t.$

6. Интеграл вида $\int \operatorname{ctg}^m x\cdot \operatorname{cosec}^n x\, dx,$ где $n=2k-$четное натуральное число, находится подстановкой $\operatorname{ctg} x=t.$

7. Интегралы от некоторых иррациональных функций находятся с помощью тригонометрических подстановок:

1) $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx-$с помощью подстановки $x=a\sin t$ или $x=a\cos t;$

2) $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx -$ с помощью подстановки $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ или $x = a\,\mathrm{ctg}\,t$;

3) $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx -$ с помощью подстановки $x = \dfrac{a}{\sin t}$ или $x = \dfrac{a}{\cos t}$.

Подписано в печать 20.09.2016г.
Заказ 59. Тираж 100 экз.
Отпечатано в издательско-типографическом секторе Филиала МГУ
имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе
г. Душанбе, ул. Бохтар, 35/1