ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В ГОРОДЕ ДУШАНБЕ

СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

ПО КУРСУ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

ДУШАНБЕ – 2016

УДК – 51/519
ББК 22/22.143

Ш. Нуриддинов. Сборник индивидуальных заданий по курсу «Основы математического моделирования социально-экономических процессов». Душанбе - 2016.

Приводятся варианты индивидуальных заданий по курсу «Основы математического моделирования социально-экономических процессов», а также образцы решений отдельных типов задач. Большинство из приведенных заданий могут быть использованы и при работе со студентами и других экономико-управленческих направлений.

Целью создания пособия является совершенствование самостоятельной работы студентов.

Задания студентам выдаются в начале семестра, студенты их выполняют по разделам и представляют преподавателю, ведущему практические занятия.

Автор заранее приносит искренюю благодарность всем тем уважаемым читателям, которые выскажут свои соображения, способствующие совершенствованию содержания данного сборника, а следовательно, повышению качества специалистов.

Рецензенты: к.ф.-м.н., доцент Мирзоев С.Х.
к.э.н., доцент Азимов П.Х.

Рекомендовано к изданию Научно-методическим Советом Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе (протокол № 7 от 8 июля 2016 г.).

Задание 1. Дана система линейных равенств. Выполнить один шаг обыкновенных и модифицированных жордановых исключений с разрешающими элементами $a_{rs} \neq 0$ и $a_{kl} \neq 0$ соответственно и найти новые системы линейных равенств.

1. $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4, \\ y_2 = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4, \\ y_3 = 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4, \end{cases}$ a_{23} *и* a_{32}.

2. $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 3x_4, \\ y_2 = x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4, \\ y_3 = x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4, \end{cases}$ a_{24} *и* a_{32}.

3. $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4, \\ y_2 = 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4, \\ y_3 = x_1 - 6x_2 + x_3 + 4x_4, \end{cases}$ a_{21} *и* a_{34}.

4. $\begin{cases} y_1 = 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4, \\ y_2 = x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4, \\ y_3 = x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4, \end{cases}$ a_{22} *и* a_{14}.

5. $\begin{cases} y_1 = 3x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4, \\ y_2 = 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4, \\ y_3 = x_1 + x_2 - 4x_3 + 6x_4, \end{cases}$ a_{22} *и* a_{34}.

6. $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4, \\ y_2 = 4x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4, \\ y_3 = x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4, \end{cases}$ a_{23} *и* a_{32}.

7. $\begin{cases} y_1 = 3x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4, \\ y_2 = x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4, \\ y_3 = 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4, \end{cases}$ a_{14} *и* a_{33}.

8. $\begin{cases} y_1 = -x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4, \\ y_2 = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4, \quad a_{21} \quad и \quad a_{32}. \\ y_3 = x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4, \end{cases}$

9. $\begin{cases} y_1 = 3x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4, \\ y_2 = x_1 + 5x_2 + x_3 - 6x_4, \quad a_{22} \quad и \quad a_{33}. \\ y_3 = x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4, \end{cases}$

10. $\begin{cases} y_1 = 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4, \\ y_2 = x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4, \quad a_{22} \quad и \quad a_{33}. \\ y_3 = x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4, \end{cases}$

11. $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4, \\ y_2 = x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4, \quad a_{11} \quad и \quad a_{34}. \\ y_3 = 6x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4, \end{cases}$

12. $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4, \\ y_2 = x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4, \quad a_{33} \quad и \quad a_{34}. \\ y_3 = 5x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4, \end{cases}$

13. $\begin{cases} y_1 = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4, \\ y_2 = x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4, \quad a_{13} \quad и \quad a_{33}. \\ y_3 = 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4, \end{cases}$

14. $\begin{cases} y_1 = -3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4, \\ y_2 = x_1 - 4x_2 - 3x_3 + x_4, \quad a_{24} \quad и \quad a_{23}. \\ y_3 = x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4, \end{cases}$

15. $\begin{cases} y_1 = 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4, \\ y_2 = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4, \quad a_{33} \quad и \quad a_{22}. \\ y_3 = 7x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4, \end{cases}$

16. $\begin{cases} y_1 = 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4, \\ y_2 = x_1 + 6x_2 + x_3 + 8x_4, \\ y_3 = 7x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4, \end{cases}$ a_{14} *и* a_{33}.

17. $\begin{cases} y_1 = x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4, \\ y_2 = 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4, \\ y_3 = x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4, \end{cases}$ a_{14} *и* a_{32}.

18. $\begin{cases} y_1 = x_1 + 5x_2 + x_3 + 7x_4, \\ y_2 = 3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4, \\ y_3 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4, \end{cases}$ a_{33} *и* a_{23}.

19. $\begin{cases} y_1 = 4x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4, \\ y_2 = x_1 - 5x_2 + x_3 - 3x_4, \\ y_3 = x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4, \end{cases}$ a_{13} *и* a_{24}.

20. $\begin{cases} y_1 = 5x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4, \\ y_2 = x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4, \\ y_3 = -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4, \end{cases}$ a_{24} *и* a_{31}.

21. $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4, \\ y_2 = x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4, \\ y_3 = x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4, \end{cases}$ a_{24} *и* a_{32}.

22. $\begin{cases} y_1 = -5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4, \\ y_2 = 4x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4, \\ y_3 = x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4, \end{cases}$ a_{21} *и* a_{32}.

23. $\begin{cases} y_1 = -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4, \\ y_2 = x_1 + 5x_2 + x_3 - 6x_4, \\ y_3 = x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4, \end{cases}$ a_{22} *и* a_{33}.

24. $\begin{cases} y_1 = 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4, \\ y_2 = x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4, \\ y_3 = 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4, \end{cases}$ a_{11} *и* a_{31}.

25. $\begin{cases} y_1 = 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4, \\ y_2 = x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4, \\ y_3 = -2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4, \end{cases}$ a_{24} *и* a_{33}.

26. $\begin{cases} y_1 = x_1 - 5x_2 - x_3 + 3x_4, \\ y_2 = -2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4, \\ y_3 = x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4, \end{cases}$ a_{14} *и* a_{34}.

27. $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4, \\ y_2 = -x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4, \\ y_3 = 4x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4, \end{cases}$ a_{24} *и* a_{33}.

28. $\begin{cases} y_1 = x_1 + 5x_2 - x_3 + 4x_4, \\ y_2 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4, \\ y_3 = -x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4, \end{cases}$ a_{23} *и* a_{32}.

29. $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4, \\ y_2 = x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4, \\ y_3 = -5x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4, \end{cases}$ a_{23} *и* a_{32}.

30. $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4, \\ y_2 = 3x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4, \\ y_3 = x_1 - 2x_2 + x_3 + 6x_4, \end{cases}$ a_{21} *и* a_{13}.

Задание 2. Используя жордановы исключения, найти ранг данной матрицы.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 6 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & -1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -2 & 8 & -5 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -4 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.**12.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 0 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & -5 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & -1 \\ -4 & 3 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -8 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & -3 & 1 \\ 7 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

26. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & -9 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

30. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Задание 3. С помощью обыкновенных жордановых исключений найти матрицу, обратную данной.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. **8.** $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. **9.** $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **11.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. **12.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **14.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. **15.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 5 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **17.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. **18.** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. **20.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. **21.** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -4 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. **23.** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. **24.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. **26.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. **27.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. **29.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. **30.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Задание 4. Систему уравнений решить с помощью обыкновенных или модифицированных жордановых исключений. Проверить правильность полученного решения.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 6. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 6, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ -6x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 + 8x_2 + x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 9, \\ 5x_1 + 8x_2 + x_3 + 4x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 9. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 7. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 7, \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 9, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 7, \\ 4x_1 + 22x_2 + x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 9, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 9, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 8x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 9. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 4, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 9, \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 6. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3+2x_4=8, \\ 4x_1+3x_2+2x_3-x_4=8, \\ 5x_1-x_2+x_3+2x_4=2, \\ -2x_1+4x_2+3x_3-x_4=3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1+4x_2+x_3+2x_4=4, \\ x_1-2x_2+3x_3+x_4=9, \\ 4x_1+2x_2+x_3+3x_4=5, \\ x_1+3x_2+x_3+2x_4=3. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+x_4=7, \\ 3x_1+5x_2-x_3+2x_4=0, \\ 4x_1+2x_2-x_3+x_4=3, \\ x_1+6x_2+3x_3+2x_4=9. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3+2x_4=1, \\ 5x_1+x_2+2x_3+3x_4=8, \\ 2x_1+4x_2+x_3-x_4=3, \\ 5x_1+2x_2+4x_3+3x_4=2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+3x_4=0, \\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=5, \\ 3x_1+2x_2+x_3+5x_4=8, \\ 2x_1+x_2+x_3+4x_4=8. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+2x_4=8, \\ 2x_1+5x_2-3x_3+x_4=6, \\ 3x_1+2x_2+x_3+3x_4=1, \\ x_1+2x_2-3x_3+4x_4=7. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3-2x_4=1, \\ x_1+3x_2+2x_3-x_4=2, \\ 3x_1+x_2+x_3-2x_4=5, \\ 2x_1+3x_2+5x_3-x_4=2. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=5, \\ 2x_1+4x_2+3x_3+x_4=7, \\ x_1-2x_2-3x_3+2x_4=3, \\ 3x_1+5x_2-x_3+2x_4=2. \end{cases}$

Задание 5. Используя модифицированные жордановы исключения найти неотрицательные решения системы уравнений и одну из базисных решений. Проверить правильность полученного решения.

1. $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+8x_4-5x_5=12, \\ x_1+2x_2-x_3+6x_4-2x_5=15, \\ -x_1+x_2+x_3-3x_4+5x_5=3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+7x_4-2x_5=17, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=1, \\ x_1-x_2+3x_3-4x_4+7x_5=20. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 9x_4 - 5x_5 = 16, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = -9. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 6, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 = 2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 7x_5 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 - 8x_5 = 4. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 9x_4 - 5x_5 = 15, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 12, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 18. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 15. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 8x_4 - 6x_5 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 14, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 9x_4 - 4x_5 = 19. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 15, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 23, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 5. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 14, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 16, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 8. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 9, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 23. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 20, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 16. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 9x_4 - 4x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 6. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 - 4x_5 = -5, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 8x_5 = 25, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 9x_4 - 3x_5 = 28. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 16, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 - 4x_5 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 19. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 8x_4 - 7x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 9, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 23. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 12, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 - 9x_5 = 2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 6x_4 - 6x_5 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 7x_5 = 13. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 + 7x_4 - 4x_5 = 4, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 - 2x_5 = 16. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 13, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 - 6x_5 = 10, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 4x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 23, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 10x_4 - 3x_5 = 18, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 8x_4 + 3x_5 = 33. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 - 4x_5 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 19. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 8x_4 - 4x_5 = 13, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 5x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 7. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 12, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 8, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 9x_4 + 4x_5 = 2. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 6x_4 - x_5 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 8, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 20. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 16, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 20, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 6. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 7, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 11, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 - 2x_5 = 11. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 14, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 6x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 8. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 8x_4 + 4x_5 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 8x_4 - 4x_5 = 16, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 14. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 19, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 11. \end{cases}$

Задание 6. Даны векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \vec{b}$. Показать, что векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{b}$ в этом базисе.

1. $\overrightarrow{a_1} = (1; -4; 2)$, $\overrightarrow{a_2} = (-2; 1; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; 0; -4)$; $\vec{b} = (-2; -1; 3)$.

2. $\overrightarrow{a_1} = (-3; 4; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; -1; 3)$, $\overrightarrow{a_3} = (-4; 2; 5)$; $\vec{b} = (3; 8; 10)$.

3. $\overrightarrow{a_1} = (2; -1; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; 3; 4)$, $\overrightarrow{a_3} = (1; 2; 3)$; $\vec{b} = (4; 1; 7)$.

4. $\overrightarrow{a_1} = (2; 3; -4)$, $\overrightarrow{a_2} = (4; -2; 1)$, $\overrightarrow{a_3} = (-3; 1; 3)$; $\vec{b} = (-1; 7; 2)$.

5. $\overrightarrow{a_1} = (3; 1; 3)$, $\overrightarrow{a_2} = (-1; 5; 4)$, $\overrightarrow{a_3} = (-2; 3; 1)$; $\vec{b} = (7; 2; 8)$.

6. $\overrightarrow{a_1} = (3; -2; -1)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; 2; 0)$, $\overrightarrow{a_3} = (4; 3; 1)$; $\vec{b} = (9; 3; 2)$.

7. $\overrightarrow{a_1} = (1; -3; 2)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 1; -4)$, $\overrightarrow{a_3} = (-3; 1; 2)$; $\vec{b} = (-1; 1; -2)$.

8. $\overrightarrow{a_1} = (3; -2; 1)$, $\overrightarrow{a_2} = (-1; 4; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (2; 1; 5)$; $\vec{b} = (5; 1; 2)$.

9. $\overrightarrow{a_1} = (2; 3; -1)$, $\overrightarrow{a_2} = (3; -1; 2)$, $\overrightarrow{a_3} = (-1; 2; -1)$; $\vec{b} = (9; 4; 3)$.

10. $\overrightarrow{a_1}=(2;-1;0),\ \overrightarrow{a_2}=(3;2;1),\ \overrightarrow{a_3}=(1;4;3);\ \ \vec{b}=(1;-2;3).$

11. $\overrightarrow{a_1}=(3;2;-1),\ \overrightarrow{a_2}=(1;-2;4),\ \overrightarrow{a_3}=(2;-1;3);\ \ \vec{b}=(9;2;3).$

12. $\vec{a}_1=(2;-1;-3),\ \overrightarrow{a_2}=(1;3;4),\ \overrightarrow{a_3}=(2;1;-4);\ \ \vec{b}=(3;0;2).$

13. $\vec{a}_1=(3;1;4),\ \overrightarrow{a_2}=(0;2;-1),\ \overrightarrow{a_3}=(1;-3;2);\ \ \vec{b}=(5;5;3).$

14. $\overrightarrow{a_1}=(1;-3;2),\ \overrightarrow{a_2}=(2;1;3),\ \overrightarrow{a_3}=(2;3;1);\ \ \vec{b}=(0;-8;6).$

15. $\overrightarrow{a_1}=(1;-3;2),\ \overrightarrow{a_2}=(2;\ 1;4),\ \overrightarrow{a_3}=(3;4;1);\ \ \vec{b}=(6;7;-3).$

16. $\overrightarrow{a_1}=(1;-2;5),\ \overrightarrow{a_2}=(2;1;-3),\ \overrightarrow{a_3}=(-4;3;2);\ \ \vec{b}=(4;2;3).$

17. $\overrightarrow{a_1}=(3;2;1),\ \overrightarrow{a_2}=(1;4;5),\ \overrightarrow{a_3}=(2;1;3);\ \ \vec{b}=(11;-4;-1).$

18. $\overrightarrow{a_1}=(2;1;7),\ \overrightarrow{a_2}=(3;1;4),\ \overrightarrow{a_3}=(1;4;3);\ \ \vec{b}=(1;5;16).$

19. $\overrightarrow{a_1}=(1;5;3),\ \overrightarrow{a_2}=(2;1;4),\ \overrightarrow{a_3}=(3;2;5);\ \ \vec{b}=(4;19;14).$

20. $\overrightarrow{a_1}=(8;2;7),\ \overrightarrow{a_2}=(1;-3;5),\ \overrightarrow{a_3}=(4;1;2);\ \ \vec{b}=(1;-3;11).$

21. $\overrightarrow{a_1}=(3;4;5),\ \overrightarrow{a_2}=(1;2;-3),\ \overrightarrow{a_3}=(3;1;2);\ \ \vec{b}=(-4;5;-7).$

22. $\overrightarrow{a_1}=(-2;1;4),\ \overrightarrow{a_2}=(3;-5;2),\ \overrightarrow{a_3}=(4;2;-3);\ \ \vec{b}=(4;1;4).$

23. $\overrightarrow{a_1}=(1;-4;2),\ \overrightarrow{a_2}=(2;1;2),\ \overrightarrow{a_3}=(1;3;2);\ \ \vec{b}=(-2;0;3).$

24. $\overrightarrow{a_1}=(4;1;2),\ \overrightarrow{a_2}=(6;8;3),\ \overrightarrow{a_3}=(-1;4;1);\ \ \vec{b}=(10;5;1).$

25. $\overrightarrow{a_1}=(3;-2;1),\ \overrightarrow{a_2}=(-6;5;2),\ \overrightarrow{a_3}=(-4;3;2);\ \ \vec{b}=(-1;7;3).$

26. $\overrightarrow{a_1}=(2;4;-6),\ \overrightarrow{a_2}=(1;3;5),\ \overrightarrow{a_3}=(0;-3;7);\ \ \vec{b}=(3;2;52).$

27. $\overrightarrow{a_1}=(4;3;-1),\ \overrightarrow{a_2}=(4;0;4),\ \overrightarrow{a_3}=(2;1;2);\ \ \vec{b}=(0;12;-6).$

28. $\overrightarrow{a_1}=(1;-1;-4),\ \overrightarrow{a_2}=(2;3;5),\ \overrightarrow{a_3}=(1;3;2);\ \ \vec{b}=(4;2;4).$

29. $\overrightarrow{a_1}=(-2;1;7),\ \overrightarrow{a_2}=(3;-3;8),\ \overrightarrow{a_3}=(5;4;-1);\ \ \vec{b}=(18;25;1).$

30. $\overrightarrow{a_1}=(2;1;0),\ \overrightarrow{a_2}=(4;3;-3),\ \overrightarrow{a_3}==(1;2;1);\ \ \vec{b}=(3;5;6).$

Задание 7. Решить задачи с использованием графического метода.

1. $z = 5x_1 + x_2 \to \min(\max)$, $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 4x_1 + 7x_2 \ge 14, \\ 5x_1 - 4x_2 \le 25, \\ x_1 + 3x_2 \le 24, \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \forall j.$

2. $z = 4x_1 + 3x_2 \to \min(\max)$, $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 51, \\ -x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 6x_1 + 5x_2 \ge 15, \\ 2x_1 - x_2 \le 8, \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \forall j.$

3. $z = 7x_1 + 4x_2 \to \min(\max)$, $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \le 20, \\ x_1 + 2x_2 \le 17, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 5x_1 + 6x_2 \ge 15, \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \forall j.$

4. $z = -5x_1 + 4x_2 \to \min(\max)$, $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ 6x_1 - 5x_2 \le 18, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 48, \\ -3x_1 + 4x_2 \le 24, \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \forall j.$

5. $z = 5x_1 + x_2 \to \min(\max)$, $\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 \ge 20, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 34, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \forall j.$

6. $z = 5x_1 + 2x_2 \to \min(\max)$, $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 6, \\ 2x_1 - x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 22, \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \forall j.$

7. $z = -3x_1 + x_2 \to \min(\max)$, $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 15, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 4x_1 + 7x_2 \ge 14, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 16, \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \forall j.$

8. $z = -x_1 + 5x_2 \to \min(\max)$, $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \le 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 27, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 10, \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \forall j.$

9. $z = -5x_1 + 4x_2 \to \min(\max)$, $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ 6x_1 - 5x_2 \le 18, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 48, \\ -3x_1 + 4x_2 \le 24, \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \forall j.$

10. $z = -x_1 + 3x_2 \to \min(\max)$, $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 6, \\ 6x_1 + 5x_2 \ge 15, \\ 5x_1 - 4x_2 \le 20, \\ x_1 + 2x_2 \le 18, \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \forall j.$

11. $z = -5x_1 + 4x_2 \to \min(\max)$, $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 6, \\ 6x_1 + 5x_2 \ge 15, \\ 5x_1 - 4x_2 \le 20, \\ x_1 + 2x_2 \le 18, \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \forall j.$

12. $z = -x_1 + 3x_2 \to \min(\max)$, $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 6, \\ 6x_1 + 5x_2 \ge 15, \\ 5x_1 - 4x_2 \le 20, \\ x_1 + 2x_2 \le 18, \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \forall j.$

13. $z = 5x_1 + 2x_2 \to \min(\max), \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 22, \\ -x_1 + 2x_2 \le 14, \\ 8x_1 + 9x_2 \ge 36, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 18, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$

14. $z = 8x_1 + 5x_2 \to \min(\max), \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 36, \\ -x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 5x_1 + 8x_2 \ge 20, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$

15. $z = 7x_1 + 3x_2 \to \min(\max), \quad \begin{cases} 7x_1 + 6x_2 \ge 21, \\ x_1 - x_2 \le 6, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 42, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$

16. $z = 7x_1 + 4x_2 \to \min(\max), \quad \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 24, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 43, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$

17. $z = 3x_1 + 5x_2 \to \min(\max), \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 34, \\ -4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 12, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$

18. $z = x_1 + 4x_2 \to \min(\max), \quad \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \le 20, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 44, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$

19. $z = 5x_1 - x_2 \to \min(\max)$, $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 0, \\ -5x_1 + 9x_2 \le 45, \\ x_1 - 2x_2 \le 4, \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \forall j.$

20. $z = 4x_1 + 2x_2 \to \min(\max)$, $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \forall j.$

21. $z = 2x_1 + 4x_2 \to \min(\max)$, $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 - 5x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \le 4, \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \forall j.$

22. $z = 15x_1 + 10x_2 \to \min(\max)$, $\begin{cases} 6x_1 - x_2 \ge 3, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 24, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \forall j.$

23. $z = 2x_1 + 5x_2 \to \min(\max)$, $\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12, \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \forall j.$

24. $z = 3x_1 + x_2 \to \min(\max)$, $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 \le 7, \\ 3x_1 + x_2 \le 18, \\ -3x_1 + 4x_2 \le 12, \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \forall j.$

25. $z = 5x_1 + 3x_2 \to \min(\max),\quad \begin{cases} x_1 + x_2 \ge 0, \\ x_1 + 3x_2 \le 3, \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 20, \\ -x_1 + x_2 \ge 0, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$

26. $z = x_1 + 3x_2 \to \min(\max),\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge -4, \\ x_1 + x_2 \ge 0, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$

27. $z = 7x_1 + 3x_2 \to \min(\max),\quad \begin{cases} -x_1 + 5x_2 \ge 0, \\ x_1 \qquad x_2 \ge 5, \\ x_1 \ge 3, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 0, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$

28. $z = 3x_1 + 2x_2 \to \min(\max),\quad \begin{cases} x_1 - x_2 \le 2, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 \le 3, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$

29. $z = x_1 + 2x_2 \to \min(\max),\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 - x_2 \le 0, \\ x_1 + x_2 \ge 0, \\ -3x_1 + x_2 \le 12, \\ x_2 \le 6, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$

30. $z = 4x_1 - x_2 \to \min(\max),\quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ 3x_1 - 8x_2 \le 24, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge -12, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$

Задание 8. Решить задачи с использованием графического метода.

1. $z = x_1 + 2x_2 - x_3 + 9x_4 + 7x_5 \to \min(\max),$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 8x_4 - 2x_5 = 27, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 6x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 35, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

2. $z = 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 \to \min(\max),$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 7x_5 = 14, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 8, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

3. $z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 9x_5 \to \min\left(\max\right),$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 27, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 17, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

4. $z = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 + 6x_5 \to \min(\max),$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 9x_5 = 16, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 14, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

5. $z = 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 \to \min(\max),$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 10, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 7x_5 = 15, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 13, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

6. $z = -2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 10x_5 \to \min(\max),$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 24, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 - x_5 = 13, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 20, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

7. $z = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 7x_5 \to \min(\max)$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 6x_4 + 9x_5 = 14, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 8x_4 - 2x_5 = 23, \quad x_j \ge 0 \quad \forall j. \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 15, \end{cases}$$

8. $z = x_1 + 3x_2 + x_3 + 9x_4 + x_5 \to \min(\max)$,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 - x_5 = 7, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 9x_4 - 3x_5 = 26, \quad x_j \ge 0 \quad \forall j. \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 4, \end{cases}$$

9. $z = 3x_1 + x_2 - x_3 + 9x_4 - 3x_5 \to \min(\max)$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 5x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 9, \quad x_j \ge 0 \quad \forall j. \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 3, \end{cases}$$

10. $z = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 8x_5 \to \min(\max)$,

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 28, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 16, \quad x_j \ge 0 \quad \forall j. \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 18, \end{cases}$$

11. $z = x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 + 2x_5 \to \min(\max)$,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 6x_5 = 25, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 + 9x_5 = 13, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 6x_5 = 39. \end{cases}$$

12. $z = 2x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 7x_5 \to \min(\max)$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 16, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 6x_4 + 4x_5 = 7. \end{cases}$$

13. $z = x_1 - 3x_2 - x_3 + 7x_4 + 2x_5 \to \min(\max)$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 22, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 5x_5 = 19, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

14. $z = x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 3x_5 \to \min(\max)$,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 12, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 8x_4 - 4x_5 = 20, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 4, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

15. $z = -x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 - 2x_5 \to \min(\max)$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 8x_5 = 20, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 - 2x_5 = 22, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

16. $z = x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 \to \min(\max)$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 18, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 2, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

17. $z = x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 \to \min(\max)$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 17, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 17, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 1, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

18. $z = 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 5x_5 \to \min(\max)$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 19, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

19. $z=7x_1+10x_2+x_3+x_4+2x_5\to\min(\max)$,

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+3x_4+4x_5=48,\\ x_1-3x_2+x_3+15x_4+4x_5=24, \quad x_j\ge 0 \quad \forall j.\\ 3x_1+x_2-x_3+3x_4-8x_5=12,\end{cases}$$

20. $z=-3x_1+2x_2+x_3+x_4-2x_5\to\min(\max)$,

$$\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3-4x_4+12x_5=42,\\ x_1-x_2+x_3+10x_4-x_5=36, \quad x_j\ge 0 \quad \forall j.\\ 2x_1+x_2-x_3+x_4-5x_5=9,\end{cases}$$

21. $z=3x_1+x_2-x_3+5x_4+2x_5\to\min(\max)$,

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4+2x_5=13,\\ x_1-2x_2+x_3+5x_4-4x_5=1, \quad x_j\ge 0 \quad \forall j.\\ 3x_1+x_2-x_3+4x_4-2x_5=11,\end{cases}$$

22. $z=x_1+2x_2+x_3+7x_4+6x_5\to\min(\max)$,

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+3x_4+x_5=26,\\ x_1+x_2-x_3+5x_4-x_5=22, \quad x_j\ge 0 \quad \forall j.\\ x_1-x_2+x_3-x_4-5x_5=-6,\end{cases}$$

23. $z=2x_1+x_2-x_3+12x_4+4x_5\to\min(\max)$,

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+11x_4-x_5=26,\\ 3x_1+x_2+x_3+6x_4+3x_5=66, \quad x_j\ge 0 \quad \forall j.\\ -2x_1+x_2-x_3+2x_4+4x_5=10,\end{cases}$$

24. $z=x_1+3x_2+x_3+5x_4+6x_5\to\min(\max)$,

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3-6x_4+11x_5=13,\\ x_1+3x_2-x_3-4x_4+10x_5=45, \quad x_j\ge 0 \quad \forall j.\\ x_1+x_2-x_3-2x_4+8x_5=61,\end{cases}$$

25. $z = 5x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \min(\max),$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50, \\ -4x_1 + 9x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 10, \\ 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 38, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

26. $z = 4x_1 + 8x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \to \min(\max),$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 13, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 10, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 13, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

27. $z = 4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 \to \min(\max),$

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 = 12, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 14, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

28. $z = -2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 \to \min(\max),$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 28, \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 42, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 36, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

29. $z = 6x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 \to \min(\max),$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 27, \\ 8x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 = 12, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 15, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

30. $z = 10x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \to \min(\max),$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 9, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 57, \\ -6x_1 + 11x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 12, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

Задание 9. Решить симплексным методом. Предполагается, что $x_j \geq 0 \quad \forall j.$

1. $z = 9x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + x_3 = 16, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \\ 2x_1 + x_2 \geq 2. \end{cases}$

2. $z = 3x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leq 16, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ -5x_1 + 6x_2 \leq 18. \end{cases}$

3. $z = -3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max,$ $\begin{cases} -16x_1 + 42x_2 \leq 147, \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 = 28, \\ 15x_1 - 11x_2 \leq 75. \end{cases}$

4. $z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ 9x_1 - 7x_2 \leq 45. \end{cases}$

5. $z = x_1 + 9x_2 + 2x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \leq 25, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2, \\ x_1 + 3x_2 \geq 3. \end{cases}$

6. $z = 6x_1 + 7x_2 + 2x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ -4x_1 + 9x_2 \leq 18, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 5. \end{cases}$

7. $z = 4x_1 + 6x_2 + x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 12, \\ 21x_1 - 13x_2 \leq 105, \\ -15x_1 + 23x_2 \leq 69. \end{cases}$

8. $z = 4x_1 + 36x_2 + x_3 \to \max,$ $\begin{cases} -17x_1 + 21x_2 + x_3 = 63, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ 23x_1 - 11x_2 \leq 115. \end{cases}$

9. $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \le 20, \\ -4x_1 + 11x_2 \le 24, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

10. $z = 9x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max,$ $\begin{cases} -5x_1 + 7x_2 \le 21, \\ 8x_1 - 3x_2 + x_3 = 32, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6. \end{cases}$

11. $z = -x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ 7x_1 - 3x_2 \le 21, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

12. $z = 2x_1 + 7x_2 + x_3 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 7x_1 - 4x_2 \le 28. \end{cases}$

13. $z = x_1 - 4x_2 + 2x_3 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 15, \\ -8x_1 + 9x_2 \le 36. \end{cases}$

14. $z = x_1 + 6x_2 + x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \ge 12, \\ 8x_1 - 5x_2 \le 40, \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20. \end{cases}$

15. $z = 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 22, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

16. $z = 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 14, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$$

17. $z = x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 14, \\ 4x_1 + 10x_2 + x_3 + 3x_4 = 22. \end{cases}$$

18. $z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 = 14, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 10. \end{cases}$$

19. $z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 11. \end{cases}$$

20. $z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 22, \\ -4x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

21. $z = -6x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 11x_1 - 3x_2 \le 55, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -7x_1 + 8x_2 + x_4 = 32. \end{cases}$$

22. $z = 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 35, \\ -x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 6. \end{cases}$$

23. $z = -x_1 + 10x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 20, \\ -6x_1 + 11x_2 + x_4 = 22, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3. \end{cases}$$

24. $z = -3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ 9x_1 - 5x_2 + x_3 = 18, \\ -5x_1 + 7x_2 + x_4 = 28. \end{cases}$$

25. $z = 9x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_4 = 15, \\ -x_1 + x_2 \leq 3. \end{cases}$$

26. $z = 7x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6, \\ 9x_1 - 5x_2 \leq 27, \\ -5x_1 + 8x_2 \quad x_4 = 32. \end{cases}$$

27. $z = x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ -7x_1 + 8x_2 \leq 24. \end{cases}$$

28. $z = -6x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 10, \\ -5x_1 + 6x_2 + x_4 = 30. \end{cases}$$

29. $z = -6x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ -8x_1 + 9x_2 \quad x_4 = 18. \end{cases}$$

30. $z = 6x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 - x_3 = 3, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_4 = 16, \\ -3x_1 + 7x_2 + x_5 = 7. \end{cases}$$

Задание 10. Решить симплексным методом. Предполагается, что $x_j \geq 0 \quad \forall j.$

1. $z = 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 + x_3 = 24, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ 9x_1 - 4x_2 + x_5 = 18. \end{cases}$$

2. $z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_4 = 35, \\ -4x_1 + 9x_2 + x_5 = 27. \end{cases}$$

3. $z = 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} -5x_1 + 8x_2 + x_3 = 16, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 3, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_5 = 28. \end{cases}$$

4. $z = 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 9x_1 - 4x_2 + x_4 = 18, \\ -5x_1 + 6x_2 + x_5 = 24. \end{cases}$$

5. $z = 7x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + x_3 = 7, \\ 6x_1 + x_2 - x_4 = 3, \\ -3x_1 + 5x_2 + x_5 = 20. \end{cases}$$

6. $z = 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} -3x_1 + 8x_2 + x_3 = 16, \\ 5x_1 - 4x_2 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 - x_5 = 3. \end{cases}$$

7. $z = 4x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + x_3 = 24, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 2, \\ -4x_1 + 9x_2 + x_5 = 18. \end{cases}$$

8. $z = 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 10x_1 - 3x_2 + x_4 = 50, \\ -3x_1 + 4x_2 + x_5 = 16. \end{cases}$$

9. $z = 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 15, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ -5x_1 + 8x_2 + x_5 = 32. \end{cases}$$

10. $z = 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ 11x_1 - 5x_2 + x_4 = 55, \\ -4x_1 + 5x_2 + x_5 = 15. \end{cases}$$

11. $z = 5x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ x_1 - 13x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 13, \\ -x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 25. \end{cases}$$

12. $z = 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 13, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 5, \\ -7x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

13. $z = x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13, \\ 2x_1 - 16x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 8x_1 - 16x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 9. \end{cases}$$

14. $z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ -8x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 8, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 25. \end{cases}$$

15. $z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 15, \\ 2x_1 - 7x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 = 27, \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 24. \end{cases}$$

16. $z = -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 18, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 23, \\ 8x_1 + 9x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 47. \end{cases}$$

17. $z = 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 28, \\ -x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 14, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 16. \end{cases}$$

18. $z = x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 27, \\ -5x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 21, \\ 15x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$$

19. $z = -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 20, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 24, \\ -2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 6. \end{cases}$$

20. $z = 7x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 17, \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 24, \\ -7x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 5. \end{cases}$$

21. $z = 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 22, \\ 9x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 20, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = -4. \end{cases}$$

22. $z = 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 = 20. \end{cases}$$

23. $z = x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 12, \\ 14x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 16, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 12. \end{cases}$$

24. $z = 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 18. \end{cases}$$

25. $z = 6x_1 - 3x_2 - 4x_3 - x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9, \\ -7x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 3, \\ -6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 9. \end{cases}$$

26. $z = 5x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ -3x_1 + 4x_2 + x_4 = 24, \\ x_1 + x_2 \le 13, \\ 7x_1 - 4x_2 \quad x_5 = 14. \end{cases}$$

27. $z = 6x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 15, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4. \end{cases}$$

28. $z = 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 16. \\ x_1 + 3x_2 - x_5 = 3, \\ -x_1 + x_2 \le 2. \end{cases}$$

29. $z = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 18, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \\ x_1 + 4x_2 - x_5 = 4. \end{cases}$$

30. $z = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 12, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 20, \\ -x_1 + 4x_2 + x_4 = 8, \\ x_1 + 3x_2 - x_5 = 3. \end{cases}$$

Задание 11. Для данной задачи составить двойственную задачу и графическим методом найти решение обеих задач.

1. $z = 2x_1 + 5x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \le 15, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \end{cases} \quad x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$

2. $z = 6x_1 + 5x_2 \to \max, \quad \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 3, \\ 5x_1 - 4x_2 \le 10, \end{cases} \quad x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$

3. $z = 3x_1 + 4x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \le 18, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \end{cases} \quad x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$

4. $z = 6x_1 + 9x_2 \to \max, \quad \begin{cases} -5x_1 + 7x_2 \le 7, \\ 6x_1 - 5x_2 \le 12, \end{cases} \quad x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$

5. $z = 5x_1 + 4x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 7x_1 - 6x_2 \le 21, \\ -5x_1 + 9x_2 \le 18, \end{cases} \quad x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$

6. $z = 8x_1 + 7x_2 \to \max, \quad \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \le 4, \\ 7x_1 - 6x_2 \le 14, \end{cases} \quad x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$

7. $z = 6x_1 + 5x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

8. $z = 5x_1 + 4x_2 \to \max,\quad \begin{cases} -7x_1 + 9x_2 \le 9, \\ 8x_1 - 7x_2 \le 16, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

9. $z = 4x_1 + 5x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 9x_1 - 5x_2 \le 27, \\ -7x_1 + 8x_2 \le 16, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

10. $z = 6x_1 + 4x_2 \to \max,\quad \begin{cases} -x_1 + 4x_2 \le 4, \\ x_1 - x_2 \le 2, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

11. $z = 3x_1 + 5x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 6, \\ -6x_1 + 7x_2 \le 14, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

12. $z = 5x_1 + 8x_2 \to \max,\quad \begin{cases} -8x_1 + 7x_2 \le 7, \\ 9x_1 - 5x_2 \le 18, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

13. $z = 7x_1 + 5x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 7x_1 - 3x_2 \le 21, \\ -5x_1 + 6x_2 \le 12, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

14. $z = 5x_1 + 6x_2 \to \max,\quad \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 8x_1 - 5x_2 \le 32, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

15. $z = 8x_1 + 6x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 8x_1 - 3x_2 \le 24, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

16. $z = 6x_1 + 7x_2 \to \max,\quad \begin{cases} -5x_1 + 9x_2 \le 18, \\ 7x_1 - 5x_2 \le 28, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

17. $z = 8x_1 + 5x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 \le 21, \\ -5x_1 + 8x_2 \le 16, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

18. $z = 4x_1 + 6x_2 \to \max,\quad \begin{cases} -4x_1 + 9x_2 \le 18, \\ 6x_1 - 5x_2 \le 24, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

19. $z = 6x_1 + 7x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 5x_1 - x_2 \le 10, \\ -4x_1 + 3x_2 \le 3, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

20. $z = 5x_1 + 8x_2 \to \max,\quad \begin{cases} -3x_1 + 8x_2 \le 16, \\ 5x_1 - 4x_2 \le 20, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

21. $z = 5x_1 + 4x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 8x_1 - 3x_2 \le 32, \\ -6x_1 + 7x_2 \le 14, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

22. $z = 5x_1 + 7x_2 \to \max,\quad \begin{cases} -5x_1 + 4x_2 \le 4, \\ 3x_1 - x_2 \le 6, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

23. $z = 7x_1 + 4x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 8, \\ -4x_1 + 7x_2 \le 14, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

24. $z = 6x_1 + 9x_2 \to \max,\quad \begin{cases} -6x_1 + 5x_2 \le 5, \\ 7x_1 - 3x_2 \le 14, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

25. $z = 4x_1 + 6x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \le 20, \\ -3x_1 + 7x_2 \le 14, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

26. $z = 7x_1 + 8x_2 \to \max,\quad \begin{cases} -7x_1 + 6x_2 \le 6, \\ 2x_1 - x_2 \le 4, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

27. $z = x_1 + x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 \le 28, \\ -5x_1 + 6x_2 \le 12, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

28. $z = 6x_1 + 8x_2 \to \max,\quad \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 6, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

29. $z = 6x_1 + 4x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 20, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

30. $z = 4x_1 + 5x_2 \to \max,\quad \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 \le 5, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Задание 11. Для данной задачи составить двойственную задачу и найти решение обеих задач.

1. $z = 3x_1 + 5x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \le 16, \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 15, \\ 3x_1 + 7x_2 \le 49, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$

2. $z = 2x_1 + 3x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \le 64, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ 5x_1 - 4x_2 \le 20, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$

3. $z = 3x_1 + 4x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \le 56, \\ 6x_1 + x_2 \ge 6, \\ 6x_1 - 5x_2 \le 12, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$

4. $z = 5x_1 + 2x_2 \to \max,\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 20, \\ 3x_1 + x_2 \ge 6, \\ 6x_1 - 5x_2 \le 18, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$

5. $z = 4x_1 + 3x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ -3x_1 + 4x_2 \le 8, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$

6. $z = 2x_1 + 6x_2 \to \max,\quad \begin{cases} -5x_1 + 7x_2 \le 21, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 8x_1 - 3x_2 \le 32, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$

7. $z = 3x_1 + 5x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 11x_1 - 4x_2 \le 66, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ -7x_1 + 10x_2 \le 10, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$

8. $z = 5x_1 + 4x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 7x_1 - 3x_2 \le 21, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 9, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$

9. $z = 4x_1 + 5x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 7x_1 - 6x_2 \le 28, \\ 3x_1 + x_2 \ge 3, \\ -3x_1 + 10x_2 \le 40, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$

10. $z = 2x_1 + 3x_2 \to \max,\quad \begin{cases} -4x_1 + 9x_2 \le 36, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 8x_1 - 5x_2 \le 32, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$

11. $z = 5x_1 + 4x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ -4x_1 + 5x_2 \le 15, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$

12. $z = x_1 + 3x_2 \to \max,\quad \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ 12x_1 - 7x_2 \le 18, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$

13. $z = 7x_1 + 4x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 10, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ -2x_1 + 9x_2 \le 54, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$

14. $z = 4x_1 + 3x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ -5x_1 + 12x_2 \le 18, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$

15. $z = 5x_1 + 2x_2 \to \max,\quad \begin{cases} -2x_1 + 9x_2 \le 45, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 7x_1 - 4x_2 \le 35, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$

16. $z = 5x_1 + 3x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 20, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12, \\ -4x_1 + 9x_2 \le 36, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$

17. $z = 7x_1 + 4x_2 \to \max,\quad \begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \le 20, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ 8x_1 - 5x_2 \le 40, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$

18. $z = 8x_1 + 5x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12, \\ -4x_1 + 11x_2 \le 44, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$

19. $z = 5x_1 + 2x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ -x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 8x_1 - 7x_2 \le 40, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$

20. $z = 3x_1 + 2x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 9x_1 - 5x_2 \le 45, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$

21. $z = 2x_1 + 5x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 7x_1 - 4x_2 \le 28, \\ -5x_1 + 8x_2 \le 16, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$

22. $z = 3x_1 + 2x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ 2x_1 + 9x_2 \ge 6, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

23. $z = 3x_1 + 5x_2 \to \max,\quad \begin{cases} -3x_1 + 8x_2 \le 16, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ 5x_1 - 4x_2 \le 20, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

24. $z = 4x_1 + 2x_2 \to \max,\quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 \le 4, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

25. $z = 3x_1 + x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \le 24, \\ -4x_1 + 9x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

26. $z = 4x_1 + 3x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \ge 6, \\ -5x_1 + 9x_2 \le 18, \\ 7x_1 - 5x_2 \le 28, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

27. $z = x_1 + x_2 \to \max,\quad \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 \le 20, \\ 9x_1 - 4x_2 \le 36, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 12, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

28. $z = 3x_1 + 7x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 20, \\ 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ -5x_1 + 8x_2 \le 40, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

29. $z = 3x_1 + 4x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 11x_1 - 4x_2 \le 44, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ -3x_1 + 4x_2 \le 12, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

30. $z = 3x_1 + 5x_2 \to \max,\quad \begin{cases} -7x_1 + 8x_2 \le 40, \\ 3x_1 - x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Задание 12. Для данной задачи составить двойственную задачу и найти решение обеих задач.

1. $z = 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 28, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_4 = 15, \\ -x_1 + x_2 \le 7, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$$

2. $z = 7x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 25, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 6, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 12, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

3. $z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 \le 4, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

4. $z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + x_3 = 14, \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 3, \\ -3x_1 + 5x_2 \le 20, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

5. $z = -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 20, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

6. $z = 7x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + x_3 = 25, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 4, \\ -2x_1 + 9x_2 \le 27, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

7. $z = -5x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} -3x_1 + 8x_2 + x_3 = 24, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 12, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

8. $z = 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 5, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 4, \\ -3x_1 + 11x_2 + x_4 = 33, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

9. $z = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 24, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

10. $z = 4x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 6, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 10, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 40, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

11. $z = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} -5x_1 + 9x_2 \le 27, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_4 = 12, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

12. $z = -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

13. $z = 4x_1 - 7x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_4 = 16, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

14. $z = 7x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 8x_1 - 3x_2 + x_4 = 16, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

15. $z = -4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 3, \\ -4x_1 + 5x_2 + x_4 = 25, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

16. $z = 40x_1 + 31x_2 + 42x_3 - 12x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 12x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 \ge 3, \\ -7x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 3x_4 \ge 5, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

17. $z = 4x_1 - x_2 + 5x_3 + 4x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \ge 5, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 3, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

18. $z = 9x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 11x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \ge 2, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \ge 5, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

19. $z = 21x_1 - 6x_2 + 12x_3 + 9x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \ge 3, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 \ge 6, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

20. $z = 15x_1 + 33x_2 - 4x_3 + 12x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 \ge 2, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 \ge 5, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

21. $z = 8x_1 + 14x_2 + 8x_3 - 3x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 \ge 3, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 \ge 5, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

22. $z = 18x_1 - 6x_2 + 36x_3 + 12x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 \geq 2, \\ -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 \geq 4, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

23. $z = 10x_1 - 12x_2 + 37x_3 + 15x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 \geq 5, \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 \geq 8, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

24. $z = 12x_1 - 4x_2 + 52x_3 + 18x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 \geq 5, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 \geq 3, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

25. $z = 21x_1 + 51x_2 + 16x_3 + 15x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 \geq 6, \\ -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 5x_4 \geq 9, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

26. $z = 28x_1 + 14x_2 + 18x_3 - 10x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 \geq 6, \\ -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 5x_4 \geq 9, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

27. $z = 25x_1 - 12x_2 + 14x_3 + 6x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 \geq 4, \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \geq 7, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

28. $z = 6x_1 - 2x_2 + 9x_3 + 6x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 \geq 3, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 6, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

29. $z = 12x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 8x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 \geq 2, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 \geq 5, \end{cases} \quad x_j \geq 0 \quad \forall j.$$

30. $z = 16x_1 + 11x_2 + 5x_3 - 6x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 \ge 4, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \ge 1, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$$

Задание 13. Для данной задачи составить двойственную задачу и найти решение обеих задач.

1. $z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 \le 38, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$$

2. $z = 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 19, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 \le 4, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$$

3. $z = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 6, \\ 5x_1 + 4x_2 \le 33, \\ -3x_1 + x_2 \le 4, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$$

4. $z = 5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 \le 11, \\ -3x_1 + 4x_2 \le 16, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$$

5. $z = 7x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 15, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

6. $z = -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

7. $z = x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 \le 6, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

8. $z = -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 12, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

9. $z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 15, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 31, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 3, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

10. $z = -3x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 \le 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 13, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 2, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

11. $z = -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 16, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

12. $z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 18, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

13. $z = -3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 18, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 20, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 47, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 15, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

14. $z = -4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 15, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 43, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 5, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

15. $z = -x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 12, \\ 5x_1 + 4x_2 \le 38, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 5, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

16. $z = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 = 10, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 7, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

17. $z = 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 12x_5 = 18, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 13, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

18. $z = 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4 + 12x_5 = 14, \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 12x_5 = 10, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

19. $z = 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 7x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 25, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 8x_5 = 23, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 10x_5 = 35, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

20. $z = x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 6x_5 = 13, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 14, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 6x_5 = 18, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

21. $z = 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 17x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 11x_5 = 6, \quad x_j \geq 0 \quad \forall j. \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - 9x_5 = 8, \end{cases}$$

22. $z = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 20, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 4x_5 = 26, \quad x_j \geq 0 \quad \forall j. \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 7, \end{cases}$$

23. $z = x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 - 12x_5 = 11, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 - 16x_5 = 1, \quad x_j \geq 0 \quad \forall j. \; 53 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 8x_5 = 25, \end{cases}$$

24. $z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4 - 2x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 8x_4 - x_5 = 11, \quad x_j \geq 0 \quad \forall j. \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 5, \end{cases}$$

25. $z = 4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - 5x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 - 3x_5 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 13x_4 + 2x_5 = 17, \quad x_j \geq 0 \quad \forall j. \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 11x_4 + 3x_5 = 21, \end{cases}$$

26. $z = x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 6x_5 = 19, \quad x_j \geq 0 \quad \forall j. \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 - 2x_5 = 3, \end{cases}$$

27. $z = x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 23, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 22, \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j. \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - 12x_5 = 9, \end{cases}$$

28. $z = 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 7x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 21, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 8x_4 + 8x_5 = 13, \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j. \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 = 25, \end{cases}$$

29. $z = x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 - x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 - 6x_5 = 12, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 26, \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j. \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 32, \end{cases}$$

30. $z = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 19, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 30, \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j. \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 34, \end{cases}$$

Задание 14. Графическим методом найти целое решение задачи. Предполагается, что x_j – целые и $x_j \ge 0 \ \ \forall j.$

1. $z = 4x_1 + 3x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 16, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 18. \end{cases}$

2. $z = 3x_1 + 5x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 10, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 13. \end{cases}$

3. $z = 6x_1 + 7x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 19. \end{cases}$

4. $z = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \le 20, \\ 5x_1 + 4x_2 \le 15. \end{cases}$

5. $z = 4x_1 + 3x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 16, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 18. \end{cases}$

6. $z = 3x_1 + 5x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 14, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 16. \end{cases}$

7. $z = 5x_1 + 4x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \le 31, \\ 8x_1 + 6x_2 \le 39, \end{cases}$

8. $z = 4x_1 + 2x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 4x_1 + 7x_2 \le 16, \\ 9x_1 + 4x_2 \le 21. \end{cases}$

9. $z = 4x_1 + 3x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 19, \\ 6x_1 + 2x_2 \le 25. \end{cases}$

10. $z = 2x_1 + 4x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \le 24, \\ 7x_1 + 5x_2 \le 30. \end{cases}$

11. $z = 7x_1 + 3x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 5x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 4x_2 \le 38. \end{cases}$

12. $z = 8x_1 + 7x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 15. \end{cases}$

13. $z = 5x_1 + 4x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 15. \end{cases}$

14. $z = 3x_1 + 2x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 3x_2 \le 18. \end{cases}$

15. $z = 2x_1 + 3x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 35, \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36. \end{cases}$

16. $z = x_1 + x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 16, \\ 6x_1 + 5x_2 \le 27. \end{cases}$

16. $z = 5x_1 + 4x_2 \to \min,$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 7, \end{cases}$

18. $z = 5x_1 + 7x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 \leq 13, \\ 6x_1 + 9x_2 \leq 41. \end{cases}$

19. $z = 16x_1 + 9x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ \ x_1 + \ \ x_2 \leq 6. \end{cases}$

20. $z = 2x_1 + 3x_2 \to \min,$ $\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 \geq 9, \\ 3x_1 - 4x_2 \geq 3. \end{cases}$

21. $z = 3x_1 + x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 3. \end{cases}$

22. $z = 4x_1 + x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 7, \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 15. \end{cases}$

23. $z = x_1 + x_2 \to \max,$ $\begin{cases} \ \ x_1 + \ \ x_2 \leq 4, \\ \ \ x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ -3x_1 + \ \ x_2 \leq 0. \end{cases}$

24. $z = 5x_1 + 7x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 \leq 13, \\ 6x_1 + 9x_2 \leq 41. \end{cases}$

25. $z = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$ $\begin{cases} \ \ 9x_1 - 5x_2 \leq 27, \\ -5x_1 + 11x_2 \leq 22. \end{cases}$

26. $z = 5x_1 + 2x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 \leq 28, \\ \ x_1 + 2x_2 \leq 8. \end{cases}$

27. $z = 2x_1 + 4x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \leq 35, \\ 5x_1 + 8x_2 \leq 40. \end{cases}$

28. $z = 2x_1 + 5x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \leq 35, \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30. \end{cases}$

29. $z = x_1 + 3x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 4x_1 + 7x_2 \le 28, \\ 6x_1 + 5x_2 \le 30. \end{cases}$

30. $z = 3x_1 + 4x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24, \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40. \end{cases}$

Задание 15. Симплексным методом найти целое решение задачи. Предполагается, что x_j – целые и $x_j \ge 0 \quad \forall j.$

1. $z = 5x_1 + 2x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 14x_1 - 12x_2 \le 49, \\ 2x_1 + 10x_2 \ge 5, \\ -8x_1 + 26x_2 \le 39. \end{cases}$

2. $z = 2x_1 + 3x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 22x_1 - 8x_2 \le 33, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ -12x_1 + 14x_2 \le 35. \end{cases}$

3. $z = 4x_1 + 3x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 18x_1 - 8x_2 \le 27, \\ 6x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ -8x_1 + 14x_2 \le 35. \end{cases}$

4. $z = 4x_1 + 5x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 14x_1 - 16x_2 \le 69, \\ 2x_1 + 10x_2 \ge 5, \\ -8x_1 + 34x_2 \le 51. \end{cases}$

5. $z = 3x_1 + 4x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 14x_1 - 12x_2 \le 21, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ -6x_1 + 18x_2 \le 27. \end{cases}$

6. $z = 5x_1 + 4x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 18x_1 - 16x_2 \le 45, \\ 2x_1 + 6x_2 \ge 3, \\ -12x_1 + 26x_2 \le 39. \end{cases}$

7. $z = 7x_1 + 6x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 22x_1 - 20x_2 \le 55, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ -4x_1 + 10x_2 \le 1. \end{cases}$

8. $z = 5x_1 + 8x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 6x_1 - 4x_2 \le 21, \\ 2x_1 + 10x_2 \ge 5, \\ -12x_1 + 26x_2 \le 39. \end{cases}$

9. $z = 3x_1 + 4x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 26x_1 - 20x_2 \le 65, \\ -4x_1 + 10x_2 \le 35, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 3. \end{cases}$

10. $z = 4x_1 + 3x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 22x_1 - 16x_2 \le 77, \\ -4x_1 + 10x_2 \le 25, \\ 6x_1 + 2x_2 \ge 3. \end{cases}$

11. $z = 3x_1 + 2x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 18x_1 - 16x_2 \le 63, \\ -4x_1 + 10x_2 \le 15, \\ 2x_1 + 10x_2 \ge 5. \end{cases}$

12. $z = 5x_1 + 6x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 22x_1 - 16x_2 \le 55, \\ -12x_1 + 26x_2 \le 65, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 3. \end{cases}$

13. $z = 3x_1 + 4x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 6x_1 - 4x_2 \le 15, \\ -12x_1 + 22x_2 \le 33, \\ 2x_1 + 6x_2 \ge 3. \end{cases}$

14. $z = 3x_1 + 4x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 34x_1 - 16x_2 \le 85, \\ -24x_1 + 26x_2 \le 65, \\ 6x_1 + 2x_2 \ge 3. \end{cases}$

15. $z = 3x_1 + 4x_2 \to \max, \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 7x_1 - 5x_2 \leq 21, \\ -3x_1 + 11x_2 \leq 22. \end{cases}$

16. $z = 3x_1 + 4x_2 \to \max, \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 7x_1 - 5x_2 \leq 21, \\ -3x_1 + 11x_2 \leq 22. \end{cases}$

17. $z = 2x_1 + 5x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ 5x_1 - 7x_2 \leq 21, \\ -11x_1 + 3x_2 \leq 22. \end{cases}$

18. $z = 5x_1 + 2x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 9x_1 - 5x_2 \leq 27, \\ -5x_1 + 11x_2 \leq 22, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2. \end{cases}$

19. $z = x_1 + 4x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 5x_1 - 9x_2 \leq 27, \\ -11x_1 + 5x_2 \leq 22, \\ 2x_1 + x_2 \geq 2. \end{cases}$

20. $z = 6x_1 + 3x_2 \to \max, \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 11x_1 - x_2 \leq 33, \\ -x_1 + x_2 \leq 2. \end{cases}$

21 . $z = 5x_1 + 2x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 11x_1 - 5x_2 \leq 55, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ -8x_1 + 15x_2 \leq 45. \end{cases}$

22 . $z = 3x_1 + 4x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 13x_1 - 5x_2 \leq 65, \\ -7x_1 + 15x_2 \leq 45, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2. \end{cases}$

23 . $z = 3x_1 + 8x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ -5x_1 + 11x_2 \le 55, \\ 15x_1 - 8x_2 \le 45. \end{cases}$

24 . $z = 4x_1 + 7x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ -5x_1 + 13x_2 \le 65, \\ 15x_1 - 7x_2 \le 44. \end{cases}$

25 . $z = 3x_1 + 4x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 11x_1 - 7x_2 \le 44, \\ -x_1 + 3x_2 \le 9. \end{cases}$

26 . $z = 5x_1 + 8x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 13x_1 - 7x_2 \le 52, \\ -7x_1 + 15x_2 \le 45. \end{cases}$

27 . $z = x_1 + 4x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 3x_1 - x_2 \le 9, \\ -7x_1 + 11x_2 \le 44. \end{cases}$

28 . $z = 3x_1 + 6x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 15x_1 - 7x_2 \le 45, \\ -7x_1 + 13x_2 \le 52. \end{cases}$

29 . $z = 3x_1 + 8x_2 \to \max, \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ 11x_1 - 7x_2 \le 44, \\ -7x_1 + 15x_2 \le 30. \end{cases}$

30 . $z = x_1 + x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 3, \\ 15x_1 - 7x_2 \le 30, \\ -7x_1 + 11x_2 \le 44. \end{cases}$

Задание 16. Симплексным методом найти целое решение задачи. Предполагается, что x_j – целые и $x_j \geq 0 \ \ \forall j$.

1. $z = 8x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$ $\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + x_3 = 11, \\ -5x_1 + 7x_2 + x_4 = 21. \end{cases}$

2. $z = 9x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$ $\begin{cases} 11x_1 - 5x_2 + x_3 = 11, \\ -5x_1 + 7x_2 + x_4 = 21. \end{cases}$

3. $z = 9x_1 - 13x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$ $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 25, \\ -3x_1 + 13x_2 + x_4 = 13. \end{cases}$

4. $z = 5x_1 + 9x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$ $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 + x_3 = 28, \\ -5x_1 + 13x_2 + x_4 = 13. \end{cases}$

5. $z = 6x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$ $\begin{cases} 9x_1 - 7x_2 + x_3 = 45, \\ -5x_1 + 9x_2 + x_4 = 18. \end{cases}$

6. $z = 5x_1 + 15x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$ $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 35, \\ -3x_1 + 17x_2 + x_4 = 17. \end{cases}$

7. $z = 7x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$ $\begin{cases} 11x_1 - 5x_2 + x_3 = 22, \\ -5x_1 + 9x_2 + x_4 = 27. \end{cases}$

8. $z = 6x_1 + 19x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \max,$ $\begin{cases} 13x_1 - 5x_2 + x_3 = 26, \\ -7x_1 + 9x_2 + x_4 = 27. \end{cases}$

9. $z = 9x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$ $\begin{cases} 13x_1 - 5x_2 + x_3 = 26, \\ -7x_1 + 9x_2 + x_4 = 27. \end{cases}$

10. $z = 8x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$ $\begin{cases} 13x_1 - 9x_2 + x_3 = 26, \\ -7x_1 + 11x_2 + x_4 = 33. \end{cases}$

11. $z = 8x_1 + 9x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$ $\begin{cases} -9x_1 + 11x_2 + x_3 = 33, \\ 15x_1 - 7x_2 + x_4 = 30. \end{cases}$

12. $z = 5x_1 + 12x_2 + x_3 + x_4 \to \max,$ $\begin{cases} -7x_1 + 17x_2 + x_3 = 34, \\ 11x_1 - 7x_2 + x_4 = 55. \end{cases}$

13. $z = 6x_1 + 11x_2 + x_3 + x_4 \to \max$, $\begin{cases} -7x_1 + 13x_2 + x_3 = 26, \\ 11x_1 - 7x_2 + x_4 = 33. \end{cases}$

14. $z = 3x_1 + 10x_2 + x_3 + x_4 \to \max$, $\begin{cases} -3x_1 + 11x_2 + x_3 = 11, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_4 = 20. \end{cases}$

15. $z = x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max$, $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 3, \\ -15x_1 + 19x_2 \le 19, \\ 17x_1 - 15x_2 \le 34. \end{cases}$

16. $z = 2x_1 - 4x_2 + x_3 \to \max$, $\begin{cases} 2x_1 + 10x_2 - x_3 = 5, \\ -17x_1 + 21x_2 \le 21, \\ 19x_1 - 15x_2 \le 57. \end{cases}$

17. $z = x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$, $\begin{cases} -8x_1 + 22x_2 - x_3 = 55, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 3, \\ 6x_1 - 4x_2 \le 15. \end{cases}$

18. $z = 3x_1 - 7x_2 + x_3 \to \max$, $\begin{cases} 2x_1 + 14x_2 - x_3 = 7, \\ -16x_1 + 34x_2 \le 51, \\ 22x_1 - 16x_2 \le 99. \end{cases}$

19. $z = -3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$, $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ -20x_1 + 34x_2 \le 85, \\ 10x_1 - 8x_2 \le 25. \end{cases}$

20. $z = 8x_1 + x_2 + x_3 \to \max$, $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 15, \\ 2x_1 + 10x_2 \ge 5, \\ -x_1 + 3x_2 \le 3. \end{cases}$

21. $z = 14x_1 - 5x_2 + x_3 \to \max$, $\begin{cases} 11x_1 - 9x_2 + x_3 = 33, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ -7x_1 + 15x_2 \le 30. \end{cases}$

22. $z = 17x_1 - 9x_2 + x_3 \to \max$, $\begin{cases} 15x_1 - 13x_2 + x_3 = 30, \\ 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ -9x_1 + 17x_2 \leq 51. \end{cases}$

23. $z = 16x_1 - 13x_2 + x_3 \to \max$, $\begin{cases} 14x_1 - 16x_2 + x_3 = 35, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ -8x_1 + 26x_2 \leq 39. \end{cases}$

24. $z = 21x_1 - 11x_2 + x_3 \to \max$, $\begin{cases} 18x_1 - 16x_2 + x_3 = 45, \\ 2x_1 + 6x_2 \geq 3, \\ -4x_1 + 6x_2 \leq 9. \end{cases}$

25. $z = 15x_1 - 10x_2 + x_3 \to \max$, $\begin{cases} -8x_1 + 22x_2 \leq 33, \\ 2x_1 + 6x_2 \geq 3, \\ 14x_1 - 12x_2 + x_3 = 35. \end{cases}$

26. $z = 8x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max$, $\begin{cases} -4x_1 + 10x_2 \leq 15, \\ 2x_1 + 10x_2 \geq 5, \\ 6x_1 - 4x_2 + x_3 = 27. \end{cases}$

27. $z = 8x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max$, $\begin{cases} -12x_1 + 34x_2 \leq 51, \\ 2x_1 + 10x_2 \geq 5, \\ 6x_1 - 8x_2 + x_3 = 15. \end{cases}$

28. $z = 11x_1 - 6x_2 + x_3 \to \max$, $\begin{cases} -5x_1 + 13x_2 \leq 26, \\ 2x_1 + 6x_2 \geq 3, \\ 9x_1 - 7x_2 + x_3 = 27. \end{cases}$

29. $z = 9x_1 - 4x_2 + x_3 \to \max$, $\begin{cases} -5x_1 + 11x_2 \leq 11, \\ 2x_1 + 6x_2 \geq 3, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = 21. \end{cases}$

30. $z = x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max,\quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 6x_1 + 4x_2 \le 33, \\ -3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15; \end{cases}$

Задание 17. Найти максимум линейной формы z_t при $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ и $t \in [0;\ 90]$.

1. $z_t = (3+t)x_1 + (4-2t)x_2,\quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 9, \\ -3x_1 + 7x_2 \le 21, \\ x_1 + x_2 \ge 3. \end{cases}$

2. $z_t = (1+t)x_1 + (3-t)x_2,\quad \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \le 20, \\ -3x_1 + 7x_2 \le 14, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6. \end{cases}$

3. $z_t = (5-t)x_1 + (3+2t)x_2,\quad \begin{cases} 5x_1 - 4x_2 \le 30, \\ -3x_1 + 10x_2 \le 20, \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10. \end{cases}$

4. $z_t = (3-t)x_1 + (4+2t)x_2,\quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -3x_1 + 8x_2 \le 24, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6. \end{cases}$

5. $z_t = (1+2t)x_1 + (2-t)x_2,\quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 21, \\ -3x_1 + 11x_2 \le 33, \\ x_1 + 3x_2 \ge 6. \end{cases}$

6. $z_t = (3-2t)x_1 + (2+t)x_2,\quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8. \end{cases}$

7. $z_t = (2+t)x_1 + (4-3t)x_2$, $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ -5x_1 + 11x_2 \le 44. \end{cases}$

8. $z_t = (4-t)x_1 + (3+t)x_2$, $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ -5x_1 + 11x_2 \le 44. \end{cases}$

9. $z_t = (7-2t)x_1 + (5+t)x_2$, $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 18, \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10, \\ -3x_1 + 10x_2 \le 30. \end{cases}$

10. $z_t = (3+2t)x_1 + (2-t)x_2$, $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 \le 20, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ -3x_1 + 8x_2 \le 16. \end{cases}$

11. $z_t = (4+2t)x_1 + (5-t)x_2$, $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ 4x_1 - x_2 \le 8, \\ -3x_1 + 4x_2 \le 20. \end{cases}$

12. $z_t = (3+2t)x_1 + (5-t)x_2$, $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ 3x_1 - x_2 \le 6, \\ -4x_1 + 5x_2 \le 25. \end{cases}$

13. $z_t = (2+t)x_1 + (4-2t)x_2$, $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ 11x_1 - 4x_2 \le 44, \\ -5x_1 + 8x_2 \le 48. \end{cases}$

14. $z_t = (6-2t)x_1 + (5+t)x_2$, $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \ge 20, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 20, \\ -5x_1 + 8x_2 \le 40. \end{cases}$

15. $z_t = (2+t)x_1 + (5-2t)x_2,\quad \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4, \\ 11x_1 - 5x_2 \leq 44, \\ -7x_1 + 9x_2 \leq 36. \end{cases}$

16. $z_t = (4-t)x_1 + (-1+t)x_2 + (1+t)x_3 + (1-2t)x_4,$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 2. \end{cases}$$

17. $z_t = (2+t)x_1 + (1-2t)x_2 + (2-t)x_3 + (1+t)x_4,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ -3x_1 + 5x_2 \leq 6, \\ 4x_1 + x_2 - x_4 = 2. \end{cases}$$

18. $z_t = (7-t)x_1 + (-6+t)x_2 + (1+2t)x_3 + (1-t)x_4$

$$\begin{cases} 9x_1 - 4x_2 + x_3 = 36, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_4 = 12. \end{cases}$$

19. $z_t = (6-t)x_1 + (-3+t)x_2 + (1+t)x_3 + (3-2t)x_4$

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + x_3 = 32, \\ -4x_1 + 7x_2 \leq 28, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 2. \end{cases}$$

20. $z_t = (10-t)x_1 + (-7+2t)x_2 + (1-t)x_3 + (1+3t)x_4,$

$$\begin{cases} 11x_1 - 6x_2 + x_3 = 44, \\ -3x_1 + 5x_2 \leq 25, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 2. \end{cases}$$

21. $z_t = (2+t)x_1 + (-3+2t)x_2 + (1-t)x_3 + (1+t)x_4,$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 5, \\ 6x_1 + 2x_2 - x_4 = 3, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 9. \end{cases}$$

22. $z_t = (4-t)x_1 + (-3+t)x_2 + (1-2t)x_3 + (1+t)x_4,$

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + x_3 = 14, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 4, \\ -3x_1 + 5x_2 \le 20. \end{cases}$$

23. $z_t = (1-t)x_1 + (-3+3t)x_2 + (2+t)x_3 + (1-2t)x_4,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_4 = 10, \\ -x_1 + 2x_2 \le 10. \end{cases}$$

24. $z_t = (2+t)x_1 + (-3+2t)x_2 + (1+t)x_3 + (1-2t)x_4,$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 20, \\ 5x_1 + 4x_2 - x_4 = 20, \\ -5x_1 + 8x_2 \le 40. \end{cases}$$

25. $z_t = (5+t)x_1 + (-3+2t)x_2 + (1+t)x_3 + (1-2t)x_4,$

$$\begin{cases} 9x_1 - 4x_2 + x_3 = 18, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_4 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 15. \end{cases}$$

26. $z_t = (5+t)x_1 + (6-t)x_2 + (1+t)x_3 + (-1+2t)x_4,$

$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 + x_3 = 32, \\ -4x_1 + 9x_2 + x_4 = 36, \\ x_1 + x_2 \ge 3. \end{cases}$$

27. $z_t = (5-t)x_1 + (6+2t)x_2 + (1+t)x_3 + (2-t)x_4,$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 12, \\ -2x_1 + 5x_2 + x_4 = 20, \\ x_1 + x_2 \geq 2. \end{cases}$$

28. $z_t = (4+t)x_1 + (8-t)x_2 + (1+t)x_3 + (1-2t)x_4,$

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 + x_3 = 42, \\ -4x_1 + 11x_2 + x_4 = 33, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6. \end{cases}$$

29. $z_t = (6-t)x_1 + (5+2t)x_2 + (1-t)x_3 + (1+t)x_4,$

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 + x_3 = 40, \\ -6x_1 + 11x_2 + x_4 = 44, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6. \end{cases}$$

30. $z_t = (6+t)x_1 + (2-t)x_2 + (1+t)x_3 + (1-2t)x_4,$

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 + x_3 = 35, \\ -2x_1 + 5x_2 + x_4 = 15, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12. \end{cases}$$

Задание 18. Графическим методом найти минимум и максимум z .

1. $z = \dfrac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2},\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ 5x_1 - 3x_2 \leq 12, \\ -9x_1 + 8x_2 \leq 7, \end{cases} \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

2. $z = \dfrac{-2x_1 + x_2}{3x_1 + 4x_2},\quad \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 19, \\ 2x_1 - x_2 \leq 7, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 17, \end{cases} \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

3. $z=\dfrac{4x_1-3x_2}{x_1+2x_2}$, $\begin{cases} 3x_1 +4x_2 \ge 19, \\ 5x_1 -2x_2 \le 23, \\ -7x_1 +8x_2 \le 25, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

4. $z=\dfrac{3x_1-2x_2}{2x_1+3x_2}$, $\begin{cases} x_1 +4x_2 \ge 13, \\ 9x_1 -4x_2 \le 37, \\ -x_1 +x_2 \le 2, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

5. $z=\dfrac{4x_1-2x_2}{x_1+2x_2}$, $\begin{cases} 3x_1 -x_2 \ge 2, \\ 4x_1 +5x_2 \le 47, \\ -2x_1 +7x_2 \ge 5, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

6. $z=\dfrac{5x_1-2x_2}{2x_1+3x_2}$, $\begin{cases} 5x_1 -3x_2 \le 17, \\ -2x_1 +3x_2 \le 13, \\ 5x_1 +3x_2 \ge 19, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

7. $z=\dfrac{4x_1-3x_2}{3x_1+2x_2}$, $\begin{cases} 2x_1 -x_2 \le 9, \\ -7x_1 +9x_2 \le 29, \\ 3x_1 +4x_2 \ge 19, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

8. $z=\dfrac{5x_1+4x_2}{2x_1+3x_2}$, $\begin{cases} 9x_1 -5x_2 \le 35, \\ -8x_1 +9x_2 \le 19, \\ x_1 +4x_2 \ge 13, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

9. $z=\dfrac{3x_1-2x_2}{4x_1+x_2}$, $\begin{cases} 9x_1 -4x_2 \le 46, \\ -3x_1 +4x_2 \le 14, \\ 3x_1 +4x_2 \ge 26, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

10. $z=\dfrac{4x_1+3x_2}{2x_1+x_2}$, $\begin{cases} 5x_1 -2x_2 \ge 3, \\ 3x_1 +x_2 \le 33, \\ -x_1 +3x_2 \ge 2, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

11. $z=\dfrac{2x_1-x_2}{4x_1+3x_2}$, $\begin{cases} 8x_1-3x_2\le 29, \\ 2x_1+3x_2\ge 11, \\ -x_1+x_2\le 2, \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

12. $z=\dfrac{3x_1+4x_2}{x_1+2x_2}$, $\begin{cases} 7x_1-2x_2\le 31, \\ x_1+2x_2\ge 9, \\ -5x_1+6x_2\le 19, \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

13. $z=\dfrac{3x_1+2x_2}{x_1+4x_2}$, $\begin{cases} 4x_1-x_2\le 19, \\ x_1+2x_2\ge 7, \\ -6x_1+5x_2\le 3, \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

14. $z=\dfrac{4x_1-3x_2}{2x_1+x_2}$, $\begin{cases} 4x_1-x_2\le 22, \\ 3x_1+4x_2\ge 28, \\ -5x_1+7x_2\le 30, \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

15. $z=\dfrac{3x_1-2x_2}{x_1+2x_2}$, $\begin{cases} 6x_1-x_2\ge 5, \\ 4x_1+5x_2\le 43, \\ -x_1+3x_2\ge 2, \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

16. $z=\dfrac{2x_1+x_2}{x_1+3x_2}$, $\begin{cases} 5x_1+6x_2\le 80, \\ -3x_1+8x_2\ge 10, \\ 4x_1-x_2\ge 6, \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

17.. $z=\dfrac{3x_1-x_2}{x_1+2x_2}$, $\begin{cases} 3x_1-x_2\ge 2, \\ 4x_1+3x_2\le 33, \\ -2x_1+5x_2\ge 3, \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

18. $z=\dfrac{2x_1+x_2}{x_1+3x_2}$, $\begin{cases} -3x_1+7x_2\ge 4, \\ 2x_1-x_2\ge 1, \\ 5x_1+3x_2\le 52, \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

19. $z=\dfrac{3x_1+x_2}{-x_1+2x_2}$, $\begin{cases}2x_1+3x_2\le 19,\\ -x_1+2x_2\ge 5,\\ 4x_1-x_2\ge 3,\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

20. $z=\dfrac{-3x_1+2x_2}{x_1+3x_2}$, $\begin{cases}2x_1+3x_2\le 19,\\ -x_1+2x_2\ge 5,\\ 4x_1-x_2\ge 3,\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

21. $z=\dfrac{x_1-2x_2}{3x_1+x_2}$, $\begin{cases}5x_1+6x_2\le 52,\\ 6x_1-x_2\ge 5,\\ -x_1+7x_2\ge 6,\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

22. $z=\dfrac{5x_1-x_2}{2x_1+3x_2}$, $\begin{cases}3x_1+2x_2\le 19,\\ 9x_1-5x_2\ge 2,\\ -x_1+3x_2\ge 1,\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

23. $z=\dfrac{-3x_1+4x_2}{x_1+2x_2}$, $\begin{cases}7x_1-5x_2\ge 1,\\ x_1+2x_2\le 11,\\ -3x_1+13x_2\ge 5,\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

24. $z=\dfrac{2x_1+x_2}{-x_1+3x_2}$, $\begin{cases}-5x_1+11x_2\ge 3,\\ 11x_1-7x_2\ge 2,\\ 3x_1+2x_2\le 24,\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

25. $z=\dfrac{x_1+3x_2}{4x_1-x_2}$, $\begin{cases}3x_1+5x_2\le 36,\\ 11x_1-3x_2\ge 4,\\ -5x_1+13x_2\ge 4,\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

26. $z=\dfrac{-3x_1+2x_2}{x_1+3x_2}$, $\begin{cases}-x_1+6x_2\ge 5,\\ 3x_1+4x_2\le 29,\\ 2x_1-x_2\ge 1,\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

27. $z=\dfrac{4x_1+3x_2}{x_1-5x_2}$, $\begin{cases} 5x_1+4x_2\ge 42, \\ -x_1+7x_2\le 54, \\ 2x_1-x_2\le 9, \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

28. $z=\dfrac{4x_1-x_2}{x_1+x_2}$, $\begin{cases} 3x_1+4x_2\ge 29, \\ -2x_1+3x_2\le 9, \\ 7x_1-2x_2\le 45, \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

29. $z=\dfrac{3x_1+4x_2}{x_1+2x_2}$, $\begin{cases} 7x_1-2x_2\le 20, \\ 4x_1+3x_2\ge 29, \\ -3x_1+8x_2\ge 50, \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

30. $z=\dfrac{4x_1+3x_2}{2x_1+5x_2}$, $\begin{cases} 7x_1-4x_2\le 30, \\ x_1+x_2\ge 9, \\ -5x_1+6x_2\le 10, \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

Задание 19. Симплексным методом найти минимальное и максимальное значения z. Предполагается, что $x_j\ge 0 \quad \forall j.$

1. $z=\dfrac{4x_1-2x_2+x_3+2x_4}{x_1-3x_2+2x_3+x_4}$, $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=11, \\ 3x_1-x_2+x_4=8, \\ -3x_1+4x_2\le 13. \end{cases}$

2. $z=\dfrac{3x_1-2x_2+x_3+x_4}{4x_1-3x_2+2x_3+x_4}$, $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=7, \\ 5x_1-2x_2+x_4=11, \\ -x_1+x_2\le 2. \end{cases}$

3. $z=\dfrac{4x_1-5x_2+x_3+x_4}{5x_1-7x_2+2x_3+x_4}$, $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=14, \\ 7x_1-4x_2+x_4=20, \\ -5x_1+7x_2\le 23. \end{cases}$

4. $z=\dfrac{7x_1-3x_2+x_3+x_4}{3x_1-5x_2+2x_3+x_4}$, $\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=23, \\ 7x_1-3x_2+x_4=29, \\ -4x_1+7x_2\le 31. \end{cases}$

5. $z=\dfrac{2x_1+4x_2+x_3+x_4}{4x_1+9x_2+2x_3+x_4}$, $\begin{cases} 4x_1-x_2-x_3=3, \\ 3x_1+5x_2+x_4=31, \\ -x_1+6x_2\ge 5. \end{cases}$

6. $z=\dfrac{4x_1+x_2+2x_3+x_4}{x_1+x_2+x_3+x_4}$, $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=5, \\ 3x_1+2x_2-x_4=11, \\ -3x_1+5x_2\le 17. \end{cases}$

7. $z=\dfrac{2x_1-5x_2+x_3+2x_4}{6x_1+8x_2+x_3+x_4}$, $\begin{cases} 5x_1-3x_2+x_3=9, \\ x_1+2x_2-x_4=7, \\ -4x_1+5x_2\le 11. \end{cases}$

8. $z=\dfrac{7x_1-6x_2+x_3+x_4}{11x_1+x_2+x_3-x_4}$, $\begin{cases} 8x_1-5x_2+x_3=22, \\ 2x_1+3x_2-x_4=4 \\ -3x_1+x_2\le 13. \end{cases}$

9. $z=\dfrac{-x_1-3x_2+2x_3+x_4}{6x_1+5x_2+x_3-x_4}$, $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=8, \\ 3x_1+4x_2-x_4=23, \\ -5x_1+8x_2\le 35. \end{cases}$

10. $z=\dfrac{-4x_1+7x_2+x_3+x_4}{10x_1+5x_2+x_3-x_4}$, $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3=34, \\ 6x_1-x_2-x_4=5, \\ -3x_1+5x_2\ge 2. \end{cases}$

11. $z=\dfrac{x_1+2x_2+x_3+x_4}{8x_1+5x_2+x_3-x_4}$, $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3=26, \\ 4x_1-x_2-x_4=4, \\ -x_1+5x_2\ge 4. \end{cases}$

12. $z=\dfrac{-4x_1+7x_2+x_3+x_4}{10x_1+6x_2+x_3-x_4}$, $\begin{cases} 3x_1+5x_2+x_3 = 41, \\ 6x_1-x_2-x_4 = 5, \\ -x_1+3x_2 \ge 2. \end{cases}$

13. $z=\dfrac{x_1+3x_2+x_3+x_4}{2x_1+9x_2+2x_3+x_4}$, $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3 = 21, \\ 3x_1-x_2-x_4 = 4, \\ -x_1+4x_2 \ge 6. \end{cases}$

14. $z=\dfrac{3x_1-9x_2+x_3+x_4}{x_1+9x_2+x_3+2x_4}$, $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3 = 36, \\ 2x_1-x_2-x_4 = 2, \\ -x_1+6x_2 \ge 10. \end{cases}$

15. $z=\dfrac{x_1+8x_2+x_3+x_4}{9x_1+2x_2+x_3-x_4}$, $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3 = 39, \\ 4x_1-3x_2-x_4 = 2, \\ -x_1+7x_2 \ge 12. \end{cases}$

16. $z=\dfrac{2x_1-x_2+2x_3+x_4+x_5}{x_1-2x_2+3x_3+x_4+x_5}$, $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3 = 5, \\ 8x_1-7x_2+x_4 = 17, \\ -7x_1+9x_2+x_5 = 11. \end{cases}$

17. $z=\dfrac{x_1-3x_2+x_3+x_4+2x_5}{3x_1-2x_2+x_3+x_4+3x_5}$, $\begin{cases} 4x_1+3x_2-x_3 = 19, \\ 9x_1-7x_2+x_4 = 29, \\ -x_1+2x_2+x_5 = 9. \end{cases}$

18. $z=\dfrac{-6x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{x_1+2x_2+x_3+2x_4+x_5}$, $\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3 = 19, \\ 3x_1-2x_2+x_4 = 13, \\ -3x_1+5x_2+x_5 = 17. \end{cases}$

18. $z=\dfrac{-x_1-2x_2+2x_3+x_4+x_5}{3x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5}$, $\begin{cases} 4x_1+4x_2-x_3 = 26, \\ 8x_1-5x_2+x_4 = 38, \\ -5x_1+9x_2+x_5 = 35. \end{cases}$

19. $z=\dfrac{x_1+5x_2+x_3+x_4+2x_5}{3x_1+x_2+x_3+x_4+4x_5}$, $\begin{cases} 4x_1+3x_2+x_3=47, \\ 7x_1-3x_2-x_4=8, \\ -x_1+2x_2-x_5=2. \end{cases}$

20. $z=\dfrac{-6x_1+2x_2+2x_3+x_4+x_5}{3x_1+4x_2+x_3+x_4+2x_5}$, $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=13, \\ -7x_1+10x_2+x_4=23, \\ 4x_1-3x_2+x_5=14. \end{cases}$

21. $z=\dfrac{x_1-x_2+2x_3+x_4+x_5}{3x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5}$, $\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=19, \\ -5x_1+9x_2+x_4=49, \\ 8x_1-5x_2+x_5=35. \end{cases}$

22. $z=\dfrac{-5x_1+4x_2+x_3+x_4+x_5}{2x_1+3x_2+x_3+x_4+2x_5}$, $\begin{cases} 4x_1+3x_2-x_3=19, \\ -4x_1+9x_2+x_4=41, \\ 4x_1-3x_2+x_5=13. \end{cases}$

23. $z=\dfrac{-3x_1+4x_2+3x_3+x_4+x_5}{x_1-2x_2+2x_3+x_4+x_5}$, $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=21, \\ -5x_1+8x_2+x_4=25, \\ 7x_1-5x_2+x_5=7. \end{cases}$

24. $z=\dfrac{3x_1+x_2+x_3+x_4+3x_5}{4x_1+7x_2+2x_3+x_4+x_5}$, $\begin{cases} 4x_1+3x_2+x_3=36, \\ 6x_1-x_2-x_4=10, \\ -x_1+2x_2-x_5=2. \end{cases}$

25. $z=\dfrac{-5x_1-3x_2+2x_3+x_4+2x_5}{-x_1+3x_2+3x_3+x_4+x_5}$, $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=9, \\ -6x_1+7x_2+x_4=17, \\ 2x_1+3x_2-x_5=21. \end{cases}$

26. $z=\dfrac{-4x_1+6x_2+2x_3+x_4+x_5}{x_1+8x_2+x_3+x_4-x_5}$, $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=9, \\ -7x_1+9x_2+x_4=29, \\ 3x_1+4x_2-x_5=19. \end{cases}$

27. $z=\dfrac{x_1-5x_2+x_3+x_4+2x_5}{-x_1-7x_2+x_3+x_4+3x_5}$, $\begin{cases} 9x_1 -5x_2 +x_3 = 35, \\ -8x_1 +8x_2 +x_4 = 19, \\ x_1 +4x_2 -x_5 = 13. \end{cases}$

28. $z=\dfrac{2x_1-x_2+x_3+2x_4+x_5}{-2x_1+6x_2+x_3+3x_4+x_5}$, $\begin{cases} 9x_1 -4x_2 +x_3 = 46, \\ -3x_1 +4x_2 +x_4 = 14, \\ 3x_1 +4x_2 -x_5 = 26. \end{cases}$

29. $z=\dfrac{9x_1+3x_2+2x_3+x_4+x_5}{4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5}$, $\begin{cases} 4x_1 +3x_2 +x_3 = 39, \\ 7x_1 -x_2 -x_4 = 10, \\ -3x_1 +4x_2 -x_5 = 2. \end{cases}$

30. $z=\dfrac{2x_1-2x_2+x_3+2x_4+x_5}{-3x_1+x_2+x_3+3x_4+x_5}$, $\begin{cases} 7x_1 -5x_2 +x_3 = 1, \\ 2x_1 +x_2 -x_4 = 7, \\ -2x_1 +9x_2 +x_5 = 43. \end{cases}$

Задание 20. Дана транспортная задача по критерии стоимости:

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to \min,$$

при

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=a_i,\quad i=\overline{1,m};\qquad \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=b_j,\quad j=\overline{1,n};$$

$$x_{ij}\ge 0,\quad i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}.$$

Матрица тарифов, запасы пунктов распределения и назначения заданы следующей таблицей:

c_{11}	c_{11}	c_{13}	…	c_{1n}	a_1
c_{21}	c_{22}	c_{23}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
c_{m1}	c_{m2}	c_{m3}	…	c_{mn}	a_m
b_1	b_2	b_3	…	b_n	

Предварительный ациклический план составить с помощью одного из известных методов (северо-западный угол, минимальный элемент, двойное предпочтение). Если $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, то дополнить фиктивный пункт отправления (назначения).

1.

9	6	7	2	1	100
1	7	8	3	9	120
3	4	1	5	2	190
2	5	1	4	8	90
6	3	8	2	5	140
110	170	135	110	145	

2.

4	3	2	1	6	105
5	7	8	9	7	115
2	3	4	3	2	80
7	6	1	2	8	125
4	5	4	3	6	190
95	110	100	95	60	

3.

1	4	5	3	1	140
2	5	2	4	7	160
3	6	2	1	3	100
4	3	7	6	5	90
6	1	8	7	6	125
105	75	160	85	125	

4.

6	3	2	1	9	150
7	5	3	5	4	130
8	1	1	6	3	125
4	6	5	2	2	105
3	2	4	3	5	180
150	105	160	145	100	

5.

3	1	7	6	3	120
4	5	6	5	4	160
1	2	3	9	8	95
5	3	2	3	1	105
2	4	8	7	3	85
100	135	140	50	120	

6.

6	2	7	6	6	155
3	3	8	7	2	140
4	7	2	5	4	90
2	4	5	9	3	125
5	1	3	2	5	105
90	140	100	175	95	

7.

6	1	3	4	2	140
7	2	5	6	9	130
5	5	4	2	3	95
3	4	5	6	9	125
2	8	1	5	4	150
120	90	155	145	115	

8.

3	7	6	4	1	170
2	5	3	2	6	110
4	5	2	3	7	135
8	3	2	5	3	100
4	3	7	8	4	125
155	120	105	100	95	

9.

1	3	5	3	4	160
6	2	7	5	3	125
4	1	3	6	7	150
3	2	4	4	6	145
4	5	2	5	3	120
130	110	160	115	110	

10.

4	3	2	1	5	135
3	2	5	4	3	110
9	2	5	3	8	90
3	7	3	6	2	140
5	2	7	3	6	105
120	125	140	135	105	

11.

6	1	5	8	2	130
2	4	8	4	3	155
5	2	6	3	7	75
3	7	5	9	1	120
9	2	7	2	3	165
110	115	95	175	155	

12.

7	6	5	4	6	140
3	1	4	2	8	85
8	2	1	7	2	105
9	3	8	3	5	130
1	4	3	5	7	155
105	95	140	175	135	

13.

3	4	5	7	2	140
2	1	6	4	3	160
8	7	4	1	2	105
5	6	2	3	7	85
1	2	3	9	8	120
165	115	100	110	155	

14.

6	3	4	5	2	145
4	5	5	6	4	105
1	7	4	3	7	100
3	2	1	4	5	125
5	3	2	7	3	115
95	85	115	85	110	

15.

3	2	1	8	7	190
6	5	4	9	6	150
5	3	2	6	3	95
4	5	8	1	4	130
2	4	3	5	2	120
135	110	115	150	130	

16.

7	6	5	4	8	125
5	8	1	9	2	130
2	5	7	4	3	140
4	3	5	2	4	150
3	1	4	3	5	155
155	105	95	120	130	

17.

1	5	6	2	3	4	105
2	9	4	1	4	7	150
3	4	1	3	5	6	120
8	7	5	4	2	3	135
2	4	3	5	6	4	110
135	130	145	115	110	105	

18.

3	4	1	6	2	9	170
2	5	8	5	4	1	190
7	4	5	3	6	7	150
4	6	7	2	5	2	145
5	7	3	6	2	4	125
130	115	125	160	150	100	

19.

2	1	8	6	5	130
9	7	4	7	2	145
6	3	8	3	5	160
3	4	2	5	1	120
1	5	1	8	4	105
125	125	120	95	100	

20.

8	3	5	2	7	120
9	2	6	4	1	115
1	7	8	3	5	135
4	1	3	8	2	105
7	4	2	5	8	90
105	135	105	90	120	

21.

4	5	4	5	9	110
6	3	1	6	4	120
2	1	2	7	8	145
6	5	2	3	4	105
2	4	6	4	3	130
110	135	115	145	90	

20.

1	2	3	5	1	135
4	5	6	6	3	150
9	8	7	3	6	100
6	1	2	4	5	105
7	8	4	1	2	80
85	130	120	85	90	

23.

3	2	5	4	1	105
4	7	6	3	2	165
2	1	4	5	7	110
5	8	2	3	4	95
1	6	1	6	3	125
115	135	90	80	100	

24.

1	6	8	7	4	90
2	3	4	4	8	185
9	2	1	3	5	180
3	4	5	8	1	145
2	1	6	7	4	125
150	160	90	120	100	

25.

4	3	2	1	5	160
7	6	5	2	3	110
1	8	6	5	7	150
3	2	1	9	5	80
6	5	4	3	2	130
90	145	100	125	85	

26.

2	6	7	1	8	155
6	1	4	3	4	125
8	2	5	1	3	140
3	4	3	6	1	150
4	3	6	7	2	135
160	105	105	130	100	

27.

5	4	2	1	9	100
6	3	6	3	8	120
1	2	7	4	6	145
6	5	2	8	5	115
4	3	1	9	4	90
85	95	105	115	100	

28.

9	3	4	3	4	120
2	1	8	5	5	95
5	2	7	2	6	175
4	3	6	2	7	180
1	2	5	3	1	125
105	90	160	150	180	

29.

6	5	1	9	2	170
4	3	4	5	8	165
6	3	5	3	7	120
7	2	5	1	2	95
1	3	6	8	7	110
125	155	90	100	105	

30.

7	6	4	2	5	175
5	3	8	4	7	160
2	7	3	2	4	115
6	2	8	5	1	100
1	6	2	4	7	95
100	175	105	110	125	

Задание 21. Графическим методом найти минимум и максимум целевой функции $z = z\left(x_1, x_2\right)$. Предполагается, что все переменные неотрицательные, т.е. $x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$

1. $z = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 8x_2 + 41,\quad \begin{cases} 8x_1 + 9x_2 \ge 36, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 11x_1 - 3x_2 \le 11. \end{cases}$

2. $z = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 12x_2 + 61,\quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \ge 12, \\ -5x_1 + 4x_2 \le 16, \\ 3x_1 - x_2 \le 3. \end{cases}$

3. $z = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 - 8x_2 + 52,\quad \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ -5x_1 + 4x_2 \le 12, \\ 4x_1 - x_2 \le 8. \end{cases}$

4. $z = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 - 6x_2 + 45,\quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \ge 10, \\ -6x_1 + 5x_2 \le 25, \\ 11x_1 - 3x_2 \le 22. \end{cases}$

5. $z = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 + 20,\quad \begin{cases} 10x_1 + 6x_2 \ge 5, \\ -5x_1 + 9x_2 \le 27, \\ 8x_1 - 7x_2 \le 16. \end{cases}$

6. $z = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 4x_2 + 20,\quad \begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ -2x_1 + x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2. \end{cases}$

7. $z = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 4x_2 + 29,\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 15, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 3, \\ x_2 \le 3. \end{cases}$

8. $z = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 6x_2 + 25,\quad \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 19, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 3, \\ 2x_1 - x_2 \le 6. \end{cases}$

9. $z = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 8x_2 + 41,\quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 18, \\ -3x_1 + 4x_2 \le 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 9. \end{cases}$

10. $z = -x_1^2 + 4x_1 + x_2,\quad \begin{cases} 9x_1 + 10x_2 \le 45, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_2 \le 3. \end{cases}$

11. $z = 2x_1 + 3x_2,\quad \begin{cases} x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 2x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 2, \\ x_2 \ge 1. \end{cases}$

12. $z = 4x_1 + 3x_2,\quad \begin{cases} x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 - 4x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 3, \\ x_2 \ge 2. \end{cases}$

13. $z = 3x_1 + 5x_2,\quad \begin{cases} x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 6x_2 \le 36, \\ x_1 \ge 1, \\ x_2 \ge 2. \end{cases}$

14. $z = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 12x_2 + 40,\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 8, \\ x_1 + 3x_2 \le 15, \\ x_1 - x_2 \ge 1. \end{cases}$

15. $z = 4(x_1 - 3)^2 + 2(x_2 - 7)^2,\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 11. \end{cases}$

16. $z = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 8x_2 + 25,\quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \ge 6, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6. \end{cases}$

17. $z = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 13,\quad \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \le 16, \\ x_1 + 3x_2 \le 19, \\ -x_1 + 2x_2 \le 6. \end{cases}$

18. $z = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 6x_2 + 10,\quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 9, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ -x_1 + x_2 \le 4. \end{cases}$

19. $z = x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 + 4,\quad \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 20, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_2 \le 2. \end{cases}$

20. $z = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 8x_2 + 17,\quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 15, \\ 3x_1 + x_2 \le 15, \\ -2x_1 + 2x_2 \le 3. \end{cases}$

21. $z = x_1^2 + x_2^2 - 14x_1 - 6x_2 + 58,\quad \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 12, \\ x_2 \le 3 \end{cases}$

22. $z = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 24x_2 + 40,\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 \le 2. \end{cases}$

23. $z = 4x_1^2 + 9x_2^2 - 24x_1 - 36x_2 + 72,\quad \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ \qquad x_2 \leq 3. \end{cases}$

24. $z = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 4x_2 + 20,\quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 2, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 9, \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 5. \end{cases}$

25. $z = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 6x_2 + 25,\quad \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \geq 15, \\ 5x_1 - 3x_2 \leq 20, \\ -2x_1 + 7x_2 \leq 21. \end{cases}$

26. $z = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 13,\quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -5x_1 + 8x_2 \leq 24. \end{cases}$

27. $z = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 12x_2 + 40,\quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ 7x_1 - 2x_2 \leq 21, \\ -3x_1 + 5x_2 \leq 20. \end{cases}$

28. $z = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 4x_2 + 29,\quad \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 8x_1 - 3x_2 \leq 24, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 12. \end{cases}$

29. $z = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 4x_2 + 29,\quad \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 8x_1 - 3x_2 \leq 24, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 12. \end{cases}$

30. $z = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 13,\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ 3x_1 - x_2 \leq 6, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12. \end{cases}$

Задание 22. Для двух отраслей производства отпущено $z = Q$ денежных единиц на k лет. Найти оптимальный план распределения, если доходы отраслей и уменьшение средств в отраслях соответственно определяются:

отрасль *A*: $f(x)$ и $\varphi(x)$;

отрасль *B*: $g(y)$ и $\psi(y)$,

где x и y – денежные единицы, выделяемые в отрасли.

1. $z = 100;\quad k = 5;\quad f(x) = 4x;\quad g(y) = 3y;$
$\varphi(x) = 0,6x;\quad \psi(y) = 0,8y.$

2. $z = 90;\quad k = 5;\quad f(x) = 3,5x;\quad g(y) = 5y;$
$\varphi(x) = 0,9x;\quad \psi(y) = 0,8y.$

3. $z = 120;\quad k = 5;\quad f(x) = 2,5x;\quad g(y) = 0,5y;$
$\varphi(x) = 0,4x;\quad \psi(y) = 1,5y.$

4. $z = 100;\quad k = 5;\quad f(x) = 3,5x;\quad g(y) = 5,5y;$
$\varphi(x) = 0,7x;\quad \psi(y) = 0,7y.(y) = 0,4y.$

5. $z = 80;\quad k = 5;\quad f(x) = 6,5x;\quad g(y) = 4,3y;$
$\varphi(x) = 0,5x;\quad \psi(y) = 0,7y.(y) = 0,8y.$

6. $z = 80;\quad k = 5;\quad f(x) = 3x;\quad g(y) = 2y;$
$\varphi(x) = 0,5x;\quad \psi(y) = 0,7y.$

7. $z = 100;\quad k = 5;\quad f(x) = 3x;\quad g(y) = 2,5y;$
$\varphi(x) = 0,4x;\quad \psi(y) = 0,5y.$

8. $z = 90;\quad k = 5;\quad f(x) = 3x;\quad g(y) = 5y;$
$\varphi(x) = 0,7x;\quad \psi(y) = 0,4y.$

9. $z = 80;\quad k = 5;\quad f(x) = 6x;\quad g(y) = 5y;$
$\varphi(x) = 0,4x;\quad \psi(y) = 0,7y.$

10. $z = 90;\quad k = 5;\quad f(x) = 3x;\quad g(y) = 4y;$
$\varphi(x) = 0,5x;\quad \psi(y) = 0,4y.$

11. $z = 100; \quad k = 5; \quad f(x) = 5x; \quad g(y) = 3y;$
$\varphi(x) = 0,6x; \quad \psi(y) = 0,8y.$

12. $z = 90; \quad k = 5; \quad f(x) = 5x; \quad g(y) = 4y;$
$\varphi(x) = 0,4x; \quad \psi(y) = 0,6y.$

13. $z = 80; \quad k = 5; \quad f(x) = 6x; \quad g(y) = 4y;$
$\varphi(x) = 0,5x; \quad \psi(y) = 0,7y.$

14. $z = 90; \quad k = 5; \quad f(x) = 3x; \quad g(y) = 4{,}5y;$
$\varphi(x) = 0,7x; \quad \psi(y) = 0,5y.$

15. $z = 100; \quad k = 5; \quad f(x) = 7x; \quad g(y) = 5y;$
$\varphi(x) = 0,6x; \quad \psi(y) = 0,8y.$

16. $z = 90; \quad k = 5; \quad f(x) = 8x; \quad g(y) = 6y;$
$\varphi(x) = 0,4x; \quad \psi(y) = 0,6y.$

17. $z = 100; \quad k = 5; \quad f(x) = 8x; \quad g(y) = 5y;$
$\varphi(x) = 0,5x; \quad \psi(y) = 0,7y.$

18. $z = 100; \quad k = 5; \quad f(x) = 4x; \quad g(y) = 7y;$
$\varphi(x) = 0,7x; \quad \psi(y) = 0,5y.$

19. $z = 90; \quad k = 5; \quad f(x) = 5,5x; \quad g(y) = 8y;$
$\varphi(x) = 0,8x; \quad \psi(y) = 0,6y.$

20. $z = 80; \quad k = 5; \quad f(x) = 4,5x; \quad g(y) = 7y;$
$\varphi(x) = 0,7x; \quad \psi(y) = 0,4y.$

21. $z = 10; \quad k = 3; \quad f(x) = 1{,}5x^2; \quad g(y) = 2y^2;$
$\varphi(x) = 0,6x; \quad \psi(y) = 0,3y.$

22. $z = 20; \quad k = 3; \quad f(x) = 8x - x^2; \quad g(y) = 2y;$
$\varphi(x) = 0,5x; \quad \psi(y) = 0,9y.$

23. $z=15;\quad k=3;\quad f(x)=16x-x^2;\quad g(y)=6y;$

$\varphi(x)=0{,}5x;\quad \psi(y)=0{,}8y.$

24. $z=10;\quad k=3;\quad f(x)=12x-x^2;\quad g(y)=5y;$

$\varphi(x)=0{,}5x;\quad \psi(y)=0{,}7y.$

25. $z=10;\quad k=3;\quad f(x)=3x^2;\quad g(y)=4y^2;$

$\varphi(x)=0{,}8x;\quad \psi(y)=0{,}7y.$

26. $z=15;\quad k=3;\quad f(x)=x^2;\quad g(y)=2y^2;$

$\varphi(x)=0{,}7x;\quad \psi(y)=0{,}3y.$

27. $z=10;\quad k=3;\quad f(x)=13x-x^2;\quad g(y)=3y;$

$\varphi(x)=0{,}7x;\quad \psi(y)=0{,}8y.$

28. $z=8;\quad k=3;\quad f(x)=2x^2;\quad g(y)=3y^2;$

$\varphi(x)=0{,}8x;\quad \psi(y)=0{,}6y.$

29. $z=10;\quad k=3;\quad f(x)=13x-x^2;\quad g(y)=5y;$

$\varphi(x)=0{,}6x;\quad \psi(y)=0{,}7y.$

30. $z=8;\quad k=3;\quad f(x)=x^2+1;\quad g(y)=2y^2;$

$\varphi(x)=0{,}8x;\quad \psi(y)=0{,}5y.$

Задание 23. Для развития отрасли выделено m млн условных единиц. Деятельность предприятий отрасли должна развиваться в n направлениях. В каждой из отраслей изучено состояние отрасли и рынка, и определены величины ожидаемой прибыли в зависимости от объема капитало-вложений. В таблице

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	...	$f_n(x)$
1	$f_1(1)$	$f_2(1)$	...	$f_n(1)$
2	$f_1(2)$	$f_2(2)$	...	$f_n(2)$
...	...	...	...	...
m	$f_1(m)$	$f_2(m)$		$f_n(m)$

где $f_j(x)$ $\forall j$ – функции прибыли, Q = 1, 2, ... , m – объем капиталовложений. Составить план оптимального распределения капитальных вложений между отраслями.

1.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,24	0,31	0,18	0,25
2	0,42	0,42	0,29	0,31
3	0,64	0,57	0,40	0,37
4	0,75	0,67	0,57	0,45
5	0,91	0,72	0,69	0,54

2.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,26	0,33	0,17	0,27
2	0,44	0,45	0,18	0,27
3	0,61	0,60	0,41	0,40
4	0,82	0,69	0,63	0,44
5	0,90	0,75	0,72	0,57

3.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,28	0,35	0,19	0,27
2	0,44	0,46	0,28	0,34
3	0,59	0,58	0,39	0,42
4	0,74	0,68	0,65	0,47
5	0,90	0,75	0,73	0,52

4.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,27	0,26	0,21	0,19
2	0,44	0,39	0,28	0,33
3	0,63	0,56	0,43	0,41
4	0,77	0,68	0,51	0,49
5	0,88	0,76	0,64	0,54

5.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,24	0,31	0,13	0,27
2	0,42	0,42	0,34	0,31
3	0,64	0,58	0,40	0,35
4	0,78	0,67	0,57	0,45
5	0,91	0,73	0,69	0,51

6.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0, 26	0, 33	0,17	0,28
2	0,44	0,45	0,32	0,35
3	0,61	0,63	0,41	0,40
4	0,82	0,69	0,63	0,44
5	0,90	0,75	0,72	0,56

7.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,28	0,32	0,19	0,26
2	0,45	0,46	0,28	0,34
3	0,59	0,55	0,39	0,41
4	0,68	0,67	0,48	0,47
5	0,90	0,77	0,73	0,57

8.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,31	0,26	0,23	0,19
2	0,44	0,38	0,28	0,35
3	0,62	0,56	0,40	0,41
4	0,77	0,64	0,51	0,48
5	0,89	0,76	0,66	0,54

9.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,30	0,24	0,20	0,21
2	0,39	0,34	0,26	0,33
3	0,58	0,55	0,37	0,39
4	0,74	0,63	0,48	0,48
5	0,85	0,74	0,64	0,55

10.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,15	0,16	0,21	0,26
2	0,26	0,28	0,33	0,37
3	0,38	0,42	0,47	0,48
4	0,49	0,53	0,58	0,62
5	0,63	0,69	0,70	0,75

11.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,18	0,12	0,22	0,28
2	0,28	0,22	0,43	0,39
3	0,42	0,45	0,49	0,50
4	0,50	0,57	0,69	0,66
5	0,68	0,82	0,80	0,77

12.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,19	0,18	0,21	0,14
2	0,27	0,25	0,29	0,19
3	0,38	0,34	0,37	0,28
4	0,47	0,48	0,51	0,39
5	0,59	0,61	0,59	0,49

13.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,15	0,17	0,20	0,24
2	0,19	0,28	0,24	0,29
3	0,28	0,34	0,36	0,41
4	0,33	0,42	0,48	0,51
5	0,37	0,53	0,58	0,62

14.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,14	0,18	0,16	0,23
2	0,23	0,26	0,25	0,29
3	0,34	0,39	0,37	0,38
4	0,49	0,53	0,56	0,51
5	0,59	0,62	0,65	0,66

15.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,16	0,20	0,24	0,21
2	0,25	0,29	0,28	0,25
3	0,39	0,40	0,38	0,35
4	0,53	0,51	0,47	0,48
5	0,66	0,59	0,58	0,59

16.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,15	0,20	0,15	0,20
2	0,17	0,28	0,19	0,29
3	0,29	0,40	0,28	0,37
4	0,36	0,41	0,39	0,50
5	0,48	0,55	0,49	0,60

17.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,13	0,24	0,15	0,18
2	0,17	0,31	0,23	0,25
3	0,26	0,39	0,36	0,38
4	0,38	0,52	0,51	0,49
5	0,48	0,63	0,62	0,64

18.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,25	0,15	0,28	0,22
2	0,38	0,29	0,39	0,43
3	0,53	0,38	0,51	0,50
4	0,67	0,62	0,65	0,69
5	0,83	0,76	0,78	0,80

19.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,20	0,14	0,25	0,17
2	0,31	0,25	0,37	0,34
3	0,45	0,36	0,48	0,47
4	0,57	0,52	0,61	0,59
5	0,72	0,67	0,75	0,73

20.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,26	0,17	0,27	0,22
2	0,39	0,32	0,41	0,45
3	0,56	0,39	0,53	0,48
4	0,67	0,65	0,69	0,58
5	0,78	0,75	0,80	0,76

21.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,15	0,17	0,20	0,14
2	0,23	0,25	0,29	0,19
3	0,30	0,34	0,38	0,28
4	0,39	0,46	0,49	0,37
5	0,50	0,55	0,57	0,46

22.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,12	0,14	0,21	0,18
2	0,18	0,21	0,29	0,24
3	0,22	0,30	0,38	0,38
4	0,35	0,43	0,42	0,49
5	0,41	0,54	0,51	0,64

23.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,18	0,14	0,22	0,28
2	0,29	0,28	0,42	0,39
3	0,42	0,44	0,49	0,52
4	0,51	0,57	0,68	0,66
5	0,68	0,79	0,80	0,78

24.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,17	0,20	0,24	0,28
2	0,28	0,33	0,35	0,40
3	0,37	0,43	0,48	0,50
4	0,41	0,56	0,58	0,61
5	0,59	0,68	0,70	0,69

25.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,15	0,18	0,14	0,21
2	0,24	0,26	0,23	0,25
3	0,32	0,37	0,34	0,36
4	0,41	0,46	0,45	0,48
5	0,52	0,55	0,56	0,59

26.

$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_1(x)$
1	0,24	0,18	0,24	0,20
2	0,29	0,26	0,29	0,25
3	0,38	0,35	0,41	0,36
4	0,49	0,44	0,51	0,48
5	0,56	0,58	0,62	0,58

27.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,21	0,19	0,22	0,14
2	0,27	0,25	0,29	0,20
3	0,39	0,36	0,38	0,28
4	0,49	0,47	0,51	0,37
5	0,64	0,59	0,62	0,49

28.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,25	0,16	0,28	0,21
2	0,38	0,30	0,39	0,43
3	0,55	0,39	0,51	0,48
4	0,67	0,63	0,66	0,69
5	0,83	0,75	0,78	0,81

29.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,25	0,16	0,27	0,21
2	0,38	0,31	0,40	0,44
3	0,55	0,38	0,52	0,48
4	0,66	0,64	0,68	0,57
5	0,78	0,75	0,80	0,78

30.

Q	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	0,18	0,21	0,25	0,24
2	0,27	0,30	0,32	0,29
3	0,39	0,44	0,46	0,38
4	0,48	0,54	0,58	0,52
5	0,60	0,64	0,71	0,65

ПРОГРАММА
курса
«ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ»

1. Понятие модели и моделирования. Основные свойства модели. Классификация и принципы построения математических моделей.

2. Математические основы моделирования. Обыкновенные и модифицированные жордановы исключения. Приложения жордановых исключений в линейной алгебре и оптимизационных задачах.

3. Линейное программирование как часть математического программирования. Формы записи задачи линейного программирования, их эквивалентность и способы взаимного преобразования. Базисные и свободные переменные в линейном программировании. Графический метод решения
задачи линейного программирования, его алгоритм. Симплексный метод решения задачи линейного программирования, его алгоритм и симплексная таблица.

4. Взаимно-двойственные задачи. Математическая модель двойственной задачи линейного программирования. Связь математических моделей прямой и двойственной задач. Основные теоремы теории двойственности и их экономическое содержание.

5. Целочисленное программирование. Построение математической модели задачи целочисленного программирования. Графический метод решения задачи целочисленного программирования. Метод Гомори. Метод ветвей и границ.

6. Нелинейное программирование. Общая постановка задачи. Графический метод; задача с линейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений; задача с нелинейной целевой функцией и линейной системой ограничений; задача с нелинейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений. Дробно-линейное программирование: математическая модель задачи; Экономическая интерпретация задач дробно-линейного программирования. Графический метод решения задач дробно-линейного программирования. Симплексный метод решения задач дробно-линейного программирования.

7. Транспортная задача. Построение математической модели транспортной задачи. Построение начального плана перевозок методом минимального элемента, методом северо-западного угла. Решение транспортной задачи методом потенциалов. Экономические задачи, сводящиеся к транспортной модели. Задачи о назначениях.

8. Понятие динамического программирования. Постановка задачи. Принцип поэтапного построения оптимального управления. Некоторые экономические задачи, решаемые методами динамического программирования.

9. Предмет, цели и задачи теории массового обслуживания. Потоки требований. Классификация систем массового обслуживания. Простейшие системы массового обслуживания. Показатели эффективности системы массового обслуживания. Системы массового обслуживания с отказами. Системы массового обслуживания с ожиданием. Замкнутые системы массового обслуживания.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. Издательство «Дело», Москва 2002.

2. Н.Ш Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин. **Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики.** М. Издательство «Высшее образование», 2008, 2009.

3. Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко. И.М. Тришин, М.Н. Фридман. Исследование операций в экономике. Москва, «ЮНИТИ», 2000.

4. И.Ф. Полунин. Курс математического программиро-вания. Минск, «Вышэйшая школа», 1970.

5. Е.С. Вентцель. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. Москва, «Наука», 1980.

6. Ю.Н. Кузнецов, В.И. Кузубов, А.Б. Волощенко. Математическое программирование. Москва, «Высшая школа», 1980.

7. И.Л. Акулич. Математическое программирование в примерах и задачах. Москва, «Высшая школа», 1986.

Дополнительная

1. С.И. Гасс. Линейное программирование. Москва. Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.

2. Т.Л. Саати. Математические методы исследования операций. Москва. Военное издательство Министерства обороны СССР, 1963.

3. М.И. Ромакин. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. Москва, «Высшая школа», 1963.

4. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. Москва, Издательство «Наука», 1967.

Приложение 1

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ ПО ЗАЧЕТУ

1. Понятие модели и моделирования. Основные свойства модели. Классификация и принципы построения математических моделей.

2. Обыкновенные жордановы исключения.

3. Модифицированные жордановы исключения.

4. Приложения обыкновенных жордановых исключений для нахождения ранга матриц и обратной матрицы.

5. Приложения жордановых исключений для решения систем линейных уравнений.

6. Приложения жордановых исключений при нахождении неотрицательных и базисных решений систем линейных уравнений.

7. Системы линейных неравенств и геометрических метод решения этих систем.

8. Задача математического программирования в общем виде.

9. Составление математической модели задачи планирования производства.

10. Составление математической модели задачи снабжения.

11. Составление математической модели задачи смешения.

12. Составление математической модели транспортной задачи.

13. Графический метод решения задачи линейного программирования при ограничениях в виде неравенств.

14. Графический метод решения задачи линейного программирования при ограничениях в виде уравнений в случае $n-m=2$.

15. Симплексный метод решения задач линейного программирования при ограничениях в виде неравенств.

16. Симплексный метод решения задач линейного программирования при смешанной системы ограничений.

17. Экономические задачи, приводящие к двойственным задачам.

18. Взаимно-двойственные задачи. Математическая модель двойственной задачи линейного программирования.

19. Связь математических моделей прямой и двойственной задач. Алгоритм решения двойственных задач.

20. Экономические задачи, приводящие к целочисленному программированию.

21. Построение математической модели задачи целочисленного программирования. 17. Графический метод решения задачи целочисленного программирования.

22. Симплексный метод решения задачи целочисленного программирования.

23. Нелинейное программирование. Общая постановка задачи. Графический метод решения задач.

24. Экономические задачи, приводящие к дробно-линейному программированию. Математическая модель задачи.

25. Графический метод решения задач дробно-линейного программирования.

26. Симплексный метод решения задач дробно-линейного программирования.

27. Транспортная задача. Построение математической модели транспортной задачи. Построение начального плана перевозок методом минимального элемента, методом северо-западного угла.

28. Решение транспортной задачи методом потенциалов. Экономические задачи, сводящиеся к транспортной модели. Задачи о назначениях.

29. Понятие динамического программирования. Постановка задачи. Принцип поэтапного построения оптимального управления. Некоторые экономические задачи, решаемые методами динамического программирования.

30. Предмет, цели и задачи теории массового обслуживания. Классификация систем массового обслуживания.

31. Простейшие системы массового обслуживания. Показатели эффективности системы массового обслуживания. Системы массового обслуживания с отказами.

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАНИЙ

1. Дана система линейных равенств. Выполнить один шаг обыкновенных и модифицированных жордановых исключений с указанными разрешающими элементами соответственно, и найти новые системы линейных равенств.

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4, \\ y_2 = 2x_1 + x_2 - 5x_3 + 4x_4, \quad a_{31} \quad и \quad a_{23}. \\ y_3 = 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4, \end{cases}$$

□ 1. Для выполнения одного шага обыкновенных жордановых исключений (о.ж.и.) составим соответствующую таблицу (табл. 1).

Табл. 1

	x_1	x_2	x_3	x_4
$y_1 =$	1	2	3	–4
$y_2 =$	2	1	–5	4
$y_3 =$	$\boxed{2}$	4	–1	3

Выполним шаг обыкновенных жордановых исключений с разрешающим элементом $a_{31} = 2$ получим табл. 2. Шаг обыкновенных жордановых исключений состоит из выполнения следующих действий: 1) разрешающий элемент заменяется обратным; 2) все остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент, а их знаки заменяются на противоположные; 3) все остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент; 4) элементы, не принадлежащие разрешающей строке и разрешающему столбцу определяются по формуле $b_{ij} = \dfrac{a_{ij}a_{rs} - a_{rj}a_{is}}{a_{rs}}$, где $a_{ij} -$ выбранный элемент, $a_{rs} -$ разрещающий элемент, $a_{rj} -$элемент разрешающей строки, $a_{is} -$ элемент разрешающего столбца или правилу:

$$\frac{(\text{выбр. элем.})\times(\text{разр. элем.})-(\text{элем. разр. стр.})\times(\text{элем. разр. столб.})}{\text{разрешающий элемент}}.$$

Табл. 2

	y_3	x_2	x_3	x_4
$y_1 =$	$1/2$	0	$7/2$	$-11/2$
$y_2 =$	1	-3	-4	1
$x_1 =$	$1/2$	-2	$1/2$	$-3/2$

Следовательно, искомая система линейных равенств:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}y_3 \qquad\quad + \frac{7}{2}x_3 - \frac{11}{2}x_4, \\ y_2 = \quad y_3 - 3x_2 - 4x_3 + \quad x_4, \\ x_1 = \frac{1}{2}y_3 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4. \end{cases}$$

2. Для выполнения одного шага модифицированных жордановых исключений (м.ж.и.) с элементом $\alpha_{23} = 5$ систему равенств, представим в виде

$$\begin{cases} y_1 = \quad (-x_1) - 2(-x_2) - 3(-x_3) + 4(-x_4), \\ y_2 = -2(-x_1) - \ (-x_2) + 5(-x_3) - 4(-x_4), \\ y_3 = -2(-x_1) - 4(-x_2) + \ (-x_3) - 3(-x_4). \end{cases}$$

Таблица модифицированных жордановых исключений имеет вид, представленный табл. 3.

Табл. 3

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
$y_1 =$	-1	-2	-3	4
$y_2 =$	-2	-1	$\boxed{5}$	-4
$y_3 =$	-2	-4	1	-3

Выполнив один шаг м.ж.и. получим табл. 4. Один шаг м.ж.и. состоит их следующих действий: 1) разрешающий элемент заменяется обратным; 2) все остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент; 3) все остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент, а их знаки заменяются на противоположные; 4) элементы, не принадлежащие разрешающей строке и разрешающему столбцу определяются по формуле $\beta_{ij} = \dfrac{\alpha_{ij}\alpha_{rs} - \alpha_{rj}\alpha_{is}}{\alpha_{rs}}$, где α_{ij} – выбранный элемент, α_{rs} – разрешающий элемент, α_{rj} – элемент разрешающей строки, α_{is} – элемент разрешающего столбца или правилу:

$$\frac{(\text{выбр. элем.})\times(\text{разр. элем.})-(\text{элем. разр. стр.})\times(\text{элем. разр. столб.})}{\text{разрешающий элемент}}.$$

Табл. 4

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_2$	$-x_4$
$y_1 =$	$-11/5$	$-13/5$	$3/5$	$8/5$
$x_3 =$	$-2/5$	$-1/5$	$1/5$	$-4/5$
$y_3 =$	$-8/5$	$-19/5$	$-1/5$	$-11/5$

Таким образом, искомая система линейных равенств:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{11}{5}x_1 + \dfrac{13}{5}x_2 - \dfrac{3}{5}y_2 - \dfrac{8}{5}x_4, \\ x_3 = \dfrac{2}{5}x_1 + \dfrac{1}{5}x_2 - \dfrac{1}{5}y_2 + \dfrac{4}{5}x_4, \\ y_3 = \dfrac{8}{5}x_1 + \dfrac{19}{5}x_2 + \dfrac{1}{5}y_2 + \dfrac{11}{5}x_4. \end{cases} \blacksquare$$

2. Используя жордановы исключения, найти ранг данной матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \\ -1 & 7 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

□ Составим таблицу о.ж.и., и последовательно выполним возможное число шагов по перемене мест x_i и y_j:

Табл. 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$y_1 =$	$\boxed{1}$	–2	1	2	0
$y_2 =$	2	1	0	8	1
$y_3 =$	3	2	5	4	1
$y_4 =$	–1	7	–3	2	1

Табл. 2

	y_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$x_1 =$	1	2	–1	–2	0
$y_2 =$	2	5	–2	4	$\boxed{1}$
$y_3 =$	3	8	4	–2	1
$y_4 =$	–1	5	–2	4	1

Табл. 3

	y_1	x_2	x_3	x_4	y_2
$x_1 =$	1	2	–1	–2	0
$x_5 =$	–2	–5	2	–4	1
$y_3 =$	1	$\boxed{3}$	6	–6	1
$y_4 =$	–3	0	0	0	1

Табл. 4

	y_1	y_3	x_3	x_4	y_2
$x_1 =$	$1/3$	$2/3$	–3	0	$-2/3$
$x_5 =$	$-1/3$	$-5/3$	–12	–14	$8/3$
$x_2 =$	$-1/3$	$1/3$	–2	2	$-1/3$
$y_4 =$	–3	0	0	0	1

Из табл. 4 очевидно, что $y_4 = -3y_1 + y_2$, т.е. четвертая строка матрицы является линейной комбинацией первой и второй строк. Следовательно, ранг матрицы равен 3. ■

3. Используя обыкновенных жордановых исключений найти матрицу A^{-1}, обратную данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

□ Существование обратной матрицы A^{-1} можно проверить выполнением условия $|A| \neq 0.$ Для этого можно пользоваться методом треугольников (методом Саррюса):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 1 - 4 - 6 - 2 + 4 = -3 \neq 0,$$

т.е. обратная матрица существует.

Для нахождения обратной матрицы составим таблицу обыкновенных жордановых исключений, элементами которой являются элементы матрицы A:

Табл. 1

	x_1	x_2	x_2
$y_1 =$	1	-1	1
$y_2 =$	1	3	2
$y_3 =$	2	1	4

Таблицу преобразуем, так, чтобы переменные левого столбца заняли места соответствующих элементов верхней строки, т.е. в качестве разрешающего элемента на каждом шагу выбираем элемент главной диагонали матрицы, если это возможно. Если же элемент очередной элемент главной диагонали равен нулю, то дальнейшую работу следует прекратить, так как в этом случае обратная матрица не существует, т.е. матрица является особеной. Согласно изложенного получаем последовательность таблиц:

Табл. 2

	x_1	x_2	x_3
$y_1 =$	$\boxed{1}$	-1	1
$y_2 =$	1	3	2
$y_3 =$	2	1	4

Табл. 3

	y_1	x_2	x_3
$x_1 =$	1	1	-1
$y_2 =$	1	4	1
$y_3 =$	2	3	$\boxed{2}$

Табл. 4

	y_1	x_2	y_3
$x_1 =$	2	$5/2$	$-1/2$
$y_2 =$	0	$\boxed{5/2}$	$1/2$
$x_3 =$	-1	$-3/2$	$1/2$

Табл. 5

	y_1	y_2	y_3
$x_1 =$	2	1	-1
$x_2 =$	0	$2/5$	$-1/5$
$x_3 =$	-1	$3/5$	$4/5$

Из табл. 5 следует, что искомая обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2/5 & -1/5 \\ -1 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

Для контроля правильности найденной обратной матрицы проверим выполнение равенств $A^{-1}A = AA^{-1} = E,$ где $E-$ единичная матрица.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -1 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+0-1 & 1-\frac{2}{5}-\frac{3}{5} & -1+\frac{1}{5}+\frac{4}{5} \\ 2+0-2 & 1+\frac{6}{5}-\frac{6}{5} & -1-\frac{3}{5}+\frac{8}{5} \\ 4+0-4 & 2+\frac{3}{5}-\frac{12}{5} & -2-\frac{1}{5}+\frac{16}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Задача решена правильно.■

4. Систему уравнений решить с помощью обыкновенных или модифицированных жордановых исключений. Проверить правильность полученного решения.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 4. \end{cases}$$

□ Систему уравнений можно решить использованием как обыкновенных, так и модифицированных жордановых исключений. Воспользуемся модифицированными жордановыми исключениями. Систему уравнений представим в виде системы нуль-уравнений:

$$\begin{cases} 0 = (-x_1) + 2(-x_2) + 4(-x_3) + 3(-x_4) + 2, \\ 0 = 2(-x_1) - (-x_2) + (-x_3) + 5(-x_4) + 2, \\ 0 = 3(-x_1) + 2(-x_2) + 4(-x_3) + 6(-x_4) + 6, \\ 0 = 5(-x_1) - 3(-x_2) - 2(-x_3) + 4(-x_4) + 4. \end{cases}$$

Составим соответствующую таблицу м.ж.и. и при этом замечаем, что все коэффициенты системы остаются неизменными. Далее последовательно исключаем нуль-уравнения с указанными разрешающими элементами и при этом после каждого шага число столбцов уменьшается на единицу.

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
$0 =$	$\boxed{1}$	2	4	3	2
$0 =$	3	2	4	6	7
$0 =$	5	–3	–2	4	4

↓

	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
$x_1 =$	2	4	3	2
$0 =$	–5	–7	$\boxed{-1}$	–2
$0 =$	–4	–8	–3	1
$0 =$	–13	–22	–11	–6

↓

	$-x_2$	$-x_3$	1
$x_1 =$	–13	–17	–4
$x_4 =$	5	7	2
$0 =$	$\boxed{11}$	13	7
$0 =$	42	55	16

↓

	$-x_3$	1
$x_1 =$	$-18/11$	$47/11$
$x_4 =$	$12/11$	$-13/11$
$x_2 =$	$13/11$	$7/11$
$0 =$	$59/11$	$-118/11$

→

	1
$x_1 =$	1
$x_4 =$	1
$x_2 =$	3
$x_3 =$	–2

Таким образом, $x_1 = 1,\quad x_2 = 3,\ x_3 = -2,\ x_4 = 1 -$ решение данной системы уравнений.

Контроль: $x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 + 2\cdot 3 + 4\cdot(-2) + 3\cdot 1 = 2.$ ■

5. Используя модифицированные жордановы исключения найти неотрицательные решения системы уравнений и одну из базисных решений. Проверить правильность полученного решения.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 33, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 8x_4 - 2x_5 = 24, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = -9. \end{cases}$$

□ При нахождении неотрицательных решений системы уравнений пользуются алгоритмом: 1) все свободные члены преобразуют в неотрицательные; 2) разрешающий элемент выбирают среди положительных коэффициентов; 3) если при
переменной, вводимой в базис, имеется несколько положительных коэффициентов, то в качестве разрешающей строки берется та, в которой отношение свободного члена к положительному коэффициенту будет наименьшим; 4) если в процессе исключения неизвестных появится уравнение, в котором все коэффициенты неположительны, а свободный член положителен, то система не имеет неотрицательных решений; 5) если в столбцах коэффициентов при свободных переменных нет ни одного положительного элемента, то переход к другому опорному решению невозможен.

Свободный член третьего уравнения системы отрицателен. Умножив это уравнение на (-1), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 33, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 8x_4 - 2x_5 = 24, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 9. \end{cases}$$

Уравнения системы преобразуем в нуль-уравнения, и получим систему

$$\begin{cases} 0 = -x_1 - x_2 - x_3 - 5x_4 - x_5 + 33, \\ 0 = -x_1 - x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 2x_5 + 24, \\ 0 = -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 + 9. \end{cases}$$

Для полученной системы уравнений составим таблицу модифицированных жордановых исключений.

Последовательно выполняя шаги м.ж.и., найдем неотрицательные решения и одно из базисных решений (если существует).

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	1
$0 =$	1	1	$\boxed{1}$	5	1	33
$0 =$	1	1	–2	8	–2	24
$0 =$	–1	1	–1	1	3	9

↓

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_4$	$-x_5$	1
$x_3 =$	1	1	5	1	33
$0 =$	$\boxed{3}$	3	18	0	90
$0 =$	0	2	6	4	42

↓

	$-x_2$	$-x_4$	$-x_5$	1
$x_3 =$	0	–1	1	3
$x_1 =$	1	6	0	30
$0 =$	$\boxed{2}$	6	4	42

↓

	$-x_4$	$-x_5$	1
$x_3 =$	–1	1	3
$x_1 =$	3	–2	9
$x_2 =$	3	2	21

Из этой таблицы следует, что

$$\begin{cases} x_1 = -3x_4 + 2x_5 + 9, \\ x_2 = -3x_4 - 2x_5 + 21, \\ x_3 = \ x_4 - x_5 + 3. \end{cases}$$

Множество значений переменных $x_4 \geq 0$ и $x_5 \geq 0$, при которых выполняются равенства

$$\begin{cases} x_1 = -3x_4 + 2x_5 + 9 \geq 0, \\ x_2 = -3x_4 - 2x_5 + 21 \geq 0, \\ x_3 = \ \ x_4 \ - x_5 \ + \ 3 \geq 0 \end{cases}$$

есть неотрицательные решения системы уравнений. В данном случае неизвестные x_1, x_2, x_3 выражены посредством неизвестных x_3 и x_4. При этом неизвестные x_3 и x_4 являются

небазисными, а неизвестные x_1, x_2, x_3 – базисными. При $x_3 = 0$ и $x_4 = 0$ получаем: $x_1 = 9,$ $x_2 = 21,$ $x_3 = 3.$ Совокупность $(9;\ 21;\ 3;\ 0;\ 0)$ – одно из базисных решений.

Существуют и другие варианты выражения любого множества трех неизвестных посредством двух остальных.

Подставляя найденные значения x_1, x_2, x_3 в любое из уравнений системы уравнений можно убедиться в правильности найденного решения:

$$x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = -3x_4 + 2x_5 + 9 - 3x_4 - 2x_5 + 21 +$$
$$+ x_4 - x_5 + 3 + 5x_4 + x_5 = 33. \ \blacksquare$$

6. Даны векторы $\overrightarrow{a_1} = (1; 2; 3)$, $\overrightarrow{a_2} = (2; 3; 4)$, $\overrightarrow{a_3} = (3; -1; 2)$, $\vec{b} = (9; -2; 8)$. Показать, что векторы $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{b}$ в этом базисе.

□ Для проверки того, что векторы $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ образуют базис вычислим определитель системы; если определитель отличен от нуля, то векторы образуют базис, т.е. линейно независимы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 24 - 6 - 27 + 4 - 8 = -7 \neq 0.$$

Вектор $\bar{b}$ представим в виде

$$\vec{b} = \mu_1 \overrightarrow{a_1} + \mu_2 \overrightarrow{a_2} + \mu_3 \overrightarrow{a_3},$$
$$(9; -2; 8) = \mu_1 \cdot (1; 2; 3) + \mu_2 \cdot (2; 3; 4) + \mu_3 \cdot (3; -1; 2),$$

$$(9;-2;8)=(\mu_1+2\mu_2+3\mu_3;\,2\mu_1+3\mu_2-\mu_3;\,3\mu_1+4\mu_2+\mu_3).$$

Из равенства двух векторов получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \mu_1+2\mu_2+3\mu_3=9, \\ 2\mu_1+3\mu_2-\mu_3=-2, \\ 3\mu_1+4\mu_2+2\mu_3=8. \end{cases}$$

Эту систему можно решить правилом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}=6+24-6-27+4-8=-7,$$

$$\Delta_{\mu_1}=\begin{vmatrix} 9 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & 2 \end{vmatrix}=54-16-24-72+36+8=-14,$$

$$\Delta_{\mu_2}=\begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix}=-4+48-27+18+8-36=7,$$

$$\Delta_{\mu_3}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix}=24+72-12-81+8-32=-21.$$

Таким образом,

$$\mu_1=\frac{\Delta_{\mu_1}}{\Delta}=\frac{-14}{-7}=2,\quad \mu_2=\frac{\Delta_{\mu_2}}{\Delta}=\frac{7}{-7}=-1,\quad \mu_2=\frac{\Delta_{\mu_2}}{\Delta}=\frac{-21}{-7}=3;$$

$$\vec{b}=2\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_2}+3\overrightarrow{a_3},\ \text{или}\ \vec{b}=\{2;-1;3\}\,.$$

Числа $2,\ -1,\ 3$ – аффинные координаты вектора $\vec{b}$. ■

7. Решить симплексным методом.

$$z=2x_1+x_2+2x_3+3x_4\to\max,\quad \begin{cases} 3x_1 \qquad -x_3-x_4\le 6, \\ \qquad x_2-x_3+x_4\le 2, \\ -x_1+x_2+x_3 \qquad \le 5, \end{cases}\ x_j\ge 0\ \forall j.$$

□ Составим первую симплексную таблицу и заметим, что решение базисное, но неоптимальное. Находим оптимальное решение. Для этого в z-строке берем наименьший отрицательный элемент, составим симплексные отношения элементов столбца свободных членов, и определим разрешающий элемент по нименьшему симплексному отношению. Если это отношение единственное, то соответствующий элемент выбранного столбца единственное, то соответствующий элемент выбранного столбца будет разрешающим, если же таких отношений более одного, то можно выбрать любой элемент выбранного столбца который соответствует упомянутому отношению.

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
$y_1 =$	3	0	–1	–1	6
$y_2 =$	0	1	–1	$\boxed{1}$	2
$y_3 =$	–1	1	1	0	5
$z =$	–2	–1	–2	–3	0

↓

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-y_2$	1
$y_1 =$	3	1	–2	1	8
$x_4 =$	0	1	–1	1	2
$y_3 =$	–1	1	$\boxed{1}$	0	5
$z =$	–2	2	–5	3	6

↓

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_3$	$-y_2$	1
$y_1 =$	$\boxed{1}$	3	2	1	18
$x_4 =$	–1	2	1	1	7
$x_3 =$	–1	1	1	0	5
$z =$	–7	7	5	3	31

↓

$$\downarrow$$

	$-y_1$	$-x_2$	$-y_3$	$-y_2$	1
$x_1 =$	1	3	2	1	18
$x_4 =$	1	5	3	2	25
$x_3 =$	1	4	3	1	23
$z =$	7	28	19	10	157

Из последней таблицы следует, что оптимальное решение найдено:

$$z_{\max} = 157, \quad X_{\text{opt}} = (18; \quad 0; \quad 23; \quad 25). \blacksquare$$

8. Решить симплексным методом:

$$z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \max, \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 + \ x_3 \ = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \quad \forall j.$$

□ В данной задаче система ограничений – смешанная, т.е. имеются ограничения вида «$\le$», «$\ge$» и «$=$». Систему ограничений представим в виде

$$\begin{cases} y_1 = -4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3 \ge 0, \\ \ 0 = -2x_1 - x_2 - \ x_3 \ + 2, \\ y_2 = \ 3x_1 \ + x_2 + 2x_3 - 3 \ge 0, \end{cases}$$

Составим первую таблицу симплексного метода:

Табл. 1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	4	1	-2	3
$0 =$	2	$\boxed{1}$	1	2
$y_2 =$	-3	-1	-2	-3
$z =$	-1	2	-3	0

Из табл. 1 исключим нуль-уравнение. Выберем второй столбец и для определения разрешающего элемента найдем минимум симплексных отношений элементов правого столбца к соответствующим элементам выбранного столбца:

$$\min\left\{\frac{3}{1};\ \frac{2}{1};\ \frac{-3}{-1}\right\}=\frac{2}{1}.$$

Выполним шаг м.ж.и. с выбранным элементом, и получим табл. 2 .

Табл. 2

	$-x_1$	$-x_3$	1
$y_1 =$	2	-3	1
$x_2 =$	2	1	2
$y_2 =$	-1	$\boxed{-1}$	-1
$z =$	-5	-5	-4

Опорное (базисное) решение не найдено. Выберем столбец для $-x_3$, и находим минимальной симплексное отношение:

$$\min\left\{\frac{2}{1};\ \frac{-1}{-1}\right\}=\frac{-1}{-1}.$$

Выполним шаг м.ж.и. в найденным разрешающим элементом и получим табл. 3.

Табл. 3

	$-x_1$	$-y_2$	1
$y_1 =$	5	-3	4
$x_2 =$	1	$\boxed{1}$	3
$x_3 =$	1	-1	1
$z =$	0	-5	1

Опорное решение найдено, но оно неоптимальное. Поэтому выберем столбец, содержащий отрицательное число в z -строке, и выбрав разрешающий элемент (столбец имеет единственный положительный элемент); выполним шаг модифицированных жордановых исключений.

Табл. 4

	$-x_1$	$-x_2$	1
$y_1 =$	8	3	7
$y_2 =$	1	1	1
$x_3 =$	2	1	2
$z =$	5	5	6

Оптимальное решение найдено:

$$z_{\max} = 6, \quad X_{\text{opt}} = (0;\ 0;\ 2). \blacksquare$$

9. Решить симплексным методом:

$$z = 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 24, \quad x_j \geq 0 \quad \forall j. \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_5 \geq 30, \end{cases}$$

□ Составим первую симплексную таблицу. В таблице имеются два нуль-уравнения, подлежащие исключению. Для этого выберем любой столбец, содержащий хотя бы один элемент, отличный от нуля. Удобным является выбор разрешающей строки по наименьшему симплексному отношению, который исключает появления отрицательного числа в столбце свободных членов. При выполнении шага модифицированных исключений для исключения нуль-уравнения число столбцов в следующей таблице сокращается на единицу.

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	1
$y_1 =$	1	-2	2	0	0	6
$0 =$	1	2	1	1	0	24
$0 =$	2	1	-4	0	$\boxed{1}$	30
$z =$	-9	-5	-4	-3	-2	0

$\downarrow$

$\downarrow$

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
$y_1 =$	1	-2	2	0	6
$0 =$	1	2	1	$\boxed{1}$	24
$x_5 =$	2	1	-4	0	30
$z =$	-5	-3	-12	-3	60

$\downarrow$

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	1	-2	$\boxed{2}$	6
$x_4 =$	1	2	1	24
$x_5 =$	2	1	-4	30
$z =$	-2	3	-9	132

$\downarrow$

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_1$	1
$x_3 =$	$1/2$	-1	$1/2$	3
$x_4 =$	$1/2$	$\boxed{3}$	$-1/2$	21
$x_5 =$	4	-3	2	42
$z =$	$5/2$	-6	$9/2$	159

$\downarrow$

	$-x_1$	$-x_4$	$-y_1$	1
$x_2 =$	$2/3$	$1/3$	$1/3$	10
$x_4 =$	$1/6$	$1/3$	$-1/6$	7
$x_5 =$	$9/2$	1	$3/2$	63
$z =$	$7/2$	2	$7/2$	201

Из последней таблицы следует, что решение найдено:

$$z_{\max} = 201, \quad X_{\text{opt}} = (0;\ 7;\ 10;\ 0;\ 63)$$

10. Решить симплексным методом:

$$z = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

□ В данном случае система ограничений состоит из уравнений, которые преобразуются в нуль-уравнения. Составим первую симплексную таблицу, и последовательно выполнив шаги м.ж.и., нули перебросим в верхнюю заглавную строку; при этом каждый раз число столбцов сокращается на единицу. Затем находим оптимальное решение:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
$0 =$	1	$\boxed{1}$	-2	3	1
$0 =$	2	-1	-1	3	2
$z =$	-1	-2	1	-1	

↓

	$-x_1$	$-x_3$	$-x_4$	1
$x_2 =$	1	-2	3	1
$0 =$	$\boxed{3}$	-3	6	3
$z =$	1	-3	5	2

↓

	$-x_3$	$-x_4$	1
$x_2 =$	-1	1	0
$x_1 =$	-1	2	1
$z =$	-2	3	1

В столбце для $-x_3$, содержащий отрицательный элемент в z-строке отсутствует положительный элемент и невозможно составить неотрицательные отношения элементов столбца свободных членов к соответствующим элементам жэтого столбца. Исходя из этого, задача не имеет решения. ■

11. Решить симплексным методом:

$$z = x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

□ Составим первую симплексную таблицу и находим оптималное решение:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
$0 =$	$\boxed{1}$	4	4	1	5
$0 =$	1	7	8	2	9
$z =$	-1	3	5	1	0

↓

	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
$x_1 =$	4	4	1	5
$0 =$	3	4	$\boxed{1}$	4
$z =$	7	9	2	5

↓

	$-x_2$	$-x_3$	1
$x_1 =$	1	0	1
$x_4 =$	3	4	4
$z =$	1	1	-3

Оптимальное решение найдено:

$$z_{\max} = -3,\ \ X_{\text{opt}} = (1;\ 0;\ 0;\ 4). \blacksquare$$

12. Решить симплексным методом:

$$z = -4x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 18, \end{cases} \quad x_j \ge 0 \ \ \forall j.$$

□ Составляем первую таблицу модифицированных жордановых исключений (табл. 1).

Табл. 1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	$\boxed{2}$	–2	4	6
$y_2 =$	2	1	3	18
$z =$	4	2	–1	0

Из таблицы видно, что решение базисное (опорное), но не птимальное. Задача нахождения минимума заключается в исключении положительных элементов в z-строке. Поэтому в этой строек выберем наибольший положительный элемент, т.е. 4, и находим разрешающий элемент: $\min\{6/2;\ 18/2\} = 6/2$, и выполним шаг м.ж.и. с этим элементом; получим табл. 2.

Табл. 2

	$-y_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$x_1 =$	$1/2$	–1	2	3
$y_2 =$	–1	$\boxed{3}$	–1	12
$z =$	–2	6	–5	–12

В z-строке имеется положительный элемент 6, а соответствующий столбец имеет единственный положительный элемент 3. Выполним шаг м.ж.и. с этим элементом, и получим табл. 3.

Табл. 3

	$-y_1$	$-y_2$	$-x_3$	1
$x_1 =$	$1/6$	$1/3$	$5/3$	7
$x_2 =$	$-1/3$	$1/3$	$-1/3$	4
$z =$	0	–2	–3	–36

Оптимальное решение найдено:

$$z_{\min} = -36,\ \ X_{\text{opt}} = (7;\ 4;\ 0).\blacksquare$$

13. Решить симплексным методом:

$$z = -x_1 + x_2 - 3x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \le 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

□ Составляем первую таблицу модифицированных жордановых исключений (табл. 1).

Табл. 1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	-1	2	$\boxed{1}$	2
$y_2 =$	1	3	1	6
$y_3 =$	1	1	-1	2
$z =$	1	-1	3	0

В z -строке имеются дваположительных элемента 1 и 3. Выберем наибольший из них, т.е. $3,$ и находим разрешающий элемент $\min\left\{\frac{2}{1};\frac{6}{1}\right\} = \frac{2}{1},$ выполним шаг модифицированных жордановых исключений с этим элементом; получим табл. 2.

Табл. 2

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_1$	1
$x_3 =$	-1	2	$\boxed{1}$	2
$y_2 =$	$\boxed{2}$	1	-1	4
$y_3 =$	0	3	1	4
$z =$	4	-7	-3	-6

z -строка таблицы 2 содержит единственный положительный элемент $4,$ а соответствующий столбец – единственный положительный элемент $2.$ Выполним шаг м.ж.и. с выбранным элементом $2,$ и получим табл. 3.

Табл. 3

	$-y_2$	$-x_2$	$-y_1$	1
$x_3 =$	$1/2$	$5/2$	1	4
$x_1 =$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	2
$y_3 =$	0	3	1	4
$z =$	–2	–9	–1	–14

Из табл. 3 следует, что оптимальное решение найдено:

$$z_{\min} = -14,\ \ X_{\text{opt}} = (2;\ 0;\ 4).\blacksquare$$

14. Решить симплексным методом:

$$z = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \qquad \forall x_j. \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \end{cases}$$

□ Составляем первую таблицу м.ж.и. (табл. 1).

Табл. 1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
$0 =$	$\boxed{1}$	–1	2	–1	2
$0 =$	2	–1	–3	1	6
$0 =$	1	1	1	1	7
$z =$	–2	–1	1	1	0

Последовательно исключаем нули, стоящие в левом стольбце удобным выбором разрешающих элементов, и как видели выше, каждый раз после шага о.ж.и. сокращаются столбцы. Получим:

Табл. 2

	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
$x_1 =$	–1	2	–1	2
$0 =$	$\boxed{1}$	–7	3	2
$0 =$	2	–1	2	5
$z =$	–3	5	–1	4

Табл. 3

	$-x_3$	$-x_4$	1
$x_1 =$	–5	2	4
$x_2 =$	–7	3	2
$0 =$	$\boxed{13}$	–4	1
$z =$	–16	8	10

Табл. 4

	$-x_4$	1
$x_1 =$	$6/13$	$57/13$
$x_2 =$	$\boxed{11/13}$	$33/13$
$x_3 =$	$-4/13$	$1/13$
$z =$	$40/13$	$146/13$

Табл. 5

	$-x_2$	1
$x_1 =$	$-6/11$	3
$x_4 =$	$13/11$	3
$x_3 =$	$4/11$	1
$z =$	$-40/11$	2

Следовательно, ответ: $z_{\min} = 2,\ X_{\text{opt}} = (3;\ 0;\ 1;\ 3)$. ■

15. Для данной задачи составить двойственную задачу и найти решение обеих задач.

$$z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \le 1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0.$$

□ Двойственную задачу составим на основе алгоритма составления двойственной задачи для случая неравенств «$\le$» и неотрицательности неизвестных прямой задачи.

$$w = 4u_1 + u_2 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} u_1 + u_2 \ge 2, \\ 2u_1 - u_2 \ge 1, \\ -u_1 + u_2 \ge -3, \\ 2u_2 \ge 1, \end{cases}$$

$$u_1 \ge 0, \quad u_2 \ge 0.$$

Составляем первую объединенную симплексную таблицу. Эта таблица состоит из внутренней и внешней частей. Во внутренней части указываются данные задачи на максимум, а во внешней – данные задачи на минимум. Выполняя действия над данными внутренней части после каждого шага модифицированных жордановых исключений производится перемещение переменных внешней части. При этом одновременно находятся решение обеих задач. Если прямая задача имеет решение, то имеет решение и двойственная и наоборот.

		$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	$w =$
		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
u_1	$y_1 =$	1	2	-1	0	4
u_2	$y_2 =$	$\boxed{1}$	-1	1	2	2
1	$z =$	-2	-1	3	-1	0

$\downarrow$

		$u_2 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	$w =$
		$-y_2$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
u_1	$y_1 =$	-1	$\boxed{3}$	1	-4	3
v_1	$x_1 =$	1	-1	-1	3	1
1	$z =$	2	-3	1	5	2

$\downarrow$

$$\downarrow$$

		$u_2 =$	$u_1 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	$w =$
		$-y_2$	$-y_1$	$-x_3$	$-x_4$	1
v_2	$x_2 =$	$-1/3$	$1/3$	$1/3$	$-4/3$	1
v_1	$x_1 =$	$2/3$	$1/3$	$-2/3$	$5/3$	2
1	$z =$	1	1	2	1	5

Из этой таблицы очевидно, что решение найдено:

$$z_{\max} = w_{\min} = 5,$$

$$X_{\mathrm{opt}} = (1;\ 2;\ 0;\ 0),\quad U_{\mathrm{opt}} = (1;\ 1).\ \blacksquare$$

16. Для данной задачи составить двойственную задачу и найти решение обеих задач.

$$z = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max$$

при

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0,\quad x_3 \ge 0.$$

□ Система ограничений симметричная. Поэтому в двойственной задаче матрица системы ограничений прямой задачи транспонируется, свободные члены прямой задачи становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи, коэффициенты цедевой функции – свободными членами двойственной задачи, символы «$\le$» становятся «$\ge$» , неотрицательность переменных сохраняется. Двойственная задача имеет вид

$$w = 180u_1 + 210u_2 + 244u_3 \to \min$$

при

$$\begin{cases} 4u_1 + 3u_2 + u_3 \ge 10, \\ 2u_1 + u_2 + 2u_3 \ge 14, \\ u_1 + 3u_2 + 5u_3 \ge 12, \end{cases}$$

$$u_1 \ge 0,\quad u_2 \ge 0,\quad u_3 \ge 0.$$

□ Составим двойную симплексную таблицу, параллельно решим обе задачи.

		$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$w =$
		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
u_1	$y_1 =$	4	$\boxed{2}$	1	180
u_2	$y_2 =$	3	1	3	210
u_3	$y_3 =$	1	2	5	244
1	$z =$	-10	-14	-12	0

↓

		$v_1 =$	$u_1 =$	$v_3 =$	$w =$
		$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$	1
v_2	$x_2 =$	2	$1/2$	$1/2$	90
u_2	$y_2 =$	1	$-1/2$	$5/2$	120
u_3	$y_3 =$	-3	-1	$\boxed{4}$	64
1	$z =$	18	7	-5	1260

↓

		$v_1 =$	$u_1 =$	$u_3 =$	$w =$
		$-x_1$	$-y_1$	$-y_3$	1
v_2	$x_2 =$	$19/8$	$5/8$	$-1/8$	82
u_2	$y_2 =$	$23/8$	$1/8$	$-5/8$	80
v_3	$u_3 =$	$-3/4$	$-1/4$	$1/4$	16
1	$z =$	$57/4$	$23/4$	$5/4$	1340

Из последней таблицы следует, что оптимальные решения обеих задач найдены (в последнем столбце и последней строке прямой задачи все элементы неотрицательны). Поэтому

$$z_{\max} = w_{\min} = 1340,$$

$$X_{\text{opt}} = (0;\ 82;\ 16), \quad U_{\text{opt}} = (23/4;\ 0;\ 5/4).$$ ■

17. Симплексным методом найти целое решение задачи:

$$z = 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + \ x_3 \ + x_4 = 17, \\ 7x_1 + \ x_2 \ + 2x_3 + x_4 = 27, \end{cases} \quad x_j \geq 0, \quad x_j \in Z^+ \quad \forall j.$$

□ Сначала находим решения задачи без учета целочисленности переменных.

Табл. 1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
$0 =$	2	4	1	$\boxed{1}$	17
$0 =$	7	1	2	1	27
$z =$	–5	–6	–1	–1	0

↓

Табл. 2

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$x_4 =$	2	4	1	17
$0 =$	5	–3	$\boxed{1}$	10
$z =$	–3	–2	0	17

↓

Табл. 3

	$-x_1$	$-x_2$	1
$x_4 =$	–3	7	7
$x_3 =$	$\boxed{5}$	–3	10
$z =$	–3	–2	17

↓

Табл. 4

	$-x_3$	$-x_2$	1
$x_4 =$	$3/5$	$\boxed{26/5}$	13
$x_1 =$	$1/5$	$-3/5$	2
$z =$	$3/5$	$-19/5$	23

↓

$\downarrow$ Табл. 5

	$-x_3$	$-x_4$	1
$x_2 =$	$3/26$	$5/26$	$5/2$
$x_1 =$	$7/26$	$3/26$	$7/2$
$z =$	$27/26$	$19/26$	$65/2$

Получено оптимальное решение: $z_{\max} = 65/2$, $\overline{X}_{\text{opt}} = (7/2;\ 5/2)$. Но оно нецелочисленное. Теперь пользуемся условием целочисленности. Для этой цели берем, например первую строку (x_2), и находим целые части элементов (чисел) этой строки:

$$[3/26] = 0;\ [5/26] = 0;\ [5/2] = 2.$$

Находим разности между элементами и их целыми частями:

$$\frac{3}{26} - 0 = \frac{3}{26};\quad \frac{5}{26} - 0 = \frac{5}{26};\quad \frac{5}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Составим дополнительные условия

$$s_1 = \frac{3}{26}x_3 + \frac{5}{26}x_4 - \frac{1}{2},$$

и дополнив последнюю таблицу новой строкой, получим следующую таблицу.

Табл. 7

	$-x_3$	$-x_4$	1
$x_2 =$	$3/26$	$5/26$	$5/2$
$x_1 =$	$7/26$	$3/26$	$7/2$
$s_1 =$	$-3/26$	$\boxed{-5/26}$	$-1/2$
$z =$	$1/13$	$19/26$	$65/2$

Полученное решение не является базисным (в столбце свободных членов появилось отрицательное число). Для получения базисного решения найдем абсолютные значений отношения чисел z-строки к соответствующим элементам строки s_1, и выберем минимум из них:

$$\min\left\{\left|\frac{27}{26}:\frac{-3}{26}\right|;\ \left|\frac{19}{26}:\frac{-5}{26}\right|\right\}=\min\left\{\frac{27}{3};\ \frac{19}{5}\right\}=\frac{19}{5},$$

т.е. минимум соответствует элементу $-5/26$. Выполнив один шаг модифицированных жордановых исключений с этим элементом, получим следующую таблицу.

Табл. 8

	$-x_3$	$-s_1$	1
$x_2 =$	0	1	2
$x_1 =$	$1/5$	$3/5$	$16/5$
$x_4 =$	$3/5$	$-26/5$	$13/5$
$z =$	$3/5$	$19/5$	$153/5$

Переменная x_2 стала целой. Теперь выберем одну из строк с нецелым значением переменной, например строку, соответствующей переменной x_1, и находим целые части элементов этой строки:

$$[1/5]=0;\ [3/5]=0;\ [16/5]=3.$$

Найдем разности между чисел и их целых частей:

$$\frac{1}{5}-0=\frac{1}{5};\ \frac{3}{5}-0=\frac{3}{5};\ \frac{16}{5}-3=\frac{1}{5}.$$

Составив дополнительное условие

$$s_2=\frac{1}{5}x_3+\frac{3}{5}s_1-\frac{1}{5}.$$

Включим в таблицу 7, и получим табл. 8:

Табл. 9

	$-x_3$	$-s_1$	1
$x_2 =$	0	1	2
$x_1 =$	$1/5$	$3/5$	$16/5$
$x_4 =$	$-3/5$	$-26/5$	$13/5$
$s_2 =$	$\boxed{-1/5}$	$-3/5$	$-1/5$
$z =$	$3/5$	$19/5$	$153/5$

Получили небазисное решение. Поэтому составим симплексные отношения модулей элементов z-строки к модулям элементов s_2-строки, и выберем их минимум:

$$\min\left\{\left|\frac{3}{5}:\frac{-1}{5}\right|;\ \left|\frac{19}{5}:\frac{-3}{5}\right|\right\}=\min\left\{3;\ \frac{19}{3}\right\}=3,$$

т.е. минимум соответствует элементу $-1/5$. Выполнив один шаг м.ж.и. с этим элементом, получим таблицу 10.

Табл. 10

	$-s_3$	$-s_1$	1
$x_2 =$	0	1	2
$x_1 =$	1	0	3
$x_4 =$	3	–7	2
$x_3 =$	–5	3	1
$z =$	3	2	30

Целое решение задачи найдено:

$$z_{\max}=30,\quad X_{\text{opt}}=(3;\ 2;\ 1;\ 2).$$

18. Симплексным методом найти целое решение задачи:

$$z=x_1+6x_2+2x_3+x_4\to\max,$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 6x_1 + 4x_2 \le 33, \\ -3x_1 + 5x_2 + x_4 = 15, \end{cases} \quad x_j\ge 0,\ \ x_j\in Z^+\ \ \forall j.$$

□ Построим симплексную табл. 1.

Табл. 1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
$0 =$	1	–1	1	0	2
$y_1 =$	6	4	0	0	33
$0 =$	–3	5	0	$\boxed{1}$	15
$z =$	–1	–6	–2	–1	0

Сначала исключим нуль-уравнения, выполнив два шага модифицированных жордановых исключений. При этом каждый раз число столбцов уменьшается на единицу.

Табл. 2

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$0 =$	1	–1	$\boxed{1}$	2
$y_1 =$	6	4	0	33
$x_4 =$	–3	5	0	15
$z =$	–4	–1	–2	15

Табл. 3

	$-x_1$	$-x_2$	1
$x_3 =$	1	–1	2
$y_1 =$	6	4	33
$x_4 =$	–3	$\boxed{5}$	15
$z =$	–2	–3	19

Базисное решение найдено. Находим оптимальное решение. Для этого из z-строки выберем наименьшее отрицательное число (оно равно $-19/5$), и определим разрешающий столбец, а затем разрешающую строку по наименьшему симплексному отношению по наименьшему отношению элементов столбца свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца:

$$\min\{33/4;15/5\} = 15/5.$$

Выполним один шаг модифицированных жордановых исключений по выбранному элементу $\boxed{5}$ и получаем табл. 4.

Табл. 4

	$-x_1$	$-x_4$	1
$x_3 =$	$2/5$	$1/5$	5
$y_1 =$	$\boxed{42/5}$	$-4/5$	21
$x_2 =$	$-3/5$	$1/5$	3
$z =$	$-19/5$	$3/5$	28

В z-строке имеется отрицательное число. Поэтому для соответствующего столбца составим симплексные отношения и находим разрешающий элемент:

$$\min\left\{5:\frac{2}{5};\ 21:\frac{42}{5}\right\}=21:\frac{42}{5}.$$

Выполним один шаг м.ж.и. по выбранному элементу $42/5$ и получаем табл.5.

Табл. 5

	$-y_1$	$-x_4$	1
$x_3=$	$-1/21$	$5/21$	4
$x_1=$	$5/42$	$-2/21$	$5/2$
$x_2=$	$1/14$	$1/7$	$3/14$
$z=$	$19/42$	$5/21$	$25/14$

Получили оптимальное решение, но нецелочисленное: $z_{\max}=75/2$,

$$X_{\text{opt}}=\left(5/2;\ 9/2;\ 4;\ 0\right).$$

Находим целочисленное решение. Для этого выберем любую строку, содержащую дробное значение неизвестного в столбце для свободных членов, например x_2-строку и находим целые значения элементов этой строки, затем найдя дробные части, получим дополнительное ограничение:

$$\left[\frac{1}{14}\right]=0,\quad \left[\frac{1}{7}\right]=0,\quad \left[\frac{9}{2}\right]=4;$$

$$\frac{1}{14}-0=\frac{1}{14},\quad \frac{1}{7}-0=\frac{1}{7},\quad \frac{9}{2}-4=\frac{1}{2};$$

$$s_1=-\frac{1}{14}(-y_1)-\frac{1}{7}(-x_4)-\frac{1}{2}.$$

Табл. 5 дополним новой строкой для s_1, состоящей из дополнительного ограничения и получим табл. 6. Из таблицы очевидно, что решение стало небазисным. Для получения базисного решения составим абсолютные значения отношения элементов z-строки к элементам s_1-строки.

$$\min\left\{\left|\frac{19}{42}:\frac{-1}{14}\right|;\left|\frac{5}{21}:\frac{-1}{7}\right|\right\}=\left|\frac{5}{21}:\frac{-1}{7}\right|.$$

Табл. 6

	$-y_1$	$-x_4$	1
$x_3 =$	$-1/21$	$5/21$	4
$x_1 =$	$5/42$	$-2/21$	$5/2$
$x_2 =$	$1/14$	$1/7$	$3/14$
$s_1 =$	$-1/14$	$\boxed{-1/7}$	$-1/2$
$z =$	$19/42$	$5/21$	$75/2$

Зафиксировав в табл. 5 соответствующий элемент, выполним один шаг модифицированных жордановых исключений, и получим табл. 7.

Табл. 7

	$-y_1$	$-s_1$	1
$x_3 =$	$-1/6$	$5/3$	$19/6$
$x_1 =$	$1/6$	$-2/3$	$17/6$
$x_2 =$	0	1	4
$x_4 =$	$1/2$	1	$7/2$
$z =$	$1/3$	$5/3$	$110/3$

Выберем x_1-строку и находим целые значения элементов этой строки, затем найдя дробные части, получим дополнительное ограничение:

146

$$\left[\frac{1}{6}\right]=0,\quad \left[-\frac{2}{3}\right]=-1,\quad \left[\frac{17}{6}\right]=2;$$

$$\frac{1}{6}-0=\frac{1}{6},\quad -\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3},\quad \frac{17}{6}-2=\frac{5}{6};$$

$$s_2=-\frac{1}{6}(-y_1)-\frac{1}{3}(-s_1)-\frac{5}{6}.$$

Табл. 7 дополним новой s_2-строкой, состоящей из дополнительного ограничения, и получим табл. 7.

Табл. 8

	$-y_1$	$-s_1$	1
$x_3 =$	$-1/6$	$5/3$	$19/6$
$x_1 =$	$1/6$	$-2/3$	$17/6$
$x_2 =$	0	1	4
$x_4 =$	$1/2$	1	$7/6$
$s_2 =$	$\boxed{-1/6}$	$-1/3$	$-5/6$
$z =$	$1/3$	$5/3$	$110/3$

Из табл. 8 следует, что решение оказалось небазисным. Для получения базисного решения составим абсолютные значения отношения элементов z-строки к элементам s_2-строки: $\min\left\{\left|\frac{1}{3}:\frac{-1}{6}\right|;\left|\frac{5}{3}:\frac{-1}{3}\right|\right\}=\left|\frac{1}{3}:\frac{-1}{6}\right|.$

Зафиксировав в табл. 7 соответствующий элемент символом $\boxed{-1/6}$, выполним один шаг м.ж.и., и получим табл. 9.

Табл. 9

	$-s_2$	$-s_1$	1
$x_3 =$	-1	-4	4
$x_1 =$	1	1	2
$x_2 =$	0	1	4
$x_4 =$	3	0	1
$y_1 =$	6	2	5
$z =$	2	1	35

Найдено целочисленное решение:

$$z_{\max}=35,\quad X_{\text{opt}}=(2;\ 4;\ 4;\ 1).\ ■$$

19. Симплексным методом найти целое решение задачи:

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 9, \\ 3x_1 - 4x_2 \ge 3, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\quad x_1, x_2 \in Z^+.$$

□ Систему ограничений преобразуем в стандартную форму:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 \le -9, \\ -3x_1 + 4x_2 \le -3. \end{cases}$$

Составим первую симплексную таблицу и постепенно находим базисное, а затем оптимальное решение без учета целочисленности значений переменных:

Табл. 1

	$-x_1$	$-x_2$	1
$y_1 =$	–2	$\boxed{-1}$	–9
$y_2 =$	–3	4	–3
$z =$	–2	–3	0

Табл. 2

	$-x_1$	$-y_1$	1
$x_2 =$	2	–1	9
$y_2 =$	$\boxed{-11}$	4	–39
$z =$	4	–3	27

Табл. 3

	$-y_2$	$-y_1$	1
$x_2 =$	$\boxed{2/11}$	$-3/11$	$21/11$
$x_1 =$	$-1/11$	$-4/11$	$39/11$
$z =$	$4/11$	$-17/11$	$141/11$

Табл. 4

	$-x_2$	$-y_1$	1
$y_2 =$	$11/2$	$-3/2$	$21/2$
$x_1 =$	$1/2$	$-1/2$	$9/2$
$z =$	–2	–1	9

Из табл. 4 следует, что оптимальное решение найдено:

$$z_{\min} = 9, \ \ X_{\text{opt}} = \left(9/2; \ 0\right).$$

Найденное решение – нецелочисленное. Поэтому нужно учесть условие целочисленности. Значение $x_2 = 9/2$ – дробное число. Поэтому вычислим лелые части элементов строки для x_2:

$$\left[\frac{1}{2}\right] = 0, \quad \left[-\frac{1}{2}\right] = -1, \quad \left[\frac{9}{2}\right] = 4.$$

Вычислим разности элементов и их целых частей:

$$\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}, \quad \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}.$$

Составим новое ограничение

$$s_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2},$$

табл. 4 дополним этим ограничением и получим табл. 5.

Табл. 5

	$-x_2$	$-y_1$	1
$y_2 =$	$11/2$	$-3/2$	$21/2$
$x_1 =$	$1/2$	$-1/2$	$9/2$
$s_1 =$	$-1/2$	$\boxed{-1/2}$	$-1/2$
$z =$	–2	–1	9

Табл. 5 показывает, что решение – небазисное. Поэтому составив абсолютные значения элементов z-строки к элементам s_1-строки, определим разрешающий элемент:

$$\min\left\{\left|(-2):\left(-\frac{1}{2}\right)\right|;\ \left|(-1):\left(-\frac{1}{2}\right)\right|\right\}=\min\{4;\ 2\}=2.$$

Разрешающим элементом является $\boxed{-1/2}$, расположенный в пересечении s_1-строки и $-y_1$-столбца. Выполним шаг м.ж.и. с указанным элементом и получим табл. 6.

Табл. 6

	$-x_2$	$-s_1$	1
$y_2=$	7	–3	12
$x_1=$	1	–1	5
$y_1=$	1	–1	1
$z=$	–1	–2	10

Из табл. 6 очевидно, что найдено целочисленное решение:

$$z_{\min}=10,\ X_{\text{opt}}=(5;\ 0).\ \blacksquare$$

20. Решить задачу

$$z=(2+t)x_1+(3-2t)x_2\to\max$$

при ограничениях раничения

$$\begin{cases}3x_1-2x_2\le 9,\\ x_1+9x_2\le 11,\quad x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\quad t\in[0;\ 100].\\ -2x_1+3x_2\le 6,\end{cases}$$

□ Суть решения задачи параметрического программирования заключается в том, что данный отрезок $[0;\ 100]$ нужно разделить на элементарные отрезки, в которых максимум достигается в одних и тех же вершинах, что при значении t, принадлежащей началу отрезка.

Полагаем $t=0$, получаем целевую функцию с постоянными коэффициентами

$$z_0=2x_1+3x_2\to\max.$$

Решаем задачу с целевой функцией z_0 и двумя строками z_t.

Табл. 1

	$-x_1$	$-x_2$	1
$y_1 =$	3	–2	9
$y_2 =$	1	2	11
$y_3 =$	–2	$\boxed{3}$	6
$z_0 =$	–2	–3	0
$z_t = \begin{cases} \\ \end{cases}$	–2	–3	0
	–1	2	0

Табл. 2

	$-x_1$	$-y_3$	1
$y_1 =$	$5/3$	$2/3$	13
$y_2 =$	$\boxed{7/3}$	$-2/3$	7
$x_2 =$	$-2/3$	$1/3$	2
$z_0 =$	–4	1	6
$z_t = \begin{cases} \\ \end{cases}$	–4	1	6
	$1/3$	$-2/3$	4

Табл. 3

	$-y_2$	$-y_3$	1
$y_1 =$	$-5/7$	$\boxed{8/7}$	8
$x_1 =$	$3/7$	$-2/7$	3
$x_2 =$	$2/7$	$1/7$	4
$z_0 =$	$12/7$	$-1/7$	18
$z_t = \begin{cases} \\ \end{cases}$	$12/7$	$-1/7$	18
	$-1/7$	$-4/7$	6

Табл. 4

	$-y_2$	$-y_1$	1
$y_3 =$	$-5/8$	$7/8$	7
$x_1 =$	$1/4$	$1/4$	5
$x_2 =$	$3/8$	$1/8$	3
$z_0 =$	$13/8$	$1/8$	19
$z_t = \{$	$13/8$	$1/8$	19
	$-1/2$	$1/2$	10

Из табл. 4 находим: $\max z_0 = 19,\quad X_{\text{opt}} = (5;\ 3).$

Определим те значения t, для которых оптимальное решение будет в той же вершине. Умножив элементы последней строки на t и прибавив к соответствующим элементам предпоследней строки и с учетом неотрицательности, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{13}{8} - \dfrac{1}{2}t \ge 0, \\ \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{2}t \ge 0. \end{cases}$$

Из этой системы следует, что

$$\begin{cases} 4t \le 13, \\ 4t \ge -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \le \dfrac{13}{4}, \\ t \ge -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{4} \le t \le \frac{13}{4}.$$

Исключив отрицательные значения t получим:

$$\max z_t = 19,\ X_{\text{opt}} = (5;\ 3) \text{ при } t \in [0;\ 13/4].$$

Продолжаем исследование задачи на отрезке $t \in [13/4;\ 100]$.

Находим:

$$\min\left\{\left|\frac{-1}{2} : \frac{13}{8}\right|;\ \left|\frac{1}{2} : \frac{1}{8}\right|\right\} = \min\left\{\frac{4}{13};\ 4\right\} = \frac{4}{13}.$$

Умножим элементов последней строки табл. 4 на $\frac{13}{4}$ и прибавим к соответствующим элементам предпоследней строки и получим коэффициентов целевой функции $z_{13/4}$ (табл. 5).

Выберем столбец, содержащий элемент, равный нулю в строке для целевой функции. Это первый столбец. Определим разрешающую строку и разрешающий элемент – $\boxed{3/8}$.

Табл. 5

	$-y_2$	$-y_1$	1
$y_3 =$	$-5/8$	$7/8$	7
$x_1 =$	$1/4$	$1/4$	5
$x_2 =$	$\boxed{3/8}$	$1/8$	3
$z_{13/4} =$	0	$7/4$	$103/2$
$z_t = \{$	$13/8$	$1/8$	19
	$-1/2$	$1/2$	10

Выполнив один шаг модифицированных жордановых исключений с этим разрешающим элементом, получим табл. 6

Табл. 6

	$-x_2$	$-y_1$	1
$y_3 =$	$5/3$	$13/12$	12
$x_1 =$	$-2/3$	$1/6$	3
$y_2 =$	$8/3$	$1/3$	8
$z_{13/4} =$	0	$7/4$	$103/2$
$z_t = \{$	$-13/3$	$-5/12$	6
	$4/3$	$2/3$	14

Из табл. 6 находим: $\max z_{13/4} = 103/2$, $X_{\text{opt}} = (3;\ 0)$.

Определим те значения параметра t, для которых оптимальное решение будет в той же вершине. Умножив элементы последней строки на t и прибавив полученное произведение к соответствующим элементам предпоследней строки, и с учетом неотрицательности, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{3}t - \dfrac{13}{3} \ge 0, \\ \dfrac{2}{3}t - \dfrac{5}{12} \ge 0. \end{cases}$$

Из этой системы следует, что

$$\begin{cases} 4t \ge 13, \\ 8t \ge 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \ge \dfrac{13}{4}, \\ t \ge \dfrac{5}{8} \end{cases} \Rightarrow \frac{13}{4} \le t \le +\infty.$$

Следовательно,

$$\max z_t = 103/2,\ X_{\text{opt}} = (3;\ 0) \text{ при } t \in \left[\ 13/4;\ 100\right].$$

Ответ. $\max z_0 = 19,\ X_{\text{opt}} = (5;\ 3)$ на отрезке $[0;\ 13/4]$;

$$\max z_t = 103/2,\ X_{\text{opt}} = (3;\ 0) \text{ на отрезке } t \in \left[\ 13/4;\ 100\right].$$

21. Решить задачу:

$$z_t = (2+3t)x_1 + (-1+2t)x_2 + 3tx_3 + 4x_4 \to \max,$$

при

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \le 7, \\ -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 \le 15, \quad x_j \ge 0 \quad \forall j, \quad t \in (-\infty;\ +\infty). \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 2, \end{cases}$$

□ Полагаем $t = 0$, получаем целевую функцию с постоянными коэффициентами

$$z_0 = 2x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 + 4x_4 \to \max.$$

Решаем задачу с целевой функцией z_0 и двумя строками z_t.

Табл. 1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
$y_1 =$	1	2	1	3	7
$y_2 =$	–3	4	3	–1	15
$y_3 =$	2	–5	2	$\boxed{2}$	2
$z_0 =$	–2	1	0	–4	0
$z_t = \{$	–2	1	0	–4	0
	–3	–2	–3	0	0

В строке z_0 находим наименьший отрицательный элемент; этот элемент расположен в столбце для $-x_4$ и равен -4. Составим симплексные (неотрицательные) отношения элементов столбца свободных членов системы ограничений к соответствующим элементам выбранного столбца, и определим разрешающую строку, а следовательно и разрешающий элемент: $\min\{7/3;\ 2/2\} = 2/2$. Следовательно, разрешающий элемент находится в пересечении третей строки и четвертого столбца и равен 2. Выполнив один шаг модифицированных жордановых исключений с этим элементом, получим табл. 2.

Табл. 2

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-y_3$	1
$y_1 =$	–2	$\boxed{19/2}$	–2	$-3/2$	4
$y_2 =$	–2	$3/2$	4	$-1/2$	16
$x_4 =$	1	$-5/2$	1	$1/2$	1
$z_0 =$	2	–9	4	2	4
$z_t = \{$	2	–9	4	2	4
	–3	–2	–3	0	0

В z_0-строке во втором столбце имеется отрицательный элемент -9. Находим наименьшее имплексное отношение элементов столбца свободных членов к элементов второго столбца:

$$\min\{4:19/2;\ 16:3/2\} = \min\{8/19;\ 32/3\} = 8/19.$$

Этот элемент находится в пересечении первой строки и второго столбца и равен $19/2$. Выполнив шаг модифицированных жордановых исключений с этим элементом, получим табл. 3.

Табл. 3

	$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$	$-y_3$	1
$x_2 =$	$-4/19$	$2/19$	$-4/19$	$-3/19$	$8/19$
$y_2 =$	$-32/19$	$-3/19$	$82/19$	$14/19$	$292/19$
$x_4 =$	$2/19$	$5/19$	$9/19$	$2/19$	$39/19$
$z_0 =$	$2/19$	$18/19$	$40/19$	$11/19$	$148/19$
$z_t = \{$	$2/19$	$18/19$	$40/19$	$11/19$	$148/19$
	$-65/19$	$4/19$	$-65/19$	$-6/19$	$16/19$

Найдено оптимальное решение, соответствующее значению $t = 0$:

$$\max z_t = 148/19,\ \ X_{\text{opt}} = (0;\ 8/19;\ 0;\ 39/19).$$

Определим те значения t, для которых оптимальное решение будет в той вершине. Умножив элементы последней строки на t и прибавив к соответствующим элементам предшествующей строки и потребовав их неотрицательность, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{19} - \dfrac{65}{19}t \ge 0, \\ \dfrac{18}{19} + \dfrac{4}{19}t \ge 0, \\ \dfrac{40}{19} - \dfrac{65}{19}t \ge 0, \\ \dfrac{11}{19} - \dfrac{6}{19}t \ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} t \le \dfrac{2}{65}, \\ t \ge -\dfrac{9}{2}, \\ t \le \dfrac{8}{13}, \\ t \le \dfrac{11}{6}. \end{cases}$$

Решение этой системы: $-9/2 \le t \le 2/65$. Для исследования решения в промежутке $-\infty < t \le -9/2$ в табл. 3, элементов второй строки для z_t

умножим на $-9/2$ и прибавим к соответствующим элементам первой строки для z_t и находим новую строку для целевой функции (табл. 4).

Табл. 4

	$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$	$-y_3$	1
$x_2 =$	$-4/19$	$\boxed{2/19}$	$-4/19$	$-3/19$	$8/19$
$y_2 =$	$-32/19$	$-3/19$	$82/19$	$14/19$	$292/19$
$x_4 =$	$2/19$	$5/19$	$9/19$	$2/19$	$39/19$
$z_{-9/2} =$	$31/2$	0	$35/2$	2	4
$z_t =$	$2/19$	$18/19$	$40/19$	$11/19$	$148/19$
	$-65/19$	$4/19$	$-65/19$	$-6/19$	$16/19$

Выбрав второй столбец как разрешающий, находим разрешающую строку:

$$\min\left(\frac{8}{19}:\frac{2}{19};\ \frac{39}{19}:\frac{5}{19}\right)=\min\left(\frac{8}{2};\ \frac{39}{5}\right)=\frac{8}{2}.$$

То есть, $2/19-$ разрешающий элемент. Выполнив один шаг модифицированных жордановых исключений с этим элементом, получим табл. 5.

Табл. 5

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-y_3$	1
$y_1 =$	–2	$19/2$	–2	$-3/2$	4
$y_2 =$	–2	$3/2$	4	$1/2$	16
$x_4 =$	1	$-5/2$	1	$1/2$	1
$z_{-9/2} =$	$31/2$	0	$35/2$	2	4
$z_t =$	2	–9	4	2	4
	–3	–2	–3	0	0

Найдено оптимальное решение, соответствующее значению $t=-9/2: \max z_t = 4,\ \ X_{\text{opt}} = (0;\ 0;\ 0;\ 1)$. Определим те значения t, для которых оптимальное решение будет в той же вершине. Умножив элементов последней строки на t, прибавив к соответствующим элементам предшествующей строки и требуя их неотрицательность, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 2-3t \ge 0, \\ -9-2t \ge 0, \\ 4-3t \ge 0, \\ 2+0\cdot t \ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} t \le 2/3, \\ t \le -9/2, \\ t \le 4/4. \end{cases}$$

Промежуток $-\infty \le t \le -9/2$ является решением этой системы.

Оптимальное решение найдено:

$$\max z_t = 4,\ \ X_{\text{opt}} = (0;\ 0;\ 0;\ 1).$$

Для исследования в промежутке $2/65 \le t < +\infty$ в табл. 3 элементов последней строки умножим на $2/65$ и прибавим к соответствующим элементам предшествующей строки, и полученные числа запишем вместо элементов строки для z_0, т.е. получим строку для $z_{2/65}$ (табл. 6).

Табл. 6

	$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$	$-y_3$	1
$x_2 =$	$-4/19$	$2/19$	$-4/19$	$-3/19$	$8/19$
$y_2 =$	$-32/19$	$-3/19$	$82/19$	$14/19$	$292/19$
$x_4 =$	$\boxed{2/19}$	$5/19$	$9/19$	$2/19$	$39/19$
$z_{2/65} =$	0	$62/65$	2	$37/65$	$508/65$
$z_t = \{$	$2/19$	$18/19$	$40/19$	$11/19$	$148/19$
	$-65/19$	$4/19$	$-65/19$	$-6/19$	$16/19$

Очевидно, что первый столбец является разрешающим, имеет только один положительный элемент $2/19$ Выполнив один шаг м.ж.и. с этим элементом получим табл. 7 из которого находим оптимальное решение, соответствующее значению $t = 2/65$:

$$\max z_t = 508/65,\ \ X_{\text{opt}} = (39/2;\ 86/19;\ 0;\ 0).$$

Табл. 7

	$-x_4$	$-y_1$	$-x_3$	$-y_3$	1
$x_2 =$	2	12/19	14/19	1/19	86/19
$y_2 =$	16	77/19	226/19	46/19	966/19
$x_1 =$	19/2	5/2	9/2	1	39/2
$z_{2/65} =$	0	62/65	2	37/65	508/65
$z_t =$	-1	13/19	31/19	9/19	109/19
	65/2	333/38	455/38	59/19	2467/38

Определим те значения t, для которых оптимальное решение будет в той же вершине. Умножив элементы последней строки на t и прибавив к соответствующим элементам предшествующей строки и потребовав их неотрицательность найденных сумм, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} -1 + \dfrac{65}{2}t \ge 0, \\ \dfrac{13}{19} + \dfrac{333}{38}t \ge 0, \\ \dfrac{31}{19} + \dfrac{455}{38}t \ge 0, \\ \dfrac{9}{19} + \dfrac{59}{19}t \ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} t \ge \dfrac{2}{65}, \\ t \ge -\dfrac{26}{333}, \\ t \ge -\dfrac{62}{455}, \\ t \ge -\dfrac{9}{59}. \end{cases}$$

Промежуток $2/65 \le t < +\infty$ является решением системы неравенств. Оптимальное решение в этом промежутке:

$$\max z_t = 508/65,\ \ X_{\text{opt}} = (39/2;\ 86/19;\ 0;\ 0).$$

Ответ. $\max z_t = 4,\ X_{\text{opt}} = (0;\ 0;\ 0;\ 1)$ в $-\infty \le t \le -9/2$;

$\max z_t = 148/19,\ X_{\text{opt}} = (0;\ 8/19;\ 0;\ 39/19)$ в $-9/2 \le t \le 2/65$;

$\max z_t = 508/65,\ X_{\text{opt}} = (39/2;\ 86/19;\ 0;\ 0)$ в $2/65 \le t < +\infty$.

22. Решить задачу дробно-линейного программирования:

$$z = \frac{x_1 + 3x_2 + 2x_3}{2x_1 + x_2 + x_3} \to \min(\max), \begin{cases} 3x_1 \;\; - x_2 \;\; + x_3 = 11, \\ -2x_1 + 5x_2 \qquad \geq 23, \\ 4x_1 \;\; + 3x_2 \qquad \geq 19, \end{cases} x_j \geq 0 \;\forall j.$$

□ Система ограничений состоит из уравнений и неравенств. При преобразовании системы в стандартную форму уравнению будет соответствовать нуль-уравнение, а неравенства, как правило, преобразуются в неотрицательные равенства. Составим симплексную таблицу, выделив две строки для целевой функции – одну для числителя и вторую для знаменателя целевой функции (табл. 1).

Табл. 1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$0 =$	3	–1	$\boxed{1}$	11
$y_1 =$	–2	5	0	23
$y_2 =$	–4	–3	0	–19
$z_1 =$	–1	–3	–2	0
$z_2 =$	–2	–1	–1	0

Сначала исключаем нуль из правого столбца, выполнив шаг модифицированных жордановых исключений с указанным элементом $\boxed{1}$, который является более удобным при преобразовании табл. 1, и получим табл. 2 (число столбцов слало на единицу меньше, чес в таблице 1).

Табл. 2

	$-x_1$	$-x_2$	1
$x_3 =$	3	–1	11
$y_1 =$	–2	$\boxed{5}$	23
$y_2 =$	–4	–3	–19
$z_1 =$	5	–5	22
$z_2 =$	1	–2	11

В табл. 2 имеется отрицательный элемент (-19) в столбце свободных членов. Это означает, что надо найти базисное решение. Выбрав второй столбец, находим наименьшее симплексное отношение:

$$\min\left\{\frac{23}{5};\ \frac{-19}{-3}\right\}=\frac{23}{5}.$$

Выполнив шаг модифицированных жордановых исключений с элементом $\boxed{5}$, получим табл. 3.

Табл. 4

	$-x_2$	$-y_1$	1
$x_3 =$	$13/5$	$1/5$	$78/5$
$x_2 =$	$-2/5$	$1/5$	$23/5$
$y_2 =$	$\boxed{-23/5}$	$3/5$	$-26/5$
$z_1 =$	3	1	45
$z_2 =$	$1/5$	$2/5$	$101/5$

Находим наименьшее симплексное отношение элементов последнего столбца к соответствующим элементам первого столбца и определим разрешающий элемент $\boxed{-26/5}$. Выполнив шаг модифицированных жордановых исключений с этим элементом, получим табл. 4.

Табл. 4

	$-y_2$	$-y_1$	1
$x_3 =$	$1/2$	$1/2$	13
$x_2 =$	$-1/13$	$2/13$	5
$x_1 =$	$-5/26$	$-3/26$	1
$z_1 =$	$15/26$	$35/26$	42
$z_2 =$	$1/26$	$11/26$	20

Базисное решение найдено. Определим оптимальное решение. Для этого вычислим определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 15/26 & 42 \\ 1/26 & 20 \end{vmatrix} = \frac{15 \cdot 20}{26} - \frac{42}{26} = \frac{367}{26},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 35/26 & 42 \\ 11/26 & 20 \end{vmatrix} = \frac{35 \cdot 20}{26} - \frac{11 \cdot 42}{26} = \frac{367}{26}.$$

Дополнив табл. 4 новой строкой для Δ_j, и записав в последней клетке значение $z = z_1 / z_2$, получим табл. 5. Строка для Δ_j не содержит

отрицательные элементы. Следовательно, максимум найдено:

$$z_{\max} = 21/10, \quad X_{\text{opt}} = (1;\ 5;\ 13).$$

Табл. 5

	$-y_2$	$-y_1$	1
$x_3 =$	$1/2$	$\boxed{1/2}$	13
$x_2 =$	$-1/13$	$2/13$	5
$x_1 =$	$-5/26$	$-3/26$	1
$z_1 =$	$15/26$	$35/26$	42
$z_2 =$	$1/26$	$11/26$	20
$\Delta_j =$	$367/26$	$447/26$	$21/10$

Для нахождения $z_{\min}$ в среди клеток Δ_j- строки находим клетку с наибольшим элементом: этот элемент равен $447/26$. Выбрав второй столбец как разрешающий, определим наименьшее симплексное отношение, которое соответствует элементу $1/2$. Выполнив шаг модифицированных жордановых исключений с этим элементом, получим табл. 6 (без последней строки для определителя вида Δ_j, который вычисляется затем).

Табл. 6

	$-y_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	1	1	26
$x_2 =$	$-3/13$	$-4/13$	1
$x_1 =$	$-1/13$	$3/13$	4
$z_1 =$	$-10/13$	$-35/13$	7
$z_2 =$	$-5/13$	$-11/13$	9

Вычислим определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -10/13 & 7 \\ -5/13 & 9 \end{vmatrix} = -\frac{55}{13}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -35/13 & 7 \\ -11/13 & 9 \end{vmatrix} = -\frac{238}{13}.$$

Дополнив табл. 6 новой строкой для Δ_j, и записав в последней клетке значение $z = z_1 / z_2$, получим табл. 7.

Табл. 7

	$-y_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	1	1	26
$x_2 =$	$-3/13$	$-4/13$	1
$x_1 =$	$-1/13$	$3/13$	4
$z_1 =$	$-10/13$	$-35/13$	7
$z_2 =$	$-5/13$	$-11/13$	9
$\Delta_j =$	$-55/13$	$-238/13$	$7/9$

Строка для Δ_j не содержит положительные элементы. Следовательно, максимум найдено:

$$z_{\min} = 7/9, \quad X_{\text{opt}} = (4;\ 1;\ 0).$$

Ответ. $z_{\min} = 7/9, \quad X_{\text{opt}} = (4;\ 1;\ 0);$

$z_{\max} = 21/10, \quad X_{\text{opt}} = (1;\ 5;\ 13).$ ■

23. Решить задачу дробно-линейного программирования:

$$z=\frac{2x_1-x_2}{x_1+2x_2+1}\to\min(\max),$$

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3 & =2, \\ 2x_1+x_2 \qquad +x_4 & =6, \end{cases}\quad x_j\ge 0\quad \forall j.$$

□ Составим симплексную таблицу, по методике задачи 20 (табл. 1).

Табл. 1

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
$0=$	1	–2	1	0	2
$0=$	2	1	0	$\boxed{1}$	6
$z_1=$	–2	1	0	0	0
$z_2=$	–1	–2	0	0	1

Последовательно исключаем нули из правого столбца, выполнив шаги м.ж.и. с указанными элементами.

Табл. 2

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$0=$	1	–2	$\boxed{1}$	2
$x_4=$	2	1	0	6
$z_1=$	–2	1	0	0
$z_2=$	–1	–2	0	1

Табл. 3

	$-x_1$	$-x_2$	1
$x_3=$	1	–2	2
$x_4=$	2	1	6
$z_1=$	–2	1	0
$z_2=$	–1	–2	1

Из табл. 2 очевидно, что базисное решение найдено. Определим оптимальное решение. Для этого вычислим определители Δ_j:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Таблицу 3 дополним новой строкой для Δ_j, и получим табл. 4, где в пересечении последней строки и последнего столбца указываются значение $z = z_1 / z_2$.

Табл. 4

	$-x_1$	$-x_2$	1
$x_3 =$	1	–2	2
$x_4 =$	2	$\boxed{1}$	6
$z_1 =$	–2	1	0
$z_2 =$	–1	–2	1
$\Delta_j =$	–2	1	0

Для определения минимума берем столбец , содержащий положительный элемент в Δ_j-строке, и выполним шаг м.ж.и. с указанным элементом $\boxed{1}$ и получим табл. 5. (Этот элемент – единственный положительный и отпадает нахождение симплексных отношений и выбора наименьшего из них.)

Табл. 5

	$-x_1$	$-x_4$	1
$x_3 =$	5	2	14
$x_2 =$	2	1	6
$z_1 =$	–4	–1	–6
$z_2 =$	3	2	13

Для полученной таблицы вычислим определители Δ_j:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} = -34, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

Найденные Δ_1 и Δ_2 неположительны. Поэтому минимальное значение найдено:

$$z_{\min} = -6/13, \quad X_{\text{opt}} = (0;\ 6;\ 14;\ 0).$$

Для определения максимума z в табл. 4 берем столбец , содержащий отрицательный элемент в Δ_j-строке. Этот элемент равен $\boxed{6}$. Находим минимум симпленксных отношений элементов стеолбца свободных членой к выбранному столбцу:

$$\min\left\{\frac{2}{1};\frac{6}{2}\right\} = \frac{2}{1}.$$

Табл. 4

	$-x_1$	$-x_2$	1
$x_3 =$	$\boxed{1}$	–2	2
$x_4 =$	2	1	6
$z_1 =$	–2	1	0
$z_2 =$	–1	–2	1
$\Delta_j =$	–2	1	0

В табл. 4 выполним шаг м.ж.и., получим табл. 6.

Табл. 6

	$-x_3$	$-x_2$	1
$x_1 =$	1	–2	2
$x_4 =$	–2	5	2
$z_1 =$	2	–3	4
$z_2 =$	–1	–4	3

Для полученной таблицы вычислим определители Δ_j:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Найденные Δ_1 и Δ_2 неотрицательны. Поэтому максимальное значение найдено:

$$z_{\max} = \frac{4}{3}, \quad X_{\text{opt}} = (2;\ 0;\ 0;\ 2).$$

Ответ: $z_{\min} = -\dfrac{6}{13}$, $X_{\text{opt}} = (0;\ 6;\ 14;\ 0)$;

$$z_{\max} = \frac{4}{3}, \quad X_{\text{opt}} = (2;\ 0;\ 0;\ 2). \ \blacksquare$$

24. Для развития двух отраслей производства имеется инвестиция в размере $z_1 = 100$ млн. денежных единиц на 5 лет. Найти оптимальный план распределения, если доходы отраслей и уменьшение средств в отраслях соответственно определяются:

отрасль *A*: $f(x) = 4x$ и $\varphi(x) = 0,2x$;

отрасль *B*: $g(y) = 3y$ и $\psi(y) = 0,6y$,

где x и y – денежные единицы, выделяемые в отрасли.

□ Планируем распределение средств на последний, 5-й год, предполагая, что общий остаток от 4-го года равен z_5. Отдадим отрасли A x_5, а отрасли B $y_5 = z_5 - x_5$, где $0 \le x_5 \le z_5$. Тогда доход за 5-й год можно записать в виде

$$F_5 = 4x_5 + 3(z_5 - x_5) \text{ или } F_5 = x_5 + 3z_5.$$

Нужно найти максимум этой функции при условии $0 \le x_5 \le z_5$. Уравнение $F_5 = x_5 + 3z_5$ линейно относительно x_5. Следовательно, максимальное значение F_5 лежит на границе отрезка $0 \le x_5 \le z_5$. При $x_5 = 0$ получим $F_5 = 3z_5$, при $x_5 = z_5$ будет $F_5 = 4z_5$. Таким образом, все средства в последний, 5-й год, планирования, нужно отдать отрасли A.

Максимальный доход будет $F_5^* = 4z_5$.

Обозначим остаток средства от 3-го года планирования через z_4 и отдадим отрасли A на 4-й год планирования x_4 денежных единиц. Доход за последние два года запишется в виде

$$F_{4,5} = 4x_4 + 3(z_4 - x_4) + F_5^* \text{ или } F_{4,5} = x_4 + 3z_4 + 4z_5.$$

Но z_5 нужно выразить через x_4 и z_4 из условия, что z_5 - это остаток средств после 4-го года планирования, т.е.

$$z_5 = 0{,}2x_4 + 0{,}6y_4 = 0{,}2x_4 + 0{,}6(z_4 - x_4) = 0{,}6z_4 - 0{,}4x_4.$$

Тогда

$$F_{4,5} = x_4 + 3z_4 + 4(0{,}6z_4 - 0{,}4x_4),$$

$$F_{4,5} = 5{,}4z_4 - 0{,}6x_4,$$

где $0 \le x_4 \le z_4$. Нужно найти максимум этой функции. Если $x_4 = 0$, то $F_{4,5} = 5{,}4z_4$; если $x_4 = z_4$, то $F_{4,5} = 4{,}8z_4$. Следовательно, $F_{4,5}^* = 5{,}4z_4$, т.е. в начале 4-го года планирования все средства нужно вложить в отрасль B.

Теперь рассмотрим 5-й год планирования. Пусть z_3 – остаток после второго года планирования. Отдадим отрасли A x_3 денежных единиц, а отрасли B – $y_3 = z_3 - x_3$, где $0 \le x_3 \le z_3$.

Тогда доход за последние три года планирования будет составлять

$$F_{3,4,5} = 4x_3 + 3(z_3 - x_3) + F_{4,5}^*, \quad F_{3,4,5} = x_3 + 3z_3 + 5{,}4z_4.$$

Но $z_4 = 0{,}2x_3 + 0{,}6y_3 = 0{,}2x_3 + 0{,}6(z_3 - x_3) = 0{,}6z_3 - 0{,}4x_3$.

Окончательно имеем

$$F_{3,4,5} = x_3 + 3z_3 + 5{,}4(0{,}6z_3 - 0{,}4x_3) = 6{,}24z_3 - 1{,}16x_3.$$

Нужно найти максимум этой функции при $0 \le x_3 \le z_3$. Если $x_3 = 0$, то $F_{3,4,5} = 6{,}24z_3$; если $x_3 = z_3$, то $F_{3,4,5} = 5{,}08z_3$. Следовательно, $F_{3,4,5}^* = 6{,}24z_3$, т.е. в начале 3-го года планирования все средства нужно вложить в отрасль B.

Пусть z_2 – денежные средства в начале второго года планирования. В начале второго года отдадим отрасли A x_2 денежных единиц, а отрасли B – $y_2 = z_2 - x_2$, где $0 \le x_2 \le z_2$. Тогда доход за последние четыре года планирования будет составлять

$$F_{2,3,4,5} = 4x_2 + 3(z_2 - x_2) + F^*_{3,4,5}, \quad F_{2,3,4,5} = x_2 + 3z_2 + 6{,}24z_3.$$

Учитывая, что $z_3 = 0{,}2x_2 + 0{,}6y_2 = 0{,}6z_2 - 0{,}4x_2$ получим

$$F_{2,3,4,5} = x_2 + 3z_2 + 6{,}24(0{,}6z_2 - 0{,}4x_2) = 6{,}744z_2 - 1{,}496x_2.$$

При $x_2 = 0$ находим, что $F_{2,3,4,5} = 6{,}744z_2$, а при $x_2 = z_2$ – $F_{2,3,4,5} = 5{,}248z_2$. Таким образом, $F^*_{2,3,4,5} = 5{,}248z_2$, т.е. все средства надо вложить в отрасль B.

Рассмотрим 1-й год планирования. Отрасль A получит x_1 денежных единиц, а отрасль B – $y_1 = z_1 - x_1$, где $0 \le x_1 \le z_1$. Доход за все 5 лет будет составлять

$$F_{1,2,3,4,5} = 4x_1 + 3(z_1 - x_1) + F^*_{2,3,4,5}, \quad F_{1,2,3,4,5} = x_1 + 3z_1 + 6{,}744z_2.$$

Но $z_2 = 0{,}2x_1 + 0{,}6y_1 = 0{,}6z_1 - 0{,}4x_1$. Окончательно имеем:

$$F_{1,2,3,4,5} = x_1 + 3z_1 + 6{,}744(0{,}6z_1 - 0{,}4x_1),$$

$$F_{1,2,3,4,5} = 7{,}0464z_1 - 1{,}6976x_1.$$

При $x_1 = 0$ находим, что $F_{1,2,3,4,5} = 7{,}0464z_1$, а при $x_1 = z_1$ – $F_{1,2,3,4,5} = 5{,}3488z_1$. Таким образом, $F^*_{1,2,3,4,5} = 7{,}0464z_1$, т.е. в начале 1-го года планирования все средства надо вложить в отрасль B.

Таким образом, первые четыре года все средства нужно вложить в отрасль B, а только в 5-й год – в отрасль A. Тогда доход будет максимальным.

Максимальный общий доход:

$$F^*_{1,2,3,4,5} = 7{,}0464 \cdot 100 = 704{,}64.$$

Теперь определим распределение средств по годам и получаемые доходы.

Первый год

$x_1 = 0, \quad y_1 = 100;$

остатки на 2-й год:

$$z_2 = \varphi(x_1) + \psi(y_1) =$$
$$= 0,2 \cdot 0 + 0,6 \cdot 100 = 60;$$

Доход:

$$f(x_1) = 4 \cdot 0 = 0,$$
$$g(y_1) = 3 \cdot 100 = 300;$$
$$F_1^* = f(x_1) + g(y_1) = 300.$$

Второй год

$x_2 = 0, \quad y_2 = 60;$

остатки на 3-й год:

$$z_3 = \varphi(x_2) + \psi(y_2) =$$
$$= 0,2 \cdot 0 + 0,6 \cdot 60 = 36;$$

Доход:

$$f(x_2) = 4 \cdot 0 = 0,$$
$$g(y_2) = 3 \cdot 60 = 180;$$
$$F_2^* = f(x_2) + g(y_2) = 180.$$

Третий год:

$x_3 = 0, \quad y_3 = 36;$

остатки на 4-й год:

$$z_4 = \varphi(x_3) + \psi(y_3) =$$
$$= 0,2 \cdot 0 + 0,6 \cdot 36 = 21,6;$$

Доход:

$$f(x_3) = 4 \cdot 0 = 0,$$
$$g(y_3) = 3 \cdot 36 = 106;$$
$$F_3^* = f(x_3) + g(y_3) = 106.$$

Четвертый год:

$x_4 = 0, \quad y_4 = 21,6;$

остатки на 5-й год

$$z_2 = \varphi(x_1) + \psi(y_1) =$$
$$= 0,2 \cdot 0 + 0,6 \cdot 21,6 = 19,96;$$

Доход:

$$f(x_4) = 4 \cdot 0 = 0,$$
$$g(y_4) = 3 \cdot 21,6 = 64,8;$$
$$F_4^* = f(x_4) + g(y_4) = 64,8.$$

Пятый год:

$x_5 = 12,96, \quad y_5 = 0;$

Доход:

$$f(x_5) = 4 \cdot 12,96 = 51,84,$$
$$g(y_5) = 3 \cdot 0 = 0;$$
$$F_5^* = f(x_5) + g(y_5) = 51,84.$$

Общий доход:

$$F_1^* + F_2^* + F_3^* + F_4^* + F_5^* =$$
$$= 300 + 180 + 108 + 64,8 + 51,84 = 704,64 = F_{1,2,3,4,5}^*.$$

25. Для двух отраслей производства отпущено $z_1 = 10$ денежных единиц на 3 года. Найти оптимальный план распределения, если доходы отраслей и уменьшение средств в отраслях соответственно определяются:

отрасль A: $f(x) = 10x - x^2$ и $\varphi(x) = 0{,}6x$;

отрасль B: $g(y) = 4y$ и $\psi(y) = 0{,}8y$,

где x и y – денежные единицы, выделяемые в отрасли.

□ Доход за третий год равен

$$F_3 = 10x_3 - x_3^2 + 4(z_3 - x_3),$$

где z_3 - остаток средств 2-го года, x_3 - средства, вложенные в отрасль A. Найдем максимум функции F_3 при условии $0 \le x_3 \le z_3$. F_3 – парабола, ветви которой направлены вверх, т.е. имеющая максимум. Преобразуем уравнение параболы следующим образом:

$$F_3 = 6x_3 + 4z_3 - x_3^2.$$

Находим критическую точку:

$$F_3' = 6 - 2x_3,\ 6 - 2x_3 = 0,\ x_3 = 3;\ F_3'$$

если $x_3 < 3,$ то $F_3' > 0;$ если $x_3 > 3,$ то $F_3' < 0.$

Следовательно, при $x_3 = 3$ функция F_3 имеет максимум. Максимальное значение: $F_3^* = 4z_3 + 9.$

Составим функцию, выражающую доход от обеих отраслей за 2-й и 3-й годы. Это будет

$$F_{2,3} = 10x_2 - x_2^2 + 4(z_2 - x_2) + 4z_3 + 9.$$

Учитывая, что

$$z_3 = 0{,}6x_2 + 0{,}8(z_2 - x_2) = 0{,}8z_2 - 0{,}2x_2, \text{ имеем}$$

$$F_{2,3} = 10x_2 - x_2^2 + 4(z_2 - x_2) + 4(0{,}8z_2 - 0{,}2x_2) + 9,$$

$$F_{2,3} = -x_2^2 + 5{,}2x_2 + 7{,}2z_2 + 9.$$

Найдем критическую точку

$$F_{2,3}' = -2x_2 + 5{,}2,\quad x_2 = 2{,}6.$$

Если $x_2 < 2{,}6$, то $F_{2,3}' > 0$; если $x_2 > 2{,}6$, то $F_{2,3}' < 0$. Поэтому $x_2 = 2{,}6$ соответствует максимум функции $F_{2,3}$:

$$F^*_{2,3} = -2{,}6^2 + 5{,}2 \cdot 2{,}6 + 7{,}2`z_2 + 9 = 7{,}2z_2 + 15{,}76.$$

Таким образом, $F^*_{2,3} = 7{,}2z_2 + 15{,}76.$

Составим функцию, выражающую доход от обеих отраслей за 1-й, 2-й и 3-й годы. Это будет

$$F_{1,2,3} = 10x_1 - x_1^2 + 4(z_1 - x_1) + F'_{2,3}$$

или

$$F_{1,2,3} = 10x_1 - x_1^2 + 4(z_1 - x_1) + 7{,}2z_2 + 15{,}76\,.$$

Но $z_2 = 0{,}6x_1 + 0{,}8(z_1 - x_1) = 0{,}8z_1 - 0{,}2x_1$. Поэтому

$$F_{1,2,3} = 10x_1 - x_1^2 + 4(z_1 - x_1) + 7{,}2(0{,}8z_1 - 0{,}2x_1) + 15{,}76 =$$

$$F_{1,2,3} = 10x_1 - x_1^2 + 4(z_1 - x_1) + 7{,}2z_2 + 15{,}76\,.$$

$$F_{1,2,3} = -x_1^2 + 4{,}56x_1 + 9{,}76z_1 + 15{,}76$$

Находим критическую точку:

$$F'_{1,2,3} = -2x_1 + 4{,}56;\; x_1 = 2{,}28.$$

Если $x_1 < 2{,}28,$ то $F'_{1,2,33} > 0;$ если $x_1 > 2{,}28,$ то $F'_{1,2,3} < 0.$ Поэтому в точке $x_1 = 2{,}28$ функция $F_{1,2,3}$ достигает максимума.

$$F^*_{1,2,3} = -2{,}28^2 + 4{,}56 \cdot 2{,}28 + 9{,}76z_1 + 15{,}76 = 9{,}79z_1 + 20{,}9584.$$

При $z_1 = 10$ получим $F^*_{1,2,3} = 9{,}79 \cdot 10 + 20{,}9584 = 118{,}5584.$

Распределение ресурсов на три года будет:

Первый год:

	Доход:
$x_1 = 2{,}28,$	$f(x_1) = 10 \cdot 2{,}28 - 2{,}28^2 = 17{,}6016,$
$y_1 = 10 - 2{,}28 = 7{,}72;$	$g(y_1) = 4 \cdot 7{,}72 = 30{,}88;$
остатки на 2-й год:	$F_1^* = f(x_1) + g(y_1) = 48{,}4816.$
$z_2 = \varphi(x_1) + \psi(y_1) = 0{,}6 \cdot 2{,}28 +$	
$+ 0{,}8 \cdot 7{,}72 = 7{,}544;$	

Второй год:

$$x_2 = 2{,}6,$$
$$y_2 = 7{,}544 - 2{,}6 = 4{,}944;$$
остатки на 3-й год:
$$z_3 = \varphi(x_2) + \psi(y_2) = 0{,}6 \cdot 2{,}6 +$$
$$+ 0{,}8 \cdot 4{,}944 = 5{,}5152;$$

Доход:
$$f(x_2) = 10 \cdot 2{,}6 - 2{,}6^2 = 19{,}24,$$
$$g(y_2) = 4 \cdot 4{,}944 = 19{,}776;$$
$$F_2^* = f(x_2) + g(y_2) = 39{,}016.$$

Третий год:

$$x_3 = 3,$$
$$y_3 = 5{,}5152 - 3 = 2{,}5152;$$

Доход:
$$f(x_3) = 10 \cdot 3 - 3^2 = 21,$$
$$g(y_3) = 4 \cdot 2{,}5152 = 10{,}0608;$$
$$F_3^* = f(x_3) + g(y_3) = 31{,}0608.$$

Общий доход:
$$F_1^* + F_2^* + F_3^* = 48{,}4816 + 39{,}016 + 31{,}0608 = 118{,}5584 = F'_{1,2,3}.$$

Подписано в печать 20.09.2016г.
Заказ 59. Тираж 100 экз.
Отпечатано в издательско-типографическом секторе Филиала МГУ
имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе
г. Душанбе, ул. Бохтар, 35/1